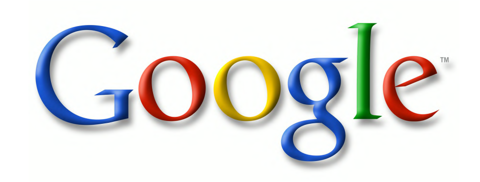





VE
RI
TAS

Eastwood

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET

Recteur de l'Académie d'Aix
Ex-Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

ET

KŒHLER

Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

AVEC LA COLLABORATION

DE MM.

Aug. MOREL ET COCHEZ

Professeurs de mathématiques.

TOME TROISIÈME



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1879.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

THÉORIE DES AXES RADICAUX

Par M. A. Morel.

(*Suite* et *fin*, voir tome 2, pages 353.)

XXXIX. **Théorème.** — *Les cercles qui coupent sous le même angle trois cercles donnés ont le même axe radical.*

En effet, lorsque l'on considère trois cercles égaux, les cercles qui les coupent sous le même angle sont concentriques, et nous avons démontré (32) que la figure inverse d'un système de cercles concentriques est un système de cercles ayant même axe radical. On connaît deux points de cette droite dans le cas général, le centre radical et le centre de l'un des cercles tangents. Par conséquent, le lieu des centres des cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles égaux, se compose de quatre droites qui sont les perpendiculaires abaissées du centre radical sur les quatre axes de similitude.

On peut encore le démontrer de la façon suivante : Tout cercle qui coupe deux cercles sous le même angle, ne change pas dans l'inversion de l'un des cercles dans l'autre. Donc il est orthogonal à l'un des cercles bissecteurs. Par conséquent, si un cercle coupe trois cercles sous le même angle, il est orthogonal aux trois cercles bissecteurs de ces cercles pris deux à deux, et il a pour centre un point de leur axe radical.

XL. **Théorème de Hart.** — *Les huit cercles tangents à trois cercles donnés sont, quatre par quatre, tangents aux six*

cercles obtenus par l'inversion de l'un d'eux, lorsque les deux autres cercles se transforment l'un dans l'autre.

En effet, les quatre cercles tangents aux cercles 1 et 2 à la fois intérieurement ou extérieurement, ne changent pas lorsqu'on prend pour cercle d'inversion le cercle bissecteur des cercles 1 et 2, et le troisième se transforme en un cercle tangent à ces quatre cercles.

XLI. Nous avons vu (19, 4°) que la longueur de la tangente commune à deux cercles était proportionnelle au sinus ou au cosinus du demi-angle de ces deux cercles. C'est pour cela que certains géomètres, et en particulier M. Casey, ont considéré la tangente commune de deux cercles au lieu de l'angle que font ces deux cercles. Cette considération a permis à ce géomètre de trouver la condition que doivent remplir quatre cercles pour être tangents à un cinquième cercle.

La comparaison de la valeur qui donne l'angle de deux cercles (10) avec la longueur qui donne le carré de la tangente commune (19, 4°), nous montre que, puisque les angles, réels ou imaginaires, de deux cercles, se conservent dans l'inversion, *si l'on considère deux cercles quelconques et leurs inverses, le rapport de la tangente commune à la moyenne géométrique du rayon est le même pour les deux couples.*

XLII. Cela posé, considérons quatre cercles tangents à un même cercle, et prenons pour pôle d'inversion un point de ce dernier cercle. La figure se transformera alors en un système de quatre cercles tangents à une droite, inverse du cinquième cercle. Appelons a, b, c, d les points de contact, sur cette droite, des cercles dont les rayons sont ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4. On aura pour les quatre points a, b, c, d situés sur une droite (*Voir* Desboves, *Quest. de géom.*, 2ᵉ édit., page 28):

$$ab \,.\, cd + ad \,.\, bc = ac \,.\, bd.$$

En mettant les doubles signes, pour tenir compte des cas où les tangentes communes peuvent être d'espèces différentes, faisant passer tout dans le premier membre et divisant par

$$\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}$$

il vient

$$\frac{ab}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \cdot \frac{cd}{\sqrt{\rho_3\rho_4}} \pm \frac{ad}{\sqrt{\rho_1\rho_4}} \cdot \frac{bc}{\sqrt{\rho_2\rho_3}} \pm \frac{ac}{\sqrt{\rho_1\rho_3}} \cdot \frac{bd}{\sqrt{\rho_2\rho_4}} = 0.$$

En appliquant le théorème précédent, on aura, lorsque quatre cercles sont tangents à un même cinquième cercle, la relation suivante :

$$\frac{AB}{\sqrt{r_1r_2}} \cdot \frac{CD}{\sqrt{r_3r_4}} \pm \frac{AD}{\sqrt{r_1r_4}} \cdot \frac{BC}{\sqrt{r_2r_3}} \pm \frac{AC}{\sqrt{r_1r_3}} \cdot \frac{BD}{\sqrt{r_2r_4}} = 0.$$

C'est dans cette formule que consiste le théorème de M. Casey. On peut supprimer les dénominateurs, et on a alors une relation entre les longueurs des tangentes communes des cercles pris deux à deux d'un système de quatre cercles tangents à un cinquième cercle.

XLIII. **Théorème.** — *Le rapport des distances circulaires d'un point à deux cercles ne change pas par l'inversion.*

En effet, si par ce point et les deux points d'intersection des cercles donnés on fait passer un cercle, on sait (16) que le rapport des distances circulaires du point aux deux cercles est le rapport des sinus des angles que fait ce cercle avec les deux cercles donnés. Or, par l'inversion, les angles des cercles ne changent pas. Donc les trois cercles se transformeront en trois cercles passant par les mêmes points et comprenant entre eux les mêmes angles. Le rapport des distances angulaires d'un point de l'inverse du cercle auxiliaire aux inverses des deux autres cercles sera encore égal au rapport des sinus; il sera donc le même que précédemment.

XLIV. **Théorème.** — *La figure inverse d'une anallagmatique est une anallagmatique.* — Soit O le pôle, M et M' deux points réciproques de la figure anallagmatique, et *o* le cercle de *reproduction* (c'est-à-dire le cercle par rapport auquel M et M' sont réciproques). Dans l'inversion, les deux points M et M' deviennent *m* et *m'*. Mais tout cercle passant par les points M et M' coupe orthogonalement le cercle de reproduction. Donc, le cercle quelconque MM' se transforme en un cercle *mm'* qui coupe orthogonalement l'inverse du cercle de reproduction. Donc les deux points quelconques

m et m' sont toujours réciproques par rapport à l'inverse du cercle de reproduction.

XLV. Soient deux cercles concentriques de rayons α et β; il est facile de voir que le rayon d'un cercle tangent à ces deux cercles est $\frac{\alpha - \beta}{2}$, et que la distance de son centre au centre des deux cercles est $\frac{\alpha + \beta}{2}$. Si l'on a $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \sin \frac{\pi}{n}$, on pourra décrire un anneau de n cercles tangents à ces deux cercles, chacun d'eux étant tangent au précédent et au suivant, et de plus, si le problème est possible une fois, il est possible d'une infinité de manières, en ce que l'on peut prendre le point de contact du premier cercle où l'on veut. M. H. M. Taylor, dans le *Messenger of Mathematics* (fév. 1878), a, par la méthode d'inversion, cherché à résoudre la même question pour deux cercles non concentriques, mais intérieurs, et nous allons donner ici sa solution de cette question, en la complétant par une construction géométrique.

Considérons deux cercles concentriques de rayons α et β satisfaisant à la condition précédente et prenons la figure inverse par rapport à un point O dont la distance au centre commun est d. Soit μ le module d'inversion ; appelons a et b les rayons des cercles transformés, c la distance de leurs centres; si l'on mène la ligne des centres, qui passe par le point o, on a

$$(1)\ OA = \frac{\mu^2}{d - \alpha} = x + 2a;\ (2)\ OB = \frac{\mu^2}{d - \beta} = x + a - c + b.$$

$$(3)\ OC = \frac{\mu^2}{d + \beta} = x + a - c - b;\ (4)\ CD = \frac{\mu^2}{d + \alpha} = x.$$

avec
$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \sin \frac{\pi}{n},$$

ou $$(5)\quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 + \sin\frac{n}{\pi}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}} = m.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, $\mu = 1$, et éliminons entre ces cinq équations les quantités d, α, β, x.

Les équations (1) et (4), par addition et soustraction, donnent

$$(6)\quad \frac{\alpha}{d^2-\alpha^2} = a; \qquad (7)\quad \frac{d}{d^2-\alpha^2} = x + a.$$

De même, des équations (2) et (3), on tire

$$(8)\quad \frac{\beta}{d^2-\beta^2} = b; \qquad (9)\quad \frac{d}{d^2-\beta^2} = x + a - c.$$

Retranchant membre à membre les équations (7) et (9), il vient $$\frac{d}{d^2-\alpha^2} - \frac{d}{d^2-\beta^2} = c.$$

En substituant les valeurs tirées des équations (6) et (8), il vient $$\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} = \frac{c}{d}.$$

On en tire (10) $c = \frac{d}{\alpha}(a - mb)$;

$$(11)\quad c = \frac{d}{\beta}\left(\frac{a}{m} - b\right).$$

Enfin, des équations (6), (8), (10), (11), on tire

$$\frac{\alpha b}{a\beta} = \frac{mb}{a} = \frac{d^2 - \alpha^2}{d^2 - \beta^2} = \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{d}\right)^2}{1 - \left(\frac{\beta}{d}\right)^2}$$

$$= m^2\,\frac{c^2 - (a - mb)^2}{c^2m^2 - (a - mb)^2}.$$

En effectuant et divisant par $a - bm$, qui n'est pas nul,

$$mc^2 = (a - bm)(am - b).$$

En remplaçant m par sa valeur, on trouve

$$\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)c^2 = (a - b)^2 - \sin^2\frac{\pi}{n}(a + b)^2.$$

D'où $$\sin^2\frac{\pi}{n} = \frac{(a - b)^2 - c^2}{(a + b)^2 - c^2}.$$

Si donc le second membre est égal au carré du sinus d'un arc sous-multiple de π, le problème sera possible.

On sait d'ailleurs que pour transformer deux cercles en cercles concentriques, on doit prendre pour pôle un des points limites du système des deux cercles.

Si l'on remplace $\frac{\pi}{n}$ par $\frac{h\pi}{n}$, on obtiendra la condition de l'existence de n cercles tangents, entourant h fois le cercle intérieur des deux cercles donnés. Il est facile de remarquer que les centres de tous ces cercles sont sur une ellipse ayant pour foyers les centres des deux cercles donnés. Soit, en effet, γ le rayon d'un cercle tangent extérieurement au petit cercle et intérieurement au grand. La distance de son centre au centre du grand cercle est $a - \gamma$; la distance au centre du petit cercle est $b + \gamma$. La somme de ces deux rayons est constante, et égale à $a + b$.

Cherchons une interprétation géométrique de cette condition. On sait que, par l'inversion, les angles se conservent. Prenons une position particulière pour l'un des cercles tangents, le cas où les points de contact sont sur la ligne des centres. Alors, si nous prenons la figure inverse, le pôle étant le point limite extérieur du système des deux cercles, nous aurons deux cercles concentriques, et un cercle tangent sur la ligne qui va du centre au pôle d'inversion. Le rayon qui passe par les centres, et par suite par le pôle, se transforme en lui-même; le rayon tangent au cercle solution se transforme en un cercle tangent au cercle considéré, et passant par les points limites. On sait construire ce cercle, qui passe par deux points et est tangent à un cercle. Pour que le problème soit possible, il faudra que l'angle que fait ce cercle avec sa corde soit une portion aliquote de la circonférence, ou si l'on veut, que la ligne qui joint les points limites soit le côté du polygone régulier de n côtés inscrit dans cette circonférence que l'on construit d'après les conditions précédentes.

NOTE SUR LE SECOND DEGRÉ

par **M. Kliszowski**, professeur au Prytanée militaire.

Quand un problème conduit à une équation du second degré ou à une équation bicarrée, et que l'inconnue reconnue réelle est assujettie à être comprise entre certaines limites, on est souvent embarrassé soit pour le vérifier, soit surtout pour trouver simplement les conditions qui doivent exister entre les paramètres pour qu'il en soit ainsi.

La plupart du temps on écrit que l'inconnue, si c'est un sinus par exemple, est en valeur absolue <1; si c'est une corde de circonférence, qu'elle est <2 R, etc., et on a une inégalité à vérifier ou à résoudre.

Les calculs sont longs, souvent le paramètre entre sous un radical qu'on est alors obligé de faire disparaître par l'élévation au carré, et comme cette opération n'est pas toujours permise, il faut poser des équations de condition qui compliquent encore la question. Je proposerai la méthode suivante :

Principe. — Lorsque les racines d'un trinôme du second degré en x dont le coefficient du terme en x^2 est positif sont réelles et inégales, toute valeur comprise entre les racines substituée à la place de la variable rend le trinôme négatif, toute valeur en dehors des racines le rend positif.

La réciproque est vraie.

Si la substitution d'un nombre à la place de x donne un résultat négatif, ce nombre est compris entre les racines; si elle donne un résultat positif, ce nombre est en dehors des racines.

Supposons donc qu'un problème conduise à une équation du second degré, les racines de l'équation sont réelles; mais l'inconnue doit être comprise entre a et b.

Je substitue a, je substitue b. J'ai deux résultats de signe contraire; j'affirme alors qu'il y a une racine et une seule comprise entre a et b.

J'obtiens deux résultats de même signe, il y a alors entre les deux nombres deux racines, ou il n'y en a pas. Pour distinguer ce qui se passe, je remonte à l'équation et les quantités représentant la somme des racines ou le produit me montreront toujours dans quel cas on se trouve.

REMARQUE. — Si les racines de l'équation sont égales, la difficulté disparaît puisqu'il n'y a plus de radicaux.

EXEMPLES : 1° *Déterminer sur le diamètre d'une sphère une longueur* AI *telle qu'en menant un plan perpendiculaire à ce diamètre, le volume du cône* CBD *soit équivalent à* m *fois le volume de la calotte sphérique* CAD.

$AI = x$ Eq. du problème

$$x^2 (m + 1) - Rx (4 + 3m) + 4R^2 = 0.$$

Les racines sont toujours réelles ; on le vérifie facilement. x doit être compris entre 0 et 2R.

$$0 \text{ donne } + 4R^2,$$
$$2R \text{ donne } - 2R^2m$$

donc il y a une racine et une seule comprise entre 0 et 2R.

2° *Circonscrire à une sphère un cône tel que le rapport de la surface totale à la surface de la sphère soit égal à un nombre donné* m.

Prenons pour inconnue x, la hauteur du cône.

$$\text{Eq. } x^2 - 4Rmx + 8R^2m = 0.$$

Les racines sont réelles si $m \geq 2$.

Supposons cette condition remplie. Les deux racines sont positives et pour qu'elles conviennent il faut qu'elles soient $> 2R$.

Je substitue 0 et 2R $\quad 0$ donne $+ 8R^2m$,

$2R$ donne $+ 4R^2m$;

donc les deux racines sont ou toutes deux $< 2R$ ou toutes deux $> 2R$; mais $m > 2$, la somme des racines est $> 8R$; il faut donc que les deux racines soient toutes deux $> 2R$. Les deux solutions conviennent donc.

3° *Étant donné un tronc de prisme triangulaire droit, on demande de mener par l'une des arêtes un plan qui le partage en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés* p. q.

(*École forestière 1869.*)

$$\frac{\text{Vol ACIDEH}}{\text{Vol ABCDEF}} = \frac{p}{p+q},$$

$$\text{IH} = x,$$

$$\text{Eq.}\, x^2 + ax - \frac{bq(a+b) + pc(a+C)}{p+q}.$$

Les deux racines sont réelles; une est positive, l'autre est négative. La positive doit être comprise entre b et c. Or, la substitution de b et de c donne des résultats de signe contraire, donc la racine positive convient toujours au problème.

4° $$\text{Sin}^2 x + \sin x - 11 = 0;$$

les racines sont réelles ; une est positive, l'autre est négative. Elles doivent être en valeur absolue < 1.

o donne —,

1 donne —;

donc les deux racines sont comprises toutes deux entre o et 1 ou il n'y en a pas. Or, comme il y a une racine négative, c'est qu'il n'y en a pas entre o et 1.

Même conclusion pour o et — 1.

Donc, l'équation n'admet aucune racine.

5° $$\text{Sin}^2 x - 3m \sin x + m = 0.$$

Supposons d'abord $m < 0$ et posons $m = -m'$.

$$\text{Sin}^2 x + 3m' \sin x - m' = 0.$$

Les deux racines sont réelles; une est positive, l'autre est négative : o donne $-m'$,

1 donne $+1 + 2m'$; donc une racine entre o et 1.

o donne —,

— 1 donne $1 - 4m'$.

Si donc $1 - 4m'$ est < 0, il y aura une racine entre o et 1; si $1 - 4m'$ est < 0, il n'y en aura pas, car il ne peut y en avoir deux.

En résumé, si m est < 0, il y a toujours une racine positive, et la racine négative ne convient que si $m \geq -\frac{1}{4}$.

Supposons $m > 0$.

Les racines seront réelles si $m \geq \frac{4}{9}$. Supposons cette

condition remplie, les racines sont toujours positives; elles conviendront si elles sont comprises entre o et 1.

o donne $+$,
1 donne $1 - 2m$.

Si $1 - 2m$ est < 0, c'est-à-dire si $m > \frac{1}{2}$, il y a une racine et une seule qui convient. Si $m < \frac{1}{2}$, il y en a deux ou pas, mais il y en a nécessairement deux, puisque le produit est m, c'est-à-dire $< \frac{1}{2}$ et on sait que deux nombres > 1 donneraient un produit > 1.

$$m$$

$$-\infty \underbrace{\quad}_{1 \text{ rac.}} -\frac{1}{4} \underbrace{\quad}_{2 \text{ rac.}} 0 \underbrace{\quad}_{\text{rien}} \frac{4}{9} \underbrace{\quad}_{2 \text{ rac.}} \frac{1}{2} \underbrace{\quad}_{1 \text{ rac.}} +\infty$$

Application.

$$2\text{Sin}^2 x - (3m + 1)\sin x + 4m - 2 = 0.$$

On suivra la même marche.

Les racines seront réelles si $9m^2 - 26m + 16 > 0$, c'est-à-dire si $m > 18$ ou $m < 8$.

1° Supposons $m > 18$, les deux racines de l'équation sont positives; elles conviendront si elles sont comprises entre o et 1.

o donne $+$,
1 donne $m - 1$, c'est-à-dire $+$.

Les deux racines sont donc comprises entre o et 1, ou elles ne le sont pas. Or la somme est $> \frac{55}{2}$, donc les deux racines sont toutes deux > 1.

2° $m < 8$.

Dans ce cas le produit des racines peut être négatif ou positif, suivant le signe de $4m - 2$.

Si $4m - 2$ est > 0, c'est-à-dire si $m > \frac{1}{2}$, les deux racines sont toutes deux positives :

o donne $+$,
1 donne $m - 1$.

Si m est < 1 il y a une racine, et une seule; si m est > 1, il y en a deux ou aucune. Mais dans ce cas, le produit des racines étant > 1, il n'y en a pas.

Supposons $4m - 2 < 0$, c'est-à-dire $m < \frac{1}{2}$; une racine est positive, l'autre est négative,

$$\begin{array}{ll} 0 \text{ donne } -, & \\ 1 & m - 1 \text{ c. à d. } -; \end{array}$$

donc il y aurait deux racines ou aucune; mais comme nous savons qu'il ne peut y avoir qu'une racine positive, il n'y en a pas de positive.

$$\begin{array}{ll} 0 \text{ donne } -, & \\ -1 & 7m + 1; \end{array}$$

si $m > -\frac{1}{7}$, il y aura une racine comprise entre 0 et 1.

Si $m < -\frac{1}{7}$ le raisonnement précédent montre qu'il n'y en a pas.

$$m$$

$$-\infty \quad -\frac{1}{7} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1\ 8 \quad 18 + \infty$$

rien — 1 racine — rien

L'équation bicarrée se ramenant à une équation du second degré, la discussion est la même.

NOTE DE GEOMÉTRIE

DE LA DIRECTRICE DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE

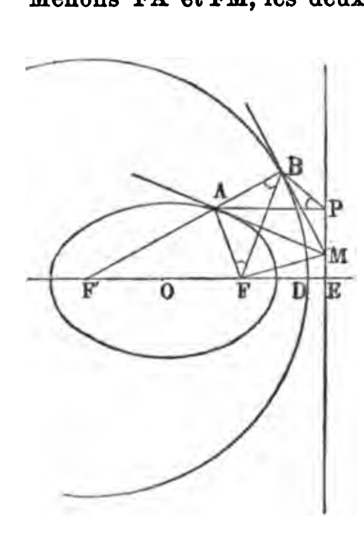
par M. **Malloizel.**

1° Ellipse. — Proposons-nous de trouver le lieu suivant:

LIEU GÉOMÉTRIQUE. — F *et* F' *sont les foyers d'une ellipse et* FD *le cercle directeur décrit du foyer* F' *comme centre. Par le point* F', *on mène une sécante* F'AB *et par les points* A *et* B *de rencontre avec l'ellipse et le cercle les tangentes à ces deux courbes, on demande de trouver le lieu géométrique du point de ren-*

contre M *de ces tangentes, lorsque la sécante* F'AB *tourne autour du point* F'.

Menons FA et FM, les deux triangles ABM et FAM sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux : FAM = MAB puisque AM est la tangente, AM commun et FA = AB d'après la propriété connue du cercle directeur. On en déduit FM = MB. Le lieu du point M est donc le lieu des points d'où on peut mener à deux circonférences des tangentes égales, l'une d'elles est le cercle directeur et l'autre est réduite à son centre F. Ce lieu est une perpendiculaire à la ligne des centres EF' dont le pied E est distant du point O,



milieu de EF' d'une longueur $OE = \frac{\overline{F'B}^2}{2FF'} = \frac{4a^2}{4c} = \frac{a^2}{c}$, en désignant par $2a$ le grand axe de l'ellipse et par $2c$ la distance FF' des deux foyers.

Cette droite s'appelle *directrice de l'ellipse* correspondante au foyer F.

Tous les points de l'ellipse jouissent de la propriété suivante par rapport au foyer et à la directrice correspondante.

Théorème. — *Le rapport des distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer et à la directrice est constant et égal à* $\frac{c}{a}$.

Soit A un point de l'ellipse, AP la perpendiculaire abaissée sur la directrice; il faut démontrer que $\frac{AF}{AP}$ est constant. Menons BP et BF, les deux triangles ABP et BFF' sont semblables; en effet : les angles en A et F' sont égaux comme

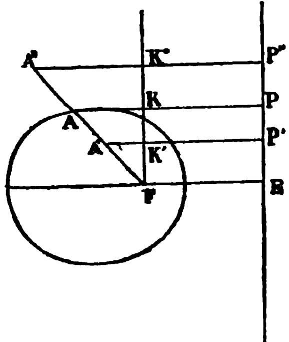
correspondants, et l'angle en P est égal à FBF' comme étant tous deux égaux à l'angle AFB; P = AFB comme ayant la même mesure dans la circonférence décrite sur AM comme diamètre et FBF' = AFB comme angles du triangle isoscèle ABF.

Les deux triangles sont donc semblables et on a : $\frac{AB}{AP} = \frac{FF'}{F'B} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, et comme AB = FA, $\frac{FA}{AP} = \frac{c}{a}$; c. q. f. d.

— Le rapport $\frac{c}{a}$ s'appelle *excentricité*.

Remarque. — Pour tout point A' intérieur à l'ellipse $\frac{A'F}{A'P'} < \frac{c}{a}$, pour tout point extérieur à l'ellipse A'', $\frac{A''F}{A''P''} > \frac{c}{a}$.

1° Je dis que $\frac{A'F}{A'P'} < \frac{AF}{AP}$, ou $\frac{A'F}{AF} < \frac{A'P'}{AP}$; car en menant FK'KK'' parallèle à la directrice $\frac{A'F}{AF} = \frac{A'K'}{AK}$, et il est évident que $\frac{A'K'}{AK} < \frac{A'P'}{AP}$.



2° $\frac{A''F}{A''P''} < \frac{AF}{AP}$, ou $\frac{A''F}{AF} < \frac{A''P''}{AP}$; car $\frac{A''F}{AF} = \frac{A''K''}{AK}$ et il est évident que $\frac{A''K''}{AK} > \frac{A''P''}{AP}$.

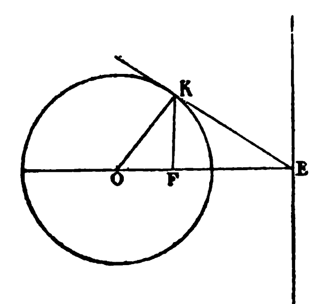
— On en déduit cette définition nouvelle de l'ellipse : *L'ellipse est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite est constant et plus petit que l'unité.*

— L'ellipse a une seconde directrice correspondante au

foyer F'. Elle est symétrique de la première par rapport au centre.

Construction des directrices :

Décrivons un cercle sur le grand axe comme diamètre, et menons la perpendiculaire à cet axe au foyer F. Elle coupe le cercle au point K et la tangente en K coupe l'axe au pied de la directrice; en effet $OE = \frac{OK^2}{OF} = \frac{a^2}{c}$.



Remarque. — On déduit facilement du premier problème, en remarquant que l'angle AFM est droit, le théorème suivant :

Théorème. — *Si d'un point* M *de la directrice d'une ellipse on mène des tangentes à la courbe, la ligne qui joint les points de contact passe par le foyer correspondant et est perpendiculaire à la ligne qui joint le foyer au point* M.

2° *Hyperbole.* — Tout ce que nous avons dit sur l'ellipse s'applique à l'hyperbole qui a deux directrices comprises entre le centre et les sommets, car $\frac{a^2}{c} < a$, puisque $a < c$. Et on peut définir l'hyperbole : *le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite est constant et plus grand que* 1.

L'excentricité $\frac{c}{a}$ est plus grande que l'unité.

3° *Parabole.* — On connaît la définition de la parabole, l'excentricité = 1.

— On peut donc donner des trois sections coniques la définition commune suivante :

Le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant est une ellipse, une parabole ou une

hyperbole, suivant que le rapport est plus petit que l'unité, égal à l'unité ou plus grand que l'unité.

Le point fixe est un foyer et la droite fixe la directrice correspondante.

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES

par **Georges Dostor**.

---

1. Prenons une progression arithmétique quelconque

$$\div\, a\,.\, b\,.\, c\,.\, d\ldots,$$

que nous supposerons croissante et à termes entiers; et soit r la raison de cette progression.

Cherchons s'il est possible d'y déterminer n termes consécutifs, dont la somme S soit égale à une puissance entière n^a du nombre n.

Si x est le premier de ces n termes, le dernier de ces termes sera $x + (n - 1)r$, et l'on aura

$$S = \frac{2x + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

pour la somme des n termes.

Nous devons ainsi avoir l'égalité

$$\frac{2x + (n - 1)r}{2} \cdot n = n^a,$$

d'où nous tirons

$$(1) \qquad x = n^{a-1} - \frac{(n - 1)}{2}r$$

pour la valeur du premier de nos n termes.

Deux cas sont à considérer, suivant que la raison r est un nombre pair ou un nombre impair.

2. Premier cas. Si la raison r est paire et égale à $2q$, le problème sera toujours possible; le premier de nos n termes sera

$$x = n^{a-1} - (n - 1)q,$$

et

$$y = n^{a-1} + (n - 1)q$$

sera le dernier de ces termes. La somme S des n termes aura pour valeur

$$S = \frac{n^{a-1} - (n-1)\,q + n^{a-1} + (n-1)\,q}{2} \,.\, n$$

$$= \frac{2n^{a-1} \,.\, n}{2} = n^{a}.$$

Nous en concluons que

Théorème I. — *Dans toute progression arithmétique à termes entiers, dont la raison est* paire, *on peut toujours trouver* n *termes consécutifs, dont la somme soit égale à une puissance entière donnée de* n *(le nombre entier* n *étant quelconque).*

Les termes extrêmes de cette suite de n termes seront

$$n^{a-1} - (n-1)\,\frac{r}{2} \text{ et } n^{a-1} + (n-1)\,\frac{r}{2},$$

où r désigne la raison paire de la progression.

3. Supposons que notre progression soit formée par la suite

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

des nombres impairs. Les termes extrêmes des n termes en question seront

$$n^{a-1} - n + 1 \text{ et } n^{a-1} + n - 1,$$

attendu que $r = 2$. Donc

Théorème II. — *Une puissance entière quelconque* n^a, *d'un nombre entier quelconque* n, *est toujours égale à la somme de* n *nombres impairs consécutifs.*

4. Nous voyons ainsi que le cube d'un nombre entier n, est égal à la somme des n nombres impairs consécutifs

$$n^2 - n + 1,\ n^2 - n + 3,\ n^2 - n + 5, \ldots\ n^2 + n - 1.$$

Si nous donnons à n successivement les valeurs entières

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots,$$

nous obtiendrons les égalités

$$1^3 = 1,$$
$$2^3 = 3 + 5,$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11,$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19, \text{ etc. Donc}$$

Théorème III. — *Si l'on prend la suite des nombres impairs* 1, 3, 5, 7, . . ., *et qu'on la sépare en groupes, dont le*

premier ait un terme, le second deux termes..., le n^{me} *groupe* n *termes ; la somme des termes d'un même groupe est égale au cube du nombre des termes que renferme ce groupe.*

5. Deuxième cas. Si la raison r est impaire, l'inspection de la valeur (1) fait voir que le problème ne sera possible que pour les valeurs impaires $2p+1$ de n. Le premier (1) de nos n termes sera alors

$$x = (2p+1)^{a-1} - pr,$$

et

$$y = (2p+1)^{a+1} + pr$$

sera le dernier de ces termes. On voit donc que

Théorème IV. — *Dans toute progression arithmétique dont la raison est impaire, on peut toujours trouver un nombre impair* n = 2p + 1 *de termes consécutifs, dont la somme soit égale à une puissance entière donnée de* n.

6. Si notre progression est formée par la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . .
nous aurons $r = 1$ et les termes extrêmes de notre groupe de $n = 2p + 1$ termes seront

$$(2p+1)^{a-1} - p \text{ et } (2p+1)^{a-1} + p.$$

Faisons $a = 2$ et donnons à p successivement les valeurs

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . ,

nous obtiendrons les développements

$$1^2 = 1,$$
$$3^2 = 2 + 3 + 4,$$
$$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7,$$
$$7^2 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10, \text{ etc.}$$

Si nous faisons $a = 3$, et que nous donnions à p les mêmes valeurs successives, nous trouverons que

$$1^3 = 1,$$
$$3^3 = 8 + 9 + 10,$$
$$5^3 = 23 + 24 + 25 + 26 + 27,$$
$$7^3 = 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52, \text{ etc.}$$

REMARQUE SUR LA NOTE PRÉCÉDENTE.

Nous croyons devoir compléter la note qui précède en signalant les résultats intéressants communiqués en 1855 par M. Wheatstone à la *Société Royale de Londres.*

Dans cette communication, l'auteur a démontré que l'on peut, par l'addition de n termes consécutifs d'une progression arithmétique, reproduire *de diverses façons* la même puissance a du nombre n. — Nous indiquerons simplement les résultats suivants :

1° Chaque carré n^2 pourra s'obtenir en faisant la somme des n premiers nombres impairs, résultat connu et signalé plus haut.

2° Chaque carré n^2 peut s'obtenir en faisant la somme de n termes d'une progression arithmétique commençant par $\frac{n+1}{2}$ et ayant pour raison l'unité. — On en déduit, comme il est démontré plus haut, que le carré de tout nombre impair est la somme d'autant de nombres entiers consécutifs qu'il y a d'unités dans sa racine.

3° Le cube de n s'obtient en faisant la somme de n termes d'une progression arithmétique commençant par l'unité et ayant pour raison $2(n+1)$.

4° Le cube de n s'obtient en faisant la somme de n termes d'une progression arithmétique commençant par n et ayant pour raison $2n$.

5° On obtient aussi le cube de n en faisant la somme de n premiers termes d'une progression arithmétique commençant par $n^2 - n + 1$ et ayant 2 pour raison.

6° On peut encore ajouter les n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{n^2+n}{2}$ et la raison n. Chacun des termes de cette progression est lui-même la somme de n termes d'une progression arithmétique.

7° On aura le cube de n en faisant la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est $(n-2)^2$ et la raison 8.

Pour les puissances supérieures à 3, nous nous bornerons à l'exemple suivant :

Toute puissance 4° est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est n^2, et la raison $2n^2$.

L'énoncé du 5ᵉ cas nous amène à démontrer simplement que : *La somme des cubes des* n *premiers nombres est égale au carré de la somme des* n *premiers nombres*. Car, si l'on prend la suite des nombres impairs

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. . . .

que l'on sépare le premier, les deux suivants, les trois qui viennent après, et ainsi de suite, le premier terme du n^e groupe en aura avant lui un nombre marqué par $n\frac{(n-1}{2}$; donc sa valeur sera $n_2 - n + 1$. Dans la somme des termes compris dans ce groupe sera n^3. Il en résulte que la somme des n premiers groupes sera la somme des termes de la progression $\div$ 1, 3, 5, 7, ... $(n^2 + n - 1)$.

Mais on sait que la somme des p premiers nombres impairs est égale au carré de p, et comme le nombre des termes sera égal à la somme des nombres naturels de 1 à n, d'après la manière dont est formé chaque groupe, on voit bien que la somme des n premiers cubes est égale au carré de la somme des n premiers nombres.

A. M.

NOTE SUR UN PROBLÈME CLASSIQUE

Par **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École polytechnique.

Dans presque tous les traités de géométrie que les élèves ont entre les mains, se trouve comme application des théorèmes du *troisième livre* le problème suivant :

Construire une circonférence passant par deux points donnés A *et* B *et tangente à une droite donnée.*

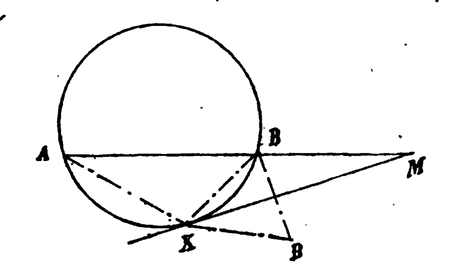
Je crois qu'on n'a pas remarqué la solution que je vais indiquer ici et qui n'exige que l'emploi de théorèmes du second livre. Supposons le problème résolu :

Soit X le point de contact; soit M le point d'intersection de AB avec la tangente donnée; soit B' le symétrique de B par rapport à MX, menons AX, BX, B'X.

On a :

AXB' = AXM + MXB'

= AXM + MXB = AXM + XAM = 180 — XMA.



Le point X s'obtiendra donc en décrivant sur AB' un segment capable de 180 — XMA.

Cette construction s'est présentée comme cas particulier du problème suivant :

Construire une circonférence passant par deux points A et B et coupant une droite donnée MX sous un angle donné ω. Nous indiquerons seulement la construction à effectuer, laissant aux élèves le soin de la démonstration : soit B' le symétrique de B par rapport à MX. Appelons X un des points d'intersection de la circonférence cherchée avec la droite MX;

On décrit sur AB' *un segment capable de la différence entre* ω *et l'angle que la droite* AB *fait avec* MX*; ce segment capable coupe la droite* MX *au point* X.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

La circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier inscrit ou d'un polygone régulier circonscrit dont on double indéfiniment le nombre de côtés.

Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que, si je prends deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit à la même circonférence, cette courbe est comprise entre les périmètres de ces deux polygones. De plus, lorsque l'on double indéfiniment le nombre des côtés, le périmètre du polygone inscrit va en augmentant, tandis que le périmètre du polygone circonscrit va en diminuant.

Cela posé, je dis que les périmètres de ces deux polygones semblables ont un rapport qui tend vers l'unité, et par suite, puisqu'ils comprennent entre eux la circonférence, ils tendent l'un et l'autre vers cette courbe.

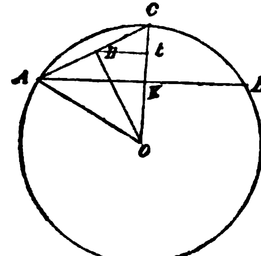
En effet, en appelant R et r le rayon et l'apothème du polygone régulier inscrit, P et p les périmètres des deux polygones semblables, l'un circonscrit, l'autre inscrit, on a

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

Soient P', p' les nouveaux périmètres, r' le nouvel apothème, on a encore $\frac{P'}{p'} = \frac{R}{r'}$.

Je dis que la différence $R - r'$ est moindre que $R - r$, et qu'elle tend vers zéro lorsque l'on double indéfiniment le nombre des côtés.

Pour le prouver, considérons le côté AB du polygone régulier de n côté inscrits, le côté AD du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés. L'arc AC étant plus petit que l'arc AB, la corde AC est plus petite que la corde AB, et par suite l'apothème OH est plus grand que OK. Je dis en outre qu'il a pour limite le rayon. Pour le prouver, menons HL perpendiculaire sur OC; on a, dans le triangle rectangle OHC :



$$OH^2 = OL \cdot OC = R \times \left(\frac{R + r}{2}\right).$$

Donc $R^2 - r'^2 = R^2 - R\left(\frac{R+r}{2}\right) = \left(\frac{R-r}{2}\right) R.$

Par suite

$$R - r' = \frac{R}{R + r'} \cdot \frac{R - r}{2}, \text{ ou } R - r' < \frac{R - r}{2}.$$

On aurait de même

$$R - r'' < \frac{R - r'}{2} < \frac{R - r}{4}.$$

Et, après n opérations

$$R - r_n < \frac{R - r}{2^n}.$$

Or, le second membre tend vers zéro. Il en est donc de même du premier, et par suite, à la limite

$$R = r_n; \text{ donc } P_n = p_n.$$

Le théorème est donc démontré. A. M.

CONCOURS GÉNÉRAUX

CONCOURS DE 1861

Classe de troisième (sciences).

— Construire un triangle semblable à un triangle donné, et dont les trois sommets soient situés respectivement sur trois droites données.

— Les côtés d'un triangle sont : $a = 32^m$, $b = 28^m$, $c = 22^m$.

Calculer à un millimètre près les distances des trois sommets au point de rencontre des droites qui joignent les sommets au milieu des côtés opposés.

Classe de seconde (sciences).

— Deux circonférences égales se coupent en deux points A et B. Par le point A, on mène une sécante APQ qui coupe les deux circonférences en P et Q. On propose d'évaluer la surface BPQ comprise entre les deux arcs BP, BQ et la droite PQ, et de démontrer que cette surface est proportionnelle au carré de PQ.

— Simplifier $$\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}.$$

Classe de rhétorique (sciences).

— Résoudre

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Classe de logique (lettres).

— Trouver dans le plan d'un triangle un point tel que la somme des carrés des distances de ce point aux trois sommets soit la plus petite possible.

Classe de logique (sciences).

— Étant donnés deux points fixes A et B, on trace une droite OP faisant avec AB un angle φ quelconque; on trace une droite OP' perpendiculaire à OP, et on prend sur OP et OP' deux points M et M' tels que chacune des sommes MA + MB, M'A + M'B soit égale à une longueur donnée $2a$; puis

on achève le rectangle OMM'N. On demande à quelle valeur de l'angle φ répondent le maximum et le minimum de l'aire du rectangle. (Le point O est le milieu de AB.)

— Dans un parallélipipède circonscrit à une sphère, chacune des arêtes est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.

CONCOURS DE 1862

Classe de troisième (sciences).

— Soient AB une droite fixe, et O un point fixe en dehors de cette droite. Par O, on mène une sécante quelconque OM, et sur cette sécante on élève au point O la perpendiculaire ON. On prend sur OM un point P tel que $OM \,.\, OP = n^2$, et sur ON un point Q tel que $OQ \,.\, ON = n^2$. Démontrer que la droite PQ passe par un point fixe lorsque OM, et par suite ON, se déplacent.

Classe de seconde (sciences).

— Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces ASB, ASC, BSC, prises comme bases, trois prismes triangulaires, de hauteur arbitraire, dont les bases supérieures se rencontrent en un point O, et sur la quatrième face ABC, on construit un nouveau prisme triangulaire dont les arêtes latérales sont égales et parallèles à la droite qui joint le sommet S au point O. On demande de démontrer que le quatrième prisme sera équivalent à la somme des trois premiers.

Classe de rhétorique (sciences).

— Un point matériel M se meut d'un mouvement uniforme sur une circonférence donnée. Un autre point matériel M' se meut sur un diamètre de cette circonférence de manière à coïncider toujours avec la projection de M. On demande d'étudier : 1° les variations de la force qui sollicite M' pendant son oscillation ; 2° la loi du mouvement.

— Un point matériel P, sans vitesse initiale, est sollicité par deux forces attractives dirigées vers deux centres fixes A et A'. Ces forces attractives varient proportionnellement aux distances MA, MA' du point mobile aux centres ; de plus, elles prennent des valeurs g et g' quand les distances MA, MA' sont égales à l'unité ; on demande la trajection du mobile et la loi du mouvement.

— Résoudre un triangle rectiligne connaissant l'angle C et les sommes $a + c$, $b + c$ formées en ajoutant successivement le côté c opposé à l'angle C à chacun des deux autres. — On discutera le problème. — Les formules doivent être calculables par logarithmes.

— On suppose que la Terre et Vénus se meuvent circulairement dans le même plan, celui de l'écliptique, et que leurs moyens mouvements en un jour solaire moyen sont respectivement 3548″,193 et 5767″,668. Le temps est évalué en jours moyens et compté à partir d'une conjonction inférieure de Vénus. On demande : 1° de calculer l'élongation de Vénus et sa longitude géocentrique à une époque quelconque; 2° de déterminer l'époque à laquelle l'élongation aura une valeur donnée ; 3° de calculer le maximum de l'élongation.

Classe de logique .(lettres).

— La hauteur d'un cône est $1^m,50$. Quel doit être le rayon de sa base pour que son volume soit équivalent à celui d'une sphère de $1^m,40$ de diamètre.

Classe de logique (sciences).

— Étant données les quatre hauteurs d'un tétraèdre et les distances d'un point à trois des faces, déterminer la distance de ce point à la quatrième face.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE RENNES

Session d'avril 1878.

— Dans un solide formé de deux cônes égaux, appliqués l'un contre l'autre par leurs bases, on propose d'inscrire le cylindre dont la surface totale soit maxima.

— Résoudre l'équation

$$\operatorname{tg}(x + a) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - \frac{1}{3}}.$$

— Étant donnés deux points A et B, et un parallèle XY à la ligne qui les joint, trouver sur cette ligne un point M pour lequel le rapport des distances MA et MB aux deux points fixes, soit minimum.

Session de juillet 1878.

— Déterminer p et p' de manière que la fraction

$$\frac{x^2 + px - 3}{x^2 + p'x + 5}$$

devienne maximum ou minimum pour les valeurs $x = 2$ et $x = 3$.

— La déclinaison du soleil étant supposée égale à d, calculer la durée du jour en un lieu dont la latitude est l.

— Si α, β, γ sont trois nombres distincts satisfaisant aux relations

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0,$$
$$\beta^3 + p\beta + q = 0,$$
$$\gamma^3 + p\gamma + q = 0,$$

prouver que l'on doit avoir

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

— Parmi tous les troncs de cône droits à bases circulaires, de même hauteur et de même volume, quel est celui auquel on peut circonscrire la sphère minima?

— Trouver la relation qui doit exister entre les trois longueurs des côtés

d'un trapèze isoscèle pour que le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des quatre côtés soit un carré.

— Etablir la formule au moyen de laquelle on peut trouver tg a en fonction de tg $3a$. Déterminer tg a dans les trois cas suivants :

$$\text{tg } 3a = 0;\ \text{tg } 3a = \infty;\ \text{tg } 3a = -1.$$

— Trouver les conditions pour que les deux équations

$$a \sin x + b \cos x = c,$$
$$a' \text{ tg } x + b' \text{ cotg } x = c',$$

soient vérifiées par une même valeur de l'arc x.

— Trouver les relations qui lient les racines de l'équation

$$x^2 - 2x\sqrt{p^2 - 2q} + p^2 - 2q = 0 \qquad (1)$$

à celle de

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (2)$$

Supposons qu'on construise un rectangle ayant pour côtés les deux racines de l'équation (2). Indiquer les lignes qui représentent les racines de l'équation (1).

— En faisant tourner un triangle rectangle autour de ses trois côtés, les volumes qu'on obtient sont entre eux comme les nombres 20, 15 et 12. — Trouver la forme du triangle.

— Entre tous les trapèzes qui ont deux sommets en A et B, leurs bases perpendiculaires à une droite donnée XY et le point de concours C des diagonales sur cette droite, quels sont ceux qui ont la plus grande ou la plus petite surface? Données AB = a, Aa = h, Bb = k.

Session de novembre 1878.

— On donne une circonférence de rayon R, et un de ses diamètres AB. A quelle distance du centre faut-il mener la perpendiculaire PM à ce [illegible]tre pour que la corde AM soit égale à la tangente MC, terminée au [illegible]tre prolongé?

— Résoudre les équations

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{c};\quad \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a-y} = \frac{2}{a-b}.$$

— Dans le triangle ABC, on donne l'angle A, la médiane AD et la surface, calculer les côtés AB et AC. Discussion. Construction géométrique.

— Calculer les angles d'un triangle, sachant que les hauteurs sont entre elles comme les nombres 2, 3, 4.

— Quelle valeur faut-il donner à q dans l'équation $x^2 - 2x + q = 0$ pour que l'une des racines soit égale au carré de l'autre.

— En supposant la terre sphérique, expliquer comment varie la vitesse absolue de rotation d'un point de sa surface, à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur. Dire, par exemple, quelle est la vitesse d'un point de l'équateur et celle d'un point à la latitude de 45° (La circonférence de la terre est connue, par définition).

— Maximum et minimum de la fraction

$$\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 5x - 2}.$$

Années précédentes.

— Trouver sur la droite AB, de longueur donnée a, deux points C et D tels que leur distance CD soit moyenne proportionnelle entre AC et DB, et [illegible]s en outre 1° que cette distance soit donnée; 2° qu'elle soit un minimum.

— Une ligne pesante AB de longueur a est formée de deux parties homogènes AC et CB de densité d et d'. Quelle doit être la longueur AC pour que cette ligne se trouve en équilibre sur un couteau D placé à une distance AD $= b$ du point A. — Discussion.

— Calculer à un centimètre cube près le volume régulier inscrit dans une sphère de $2^m, 75$ de rayon.

ACADÉMIE DE BESANÇON

Session d'avril 1878.

— Trouver les côtés d'un trapèze isoscèle connaissant la hauteur, le périmètre et la surface.

Session de juillet 1878.

— Résoudre un triangle connaissant la somme de deux côtés, leur produit et leur surface. Application :

$$S = 18935{,}07;$$
$$ab = 271744;$$
$$a + b = 1045{,}7.$$

— Indiquer d'une façon générale quelle est la nature des questions de maximum ou de minimum qui peuvent être résolues au moyen de l'équation du second degré.

— Par le point A extérieur à une circonférence de rayon R, on mène la tangente AC, et le diamètre AMON qui rencontre la circonférence en M et N. Du point C, on mène le rayon CO et la perpendiculaire CD au diamètre MN. On fait tourner la figure autour du diamètre. Déterminer OA de telle façon que l'on ait

$$\text{Vol. OCA} = \text{vol. DCN} - \text{vol. DCM}.$$

— Construire et calculer l'angle de deux plans, l'un perpendiculaire au plan horizontal, l'autre perpendiculaire au plan vertical.

— Étant données deux circonférences concentriques de rayon a, b et un point A extérieur tel que OA $= d$, mener par ce point une sécante ABC, telle que la portion BC comprise entre les deux circonférences soit égale à c. On calculera les angles COB et CAO.

Application : $a = 12{,}7$; $b = 19{,}3$; $c = 10{,}5$; $d = 52{,}4$.

— Trouver les côtés d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle droit et la hauteur.

— Inscrire dans un cercle un triangle isoscèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE PARIS 1878

Solution par M. Gélinet, du Lycée d'Orléans (*copie couronnée*).

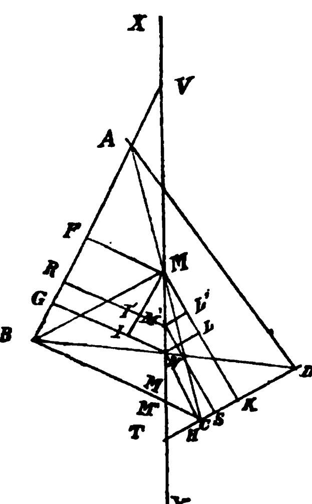
Dans un quadrilatère convexe ABCD *on trace la droite qui joint les milieux des diagonales, on prend un point* M *quelconque sur cette droite dans l'intérieur du quadrilatère, et on joint ce point aux quatre sommmets* A, B, C *et* D.

1° Démontrer que la somme des deux triangles MAB, MCD *qui ont pour sommet commun le point* M *et pour bases deux côtés opposés* AB, CD *du quadrilatère est équivalente à la moitié du quadrilatère.*

2° Comment faudrait-il modifier l'énoncé du théorème, si le point M *était extérieur au quadrilatère tout en restant sur la ligne qui joint les milieux des diagonales?*

3° Faire voir que les points de cette ligne sont les seuls qui jouissent des propriétés précédentes.

4° Déduire de ces théorèmes que dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle le centre du cercle et les milieux des diagonales sont trois points en ligne droite.



I° Supposons le point M milieu de l'une des diagonales; la médiane BM divise le triangle ABC en deux triangles équivalents, donc

$$\text{MAB} = \text{MBC};$$

de même

$$\text{MCD} = \text{MAD};$$

d'où

$$\text{MAB} + \text{MCD} = \text{MBC} + \text{MAD}.$$

Soit M' un point situé sur la droite xy qui joint les milieux des diagonales. Abaissons des points M, M', N des perpendiculaires aux côtés AB, CD. Soient MI et NL perpendiculaires

à NG et à MK; ces droites rencontrent les perpendiculaires M'R et MK en I' et L' et la similitude des triangles des quadrilatères MI'M'L' et MINL donne :

$$\frac{MI'}{ML'} \text{ ou } \frac{M'R - MF}{MK - M'S} = \frac{NI}{ML}. \qquad (1)$$

Mais de l'identité

$$AB . MF + CD . MK = AB . NG + CD . NH$$

on tire $\quad AB (NG - MF) = CD (MK - NH);$

d'où $$\frac{CD}{AB} = \frac{NG - MF}{MK - NH} \text{ ou } \frac{NI}{ML}. \qquad (2)$$

En comparant les égalités (1) et (2) on a :

$$\frac{M'R - MF}{MK - M'S} = \frac{CD}{AB}.$$

Conséquemment

$$AB . M'R + CD . M'S = AB . MF + OD. MK$$
$$= \frac{S.ABCD}{2} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

II° Soit M' un point extérieur au quadrilatère et situé entre les points d'intersection V, T, de xy avec AB et CD. Les distances de ce point aux côtés AB, CD et AD sont de même sens que celles du point M aux mêmes côtés, et sa distance au côté BC est de sens contraire à celle du point M à ce même côté. En convenant de regarder comme positives les perpendiculaires menées dans le même sens et comme négatives les perpendiculaires menées dans des sens contraires, on voit que la première partie de l'énoncé est vraie pour tout point extérieur au quadrilatère, considéré comme sommet des triangles dont les bases seraient AB et CD et pris sur la portion de ligne VT. Au contraire, c'est la différence des triangles qui est constante quand ces triangles ont pour bases AD et BC. Cette dernière proposition est vraie pour tout point de xy pris au delà des points V et T, considéré comme sommet de triangles dont les bases seraient deux côtés opposés quelconques.

En particulier, si l'on joint un point quelconque pris à l'intérieur d'un parallélogramme aux quatre sommets, la somme de deux triangles qui ont pour bases deux côtés

opposés est équivalente à la moitié du parallélogramme; si le point est extérieur, c'est la différence qui est constante.

III° Tout point M pris en dehors de la ligne xy ne jouit pas des propriétés énoncées. En effet, si de ce point on abaisse des perpendiculaires aux côtés AB et CD en limitant ces perpendiculaires à leurs points d'intersection avec les droites MI et ML, le quadrilatère ainsi formé n'est pas semblable au quadrilatère MINL. Il ne peut donc pas se décomposer en triangles semblables à ceux du premier et par suite une proportion analogue à la proportion (1) ne peut être établie.

IV° Dans tout quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres. En joignant les sommets au centre du cercle on forme quatre triangles dont le rayon R du cercle est la hauteur commune. L'égalité

$$(AB + CD)\frac{R}{2} = (AC + AD)\frac{R}{2}$$

prouve d'après ce qui précède que le centre du cercle est situé sur la droite qui joint les milieux des diagonales.

QUESTIONS PROPOSÉES

141. — Étant donné un triangle ABC inscrit dans un cercle, par les points B et C on fait passer un cercle qui coupe AC en E et AB en D; puis par les points D, A, E, on mène un cercle qui coupe en F le cercle circonscrit au triangle ABC. Démontrer la relation

$$\frac{FE + FB}{FC + FD} = \frac{AB}{AC}.$$

142. — Par le sommet d'un triangle équilatéral on mène une ligne PQ terminée à deux droites perpendiculaires à la base et passant par ses extrémités. Sur PQ comme côtés on décrit deux triangles équilatéraux. Démontrer que les

sommets libres se meuvent sur la base et sur une droite fixe parallèle à la base.

143. — Par un point fixe, on mène une droite coupant deux parallèles données en P et A. Par les points P et Q on mène des droites respectivement parallèles à des droites données et se coupant en R. Prouver que le lieu de R est une ligne droite.

144. — Si l'on divise la base BC d'un triangle en trois parties égales aux points Q et R, démontrer les égalités suivantes :

$$\sin BAR \,.\, \sin CAQ = 4 \sin BAQ \,.\, \sin CAR.$$

$$(\operatorname{cotg} BAQ + \operatorname{cotg} QAR)(\operatorname{cotg} CAR + \operatorname{cotg} RAQ) = 4 \operatorname{cos\acute{e}c}^2 QAR.$$

145. — On donne un point sur chacun des côtés d'un angle. Construire deux circonférences égales tangentes entre elles et touchant chacune un des côtés de l'angle au point donné.

Avis. — Il reste à résoudre les questions 135, 136, 137, 138 et 140, énoncées dans la seconde année. — Toutes les autres questions sont publiées, ou bien la rédaction en a des solutions qui paraîtront prochainement.

A ce sujet, nous rappelons à nos lecteurs que les solutions doivent être séparées pour chaque question, avec une figure à part si c'est nécessaire, et que, de plus, il est indispensable de mettre sur chaque question, très-lisiblement, le nom de l'auteur de la solution, ainsi que le nom de l'établissement auquel il appartient. Sans ces précautions, il nous serait impossible de classer les solutions, et aussi de répondre, si c'est utile, à l'auteur de l'envoi.

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 22226-8.

NOTE SUR LA PARABOLE

Par **Maurice d'Ocagne.**

I. — Nous allons étendre à la parabole les propriétés énoncées pour l'ellipse dans la question n° 106,* et dans une note publiée par nous dans ce journal.**

Si l'on considère une ellipse et l'un de ses cercles directeurs et que l'on fasse tendre le foyer, centre de ce cercle directeur, vers l'infini, l'autre foyer et le sommet voisin restant fixes, la limite de l'ellipse est une parabole dont le foyer est celui des foyers de l'ellipse qui reste fixe; la limite du cercle directeur est une droite perpendiculaire au grand axe et qui est la directrice de la parabole, limite de l'ellipse.

Nous pourrons donc, en envisageant la parabole de cette manière, appliquer à cette courbe la propriété démontrée pour l'ellipse dans la question n° 106 et nous énoncerons le théorème suivant :

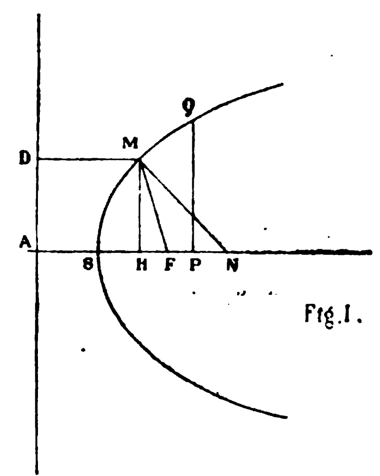


Fig. I.

Théorème. — *Si à partir du sommet d'une parabole on porte sur l'axe et dans la direction du foyer une longueur égale au rayon vecteur d'un point de cette courbe et que l'on élève l'ordonnée du point ainsi déterminé sur l'axe, cette ordonnée est égale à la normale du point de la parabole considérée, limitée à l'axe.*

Il est intéressant de donner une démonstration directe de ce théorème.

Considérons un point M d'une parabole et la normale

* T. II, p. 254.
** T. II, p. 363.

MN en ce point (*fig.* I). Portons sur l'axe la longueur SP égale à MF et menons l'ordonnée PQ. Je dis que PQ = MN.

En effet, du point M abaissons l'ordonnée MH et la perpendiculaire MD à la directrice.

Représentant par p le paramètre, nous avons

$$\overline{PQ}^2 = 2p\,SP$$

Mais $\quad SP = MF = MD = AH = \frac{p}{2} + SH.$

Donc $\quad \overline{PQ}^2 = 2p\left(\frac{p}{2} + SH\right) \qquad (1)$

D'autre part $\quad \overline{MN}^2 = \overline{NH}^2 + \overline{MH}^2$

Or la sous-normale étant constante et égale au paramètre, on a $\quad \overline{NH}^2 = p^2.$

De plus $\quad \overline{MH}^2 = 2p\,.\,SH,$

Par suite $\quad \overline{MN}^2 = p^2 + 2p\,SH$

ou $\quad \overline{MN}^2 = 2p\left(\frac{p}{2} + SH\right). \qquad (2)$

Comparant (1) et (2) on voit que

$$PQ = MN \qquad \text{c. q. f. d.}$$

II. — Ce théorème fournit une manière de mener la tangente à la parabole en un point pris sur cette courbe : après avoir fait la construction indiquée dans l'énoncé, ce qui donne la longueur de la normale, du point M comme centre avec cette longueur pour rayon on décrit un arc de cercle qui coupe l'axe en un point N ; on tire MN et on élève en M une perpendiculaire à cette droite ; on a ainsi la tangente cherchée.

III. — Appliquons maintenant à la parabole, considérée comme limite d'une ellipse, la construction de la tangente, que nous avons indiquée pour cette dernière courbe, dans une note citée plus haut.

Nous allons d'abord appliquer strictement la règle, quitte ensuite à la simplifier; nous arriverons du reste, en opérant ainsi, à une propriété connue de la parabole.

Soit à mener la tangente en un point M d'une parabole

considérée comme une ellipse dont un des foyers est à l'infini (*fig.* II); d'après notre règle, nous abaissons l'ordonnée MH de M; par le centre de l'ellipse nous menons une droite quelconque; comme, dans ce cas, le centre est à l'infini, cela revient à mener à l'axe une parallèle quelconque XY; il faut porter sur cette ligne à partir du centre une longueur égale au demi grand axe, c'est-à-dire du centre de l'ellipse avec un rayon égal au demi grand axe décrire un arc de cercle et prendre son intersection avec XY; mais le centre étant à l'infini, cet arc de cercle se réduit à la perpendiculaire SP menée en S à l'axe; il faut maintenant joindre HP, mener par S une parallèle SN à cette droite et rabattre sur l'axe la distance de N au centre de la courbe; par les mêmes considérations que précédemment on voit que ce rabattement s'effectue en abaissant du point N la perpendiculaire NT sur l'axe; on n'a plus alors qu'à joindre MT.

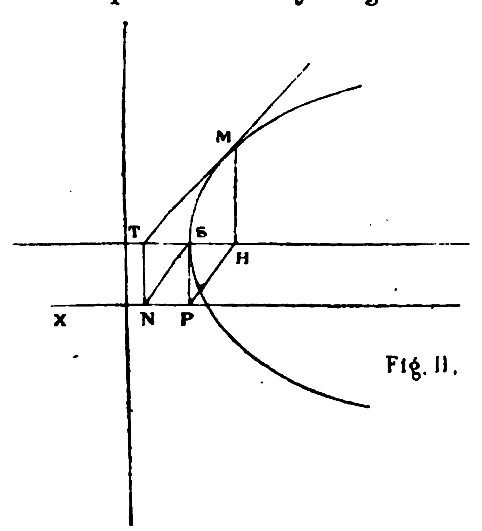


Fig. II.

Mais les triangles rectangles HSP et STN sont égaux, car HP = SN et PS = NT comme parallèles comprises entre parallèles. Par suite, HS = ST et on est ainsi amené à ce théorème connu :

Dans la parabole, la sous-tangente est divisée en deux parties égales par le sommet de la courbe.

Dès lors, la construction de la tangente devient très-simple : on abaisse l'ordonnée MH du point M; on porte sur l'axe, à partir du sommet et en dehors de la courbe, une longueur ST = SH, et on joint MT.

IV. — Nous allons alors, en nous basant sur cette construction de la tangente, traiter pour la parabole la question analogue à celle que nous avons résolue pour l'ellipse dans une note précédente :

Étant donnés l'axe, le sommet et un point d'une parabole, construire cette courbe (fig. III).

Je mène la tangente MT au point M par la méthode indiquée plus haut. J'élève en M la perpendiculaire MN à cette droite; j'ai ainsi la normale en M. MN est bissectrice de l'angle que font le rayon vecteur de M et la parallèle menée par ce point à l'axe, c'est-à-dire la ligne qui joint M au foyer placé à l'infini. Je trace donc cette droite ME; si je mène alors MF de telle façon que NMF = NME, je détermine sur l'axe le point F, foyer de la parabole. Pour avoir la directrice je prends SA = SF et j'élève au point A la perpendiculaire à l'axe.

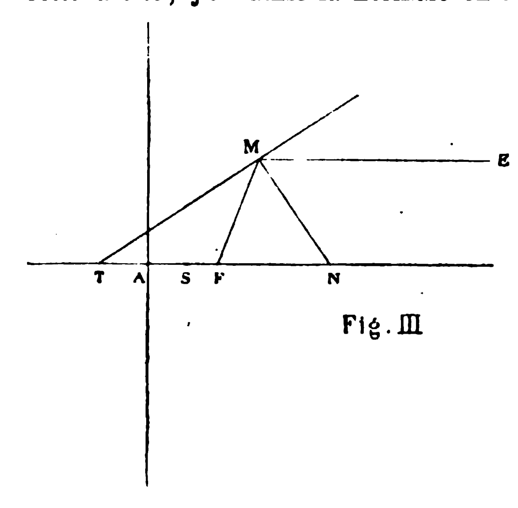


Fig. III

Il est alors facile de construire la courbe.

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE

Par **A. Morel.**

Dans les applications réelles de la trigonométrie, les données ne sont évaluées qu'avec une certaine approximation. Il en résulte pour les lignes trigonométriques des angles, puis pour les éléments inconnus, des erreurs qu'il

est intéressant de calculer. C'est ce que nous allons faire dans cette note, que nous diviserons en deux parties : variation des lignes trigonométriques et variation des éléments inconnus du triangle.

1. *Trouver l'accroissement du sinus ou du cosinus d'un angle correspondant à un accroissement déterminé de cet angle.*

Soit un angle x que nous augmenterons d'une certaine quantité que nous désignerons par δx; appelons $\delta \sin x$ et $\delta \cos x$ les accroissements correspondants du sinus et du cosinus; on aura d'après ces définitions

$$\delta \sin x = \sin (x + \delta x) - \sin x,$$
$$\delta \cos x = \cos (x + \delta x) - \cos x;$$

par des formules connues, on trouve

$$\delta \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{1}{2} \delta x\right) \sin \frac{1}{2} \delta x; \qquad (1)$$

$$\delta \cos x = - 2 \sin \left(x + \frac{1}{2} \delta x\right) \sin \frac{1}{2} \delta x. \qquad (2)$$

On considère ici la différence comme un accroissement, et par suite on lui donne le signe algébrique positif; mais elle peut être par elle-même négative. Par exemple, $\delta \sin x$ est positif si x est inférieur à 90°, et négatif quand x est compris entre 90° et 270°.

2. *Trouver l'accroissement de la tangente et de la cotangente.*

En employant les mêmes notations que précédemment, on a

$$\delta \operatorname{tang} x = \operatorname{tang} (x + \delta x) - \operatorname{tg} x,$$
$$\delta \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} (x + \delta x) - \operatorname{cotg} x,$$

et, d'après des formules que l'on donne dans tous les cours,

$$\delta \operatorname{tang} x = \frac{\sin \delta x}{\cos x \cos (x + \delta x)}, \qquad (3)$$

$$\delta \operatorname{cotg} x = \frac{- \sin \delta x}{\sin x \sin (x + \delta x)}. \qquad (4)$$

3. *Trouver l'accroissement de la sécante et de la cosécante.*

On a

$$\delta \operatorname{séc} x = \operatorname{séc} (x + \delta x) - \operatorname{séc} x,$$
$$\delta \operatorname{coséc} x = \operatorname{coséc} (x + \delta x) - \operatorname{coséc} x.$$

Et d'après les valeurs de ces lignes en fonction du sinus et du cosinus,

$$\delta \text{ séc } x = \frac{2 \sin\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right) \sin \frac{1}{2}\delta x}{\cos(x+\delta x)\cos x}; \quad (5)$$

$$\delta \text{ coséc } x = \frac{-2\cos\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)\sin\frac{1}{2}\delta x}{\sin(x+\delta x)\sin x}. \quad (6)$$

4. ***Trouver l'accroissement des carrés des fonctions trigonométriques correspondant à un accroissement donné de l'angle.***

On trouverait immédiatement par un procédé identique au précédent

$$\delta \sin^2 x = -\delta \cos^2 x = \sin(2x+\delta x)\sin \delta x, \quad (7)$$

$$\delta \text{ tang}^2 x = \frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}, \quad (8)$$

$$\delta \text{ cotg}^2 x = \frac{-\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\sin^2(x+\delta x)\sin^2 x}. \quad (9)$$

Comme on a

$$\text{séc}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x, \quad \text{coséc}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x,$$

on en déduit

$$\delta \text{ séc}^2 x = \delta \text{ tg}^2 x; \quad \delta \text{ coséc}^2 x = \delta \text{ cotg}^2 x.$$

Si, dans un triangle, on suppose que l'un des éléments nécessaires pour déterminer le triangle est affecté d'une certaine erreur, les quantités inconnues sont affectées aussi d'une erreur; nous allons nous proposer le problème général suivant :

Trouver l'erreur que l'on commet sur les éléments inconnus d'un triangle, lorsque l'un des éléments donnés est affecté d'une erreur déterminée, les deux autres éléments donnés étant exacts.

Nous étudierons successivement les trois cas élémentaires en laissant de côté le cas douteux, qui ne sert pas dans la pratique. Il va sans dire que si deux éléments donnés étaient inexacts, on commencerait par déterminer l'inexactitude résultant de l'erreur de l'un d'eux, puis on partirait de ce premier calcul pour déterminer l'erreur provenant du second élément.

1er CAS. *On donne deux angles et le côté adjacent.*

Nous laisserons immédiatement de côté le cas où l'on commet une erreur seulement sur le côté donné, car on sait que dans ce cas on aurait

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = \frac{\delta c}{c}.$$

Nous supposerons donc que l'on commet une certaine erreur sur l'un des angles; soient A et c les deux constantes, B l'angle sur lequel on commet une erreur δB. Le triangle réel a pour éléments A, B, C, a, b, c; le second a pour éléments A, c, B + δB, C + δC, $a + \delta a$, $b + \delta b$.

Comme on sait que la somme des angles reste constante, il en résulte d'abord $\delta B + \delta C = o$; (10)

on a aussi

$a = c \sin A \operatorname{coséc} C$; $a + \delta a = c \sin A \operatorname{coséc} (C + \delta c)$.

Donc on a, en vertu de l'équation (6)

$$\frac{\delta a}{2} = - \frac{c \sin A}{\sin C} \frac{\cos\left(C + \frac{1}{2}\delta C\right)\sin\frac{1}{2}\delta C}{\sin (C + \delta C)}. \quad (11)$$

Donc l'erreur commise est donnée par la relation

$$\frac{\frac{1}{2}\delta a}{\sin\frac{1}{2}\delta B} = a \frac{\cos\left(C + \frac{1}{2}\delta C\right)}{\sin (C + \delta C)}. \quad (12)$$

On voit qu'elle est de même signe que δB.

On a aussi, de l'égalité

$$c \sin B = b \sin C,$$

que l'on peut écrire

$$c \sin (A + C) = b \sin C,$$

la relation $\operatorname{tg} C = \dfrac{c \sin A}{b - c \cos A}$;

d'où $b - c \cos A = c \sin A \operatorname{cotg} C$,

puis $b + \delta b - c \cos A = c \sin A \operatorname{cotg} (c + \delta c)$.

D'où l'on tire, d'après la formule (4)

$$\delta b = - \frac{c \sin A}{\sin C} \cdot \frac{\sin \delta C}{\sin (C + \delta C)}; \quad (13)$$

donc $$\frac{\delta b}{\sin \delta B} = \frac{a}{\sin (C + \delta C)}. \quad (14)$$

Application numérique.

Soit un triangle dans lequel on a
$C = 234^m,61$; $A = 57^\circ 28'$; $B = 46^\circ 51'$, et supposons que l'on ait commis sur l'angle B une erreur en moins de 10 minutes.

Calculons d'abord en supposant les données exactes.

Nous avons $C = 75^\circ 41'$.

Puis les formules $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
nous donnent, pour les éléments du triangle,

$$b = 176^m,65,$$
$$a = 204^m,13.$$

Maintenant nous avons, puisque δB (la quantité que nous devons ajouter) est égal à + 10 minutes,

$$C + \frac{1}{2}\delta C = 75^\circ 36',$$
$$C + \delta C = 75^\circ 31';$$

car $\delta C = -10'$.

La formule (12) nous donne

$$\frac{1}{2}\delta a = 0^m,076,$$
$$\delta a = 0^m,153.$$

La formule (14) nous donne

$$\delta b = 0^m,628.$$

Donc, en nous tenant au centimètre, nous aurons, pour les valeurs des côtés inconnus,

$$b = 176^m,81; \quad a = 204^m,76.$$

2e CAS. *On donne deux côtés et l'angle compris.*

Supposons d'abord que l'erreur est commise sur l'un des côtés; nous aurons comme données exactes c et A; nous supposerons commise une erreur δb sur b.

Nous aurons alors toujours

$$C + B = 180^\circ - A.$$

Puis, on a les relations

$$\frac{c - b}{c + b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C - B)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A};$$

$$\frac{c - b - \delta b}{c + b + \delta b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C - B + 2\delta C)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A}.$$

On déterminera donc, en comparant ces deux formules, la valeur de δC, et par suite on pourra continuer le calcul comme précédemment, puisque nous aurons toujours la relation $$\delta B + \delta C = 0,$$
et que nous serons ramenés au cas précédent. Nous déterminerons donc a au moyen de la formule (12).

Application numérique.

Supposons $c = 340^m,16$; $A = 68^\circ\ 17$; $b = 531^m,18$ avec une erreur par défaut de $0^m,05$.

Un premier calcul nous donne

$$B = 73^\circ\ 46',4,$$
$$C = 37^\circ\ 56',6,$$
$$a = 513^m,94.$$

Il faudra, pour obtenir la valeur exacte, augmenter b de $0^m 05$; nous obtiendrons alors pour l'accroissement de l'angle B $$\delta B = 0'2.$$

On voit qu'il n'en résulte pas pour la valeur de a une différence de un centimètre.

En second lieu supposons que b et c soient constants, et que A subisse un accroissement δA. Alors, on a les formules $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$(a + \delta a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos (A + \delta A),$$
d'où l'on tire par soustraction, en vertu de l'équation (2),

$$\left(\frac{1}{2}\,\delta a\right)^2 + \frac{1}{2}\,a\delta a = bc \sin\left(A + \frac{1}{2}\delta A\right) \sin \frac{1}{2}\delta A (15).$$

Cette relation nous donne deux valeurs pour $\frac{1}{2}\,\delta a$; l'une d'elles est positive, c'est la seule que nous prendrons; nous calculerons ainsi la valeur de $a + \delta a$; ensuite nous déterminerons la variation de l'un des angles, de l'angle C par exemple, par la formule

$$\frac{a + \delta a}{\sin (A + \delta A)} = \frac{c}{\sin (C + \delta C)}, \qquad (16)$$

dans laquelle tout est connu, excepté δC.

Application numérique.

Soient :

$$c = 340^m,16;\ b = 531^m,18;\ A = 58^\circ 17',$$

cette dernière ayant une erreur de 12′ par défaut.

Nous trouvons d'abord

$$B = 73^\circ\ 46',4,$$
$$C = 37^\circ\ 56',6,$$
$$a = 513^m,94.$$

Pour faire le calcul, nous déterminerons d'abord le second membre de l'équation (15); puis nous trouvons tout calcul fait $\frac{1}{2}\delta a = 0^m,61,$

d'où $\delta a = 1^m,22.$

Donc on trouvera $a = 515^m,16.$

Enfin, la formule (16) nous donne

$$C + \delta C = 37^\circ\ 54',$$

et par suite $B + \delta B = 73^\circ\ 37'.$

3ᵉ CAS. *On donne les trois côtés.*

Il est très-facile de déterminer par logarithmes les variations des tangentes, et par suite les variations des angles, puisque l'on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b(p - c)}{p\,(p - a)}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - c)(p - a)}{p\,(p - b)}}.$$

On voit qu'il suffira, dans le calcul par logarithmes, de chercher la variation du facteur $(p - a)$, variation qui est égale à $-\delta a$, et on aura les variations des demi-angles. Or, il sera facile de trouver immédiatement, par une simple lecture de la table, dans la partie correspondante à $(p - a)$ la variation logarithmique provenant de la variation $-\delta a$.

EXEMPLE. On donne

$$a = 257^m,35;\quad b = 326^m,40;\quad c = 185^m,30.$$

L'erreur commise sur le terme a est de $0^m,15$ par excès. On trouve pour la valeur donnée

$$A = 51^\circ\ 54',$$
$$B = 93^\circ\ 35',4,$$
$$C = 34^\circ\ 30',8.$$

Puis, pour la vraie valeur

$$A = 51° 52',8,$$
$$B = 93° 36',4,$$
$$C = 34° 31'.$$

Le calcul, dans ce dernier cas, s'effectue avec beaucoup de rapidité.

NOTE SUR LA DIVISIBILITÉ

Par **Maurice d'Ocagne.**

La détermination des caractères de divisibilité des nombres par 2, 3, 5, 9, 11, constitue, dans les cours élémentaires, l'objet de recherches distinctes. Il est même rare qu'on y joigne la divisibilité par 7, qui est un peu plus difficile à établir.

Nous allons exposer la méthode générale que l'on emploie pour trouver les caractères de divisibilité par un nombre quelconque, quelle que soit la base du système de numération employé.

Nous déduirons ensuite de cette règle, comme applications, les divers caractères de divisibilité que l'on détermine, d'ordinaire, directement.

Il est utile d'établir d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *Les divisions des nombres* a^0, a^1, a^2, . . . a^n, . . . *par un diviseur quelconque* d *premier avec* a *donnent des restes périodiques.*

d étant premier avec *a*, l'est aussi avec toutes les puissances de ce nombre, donc toutes ces divisions fourniront des restes.

Ces restes étant tous entiers et inférieurs à *d*, on devra, au bout de *d* divisions au plus, retrouver forcément un des restes déjà obtenus.

Je dis maintenant que si a^k et a^l donnant des restes égaux, en supposant $l > k$, a^{l+1} donnera le même reste

que a^{k+1}. En effet, on a

$$a^l = \text{mult. } d + r \qquad a^k = \text{mult. } d + r$$

multipliant les deux membres de chacune de ces égalités par a, il vient

$$a^{l+1} = \text{mult. } d + ra \qquad a^{k+1} = \text{mult. } d + ra$$

a^{l+1} et a^{k+1} donnant tous deux le même reste que ra fournissent bien des restes égaux.

On retrouvera donc à partir de a^l et dans le même ordre les restes obtenus à partir de a^k.

Conséquence. — Considérons alors un nombre quelconque N écrit dans le système de numération dont la base est β.

Si nous représentons par $\alpha_0, \alpha_1, \ldots . \alpha_n$ les différents chiffres qui composent le nombre N, nous avons

$$N = \alpha_0\beta^0 + \alpha_1\beta^1 + \ldots . \alpha_n\beta^n.$$

Cherchons les restes de la division des différents nombres $\beta^0, \beta^1 \ldots . \beta^n$ par p. Nous avons

$$\beta^0 = \text{mult. } p + r_0,$$
$$\beta^1 = \text{mult. } p + r_1,$$
$$\vdots$$
$$\beta^n = \text{mult. } p + r_n.$$

Par suite,

$$N = \text{mult. } p + \alpha_0 r_0 + \alpha_1 r_1 + \ldots . + \alpha_n r_n,$$

ce qui montre que le reste de la division de N par p est le même que celui de la division de $\alpha_0 r_0 + \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_n r_n$ par p.

Donc, pour avoir le reste de la division d'un nombre quelconque par p, on déterminera les restes $r_0, r_1, \ldots$ relatifs au nombre p jusqu'à ce que l'on en trouve un déjà obtenu; à partir de là, d'après le théorème ci-dessus démontré, ils se reproduiront périodiquement; puis, on multipliera les différents chiffres du nombre par les restes correspondants; on fera la somme des produits ainsi obtenus et on divisera cette somme par p; le reste fourni par cette dernière division sera le reste cherché. Par suite pour que le nombre considéré soit divisible par p, il faut et il suffit que ce dernier reste soit nul.

Cette règle est longue à énoncer, mais très-simple à appliquer comme nous allons le voir dans les exemples suivants.

APPLICATIONS. — *Caractères de divisibilité par* 2, 5, 3, 9, 11, 7 *dans le système décimal.*

Nous chercherons d'abord les restes de la division de 10^0, 10^1, 10^2,.... par ces différents nombres ; résumons les résultats ainsi obtenus en un tableau et remarquons que nous ne calculons les restes que jusqu'à ce que nous en trouvions un déjà obtenu. Pour bien signaler ce point à l'attention du lecteur, nous soulignons d'un trait chacun des restes où la deuxième période commence.

Diviseurs	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1
5	1	0	0	0	0	0	0
7	1	3	2	6	4	5	1
9	1	1	1	1	1	1	1
11	1	10	1	10	1	10	1

Divisibilité par 2 *et* 5. — Il faut à partir de la droite multiplier les chiffres du nombre considéré respectivement par 1, 0, 0,.... En faisant la somme de ces produits on a pour résultat le chiffre des unités du nombre. Il faut donc que ce chiffre soit divisible par 2 ou 5 pour que le nombre soit lui-même divisible par 2 ou 5. D'où les règles connues :

1° *Pour qu'un nombre soit divisible par* 2 *il faut et il suffit que son dernier chiffre à droite soit pair ou* 0.

2° *Pour qu'un nombre soit divisible par* 5 *il faut et il suffit que son dernier chiffre à droite soit* 5 *ou* 0.

Divisibilité par 3 *et* 9. — Dans ces deux cas, r_1, r_2,.... étant tous égaux à 1, *la condition pour que le nombre considéré soit divisible par* 3 *ou* 9 *est que la somme des chiffres de ce nombre soit divisible par* 3 *ou* 9.

Divisibilité par 11. — D'après le tableau ci-dessus formé, on voit que la condition pour qu'un nombre soit divisible par 11 est, en représentant par S_i la somme des chiffres de rang impair et par S_p la somme des chiffres de rang pair :

$$S_i + 10\,S_p = \text{mult. } 11,$$

ou $$S_i + 11\,S_p - S_p = \text{mult. } 11,$$

ou encore $$S_i - S_p = \text{mult. } 11,$$

ce qui est bien l'expression de la règle connue : *l'excès de la somme des chiffres de rang impair sur la somme des chiffres de rang pair doit être divisible par* 11.

Divisibilité par 7. — Si nous appelons encore $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les divers chiffres du nombre considéré, le tableau nous donne pour condition de divisibilité de ce nombre par 7,

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 5\alpha_6 + \alpha_7 + \ldots = \text{mult. } 7$$

ou

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 - \alpha_4 + 7\alpha_5 - 3\alpha_5 + 7\alpha_6 - 2\alpha_6 + \alpha_7 + \ldots = \text{mult. } 7$$

ou encore

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 - 3\alpha_5 - 2\alpha_6 + \alpha_7 + \ldots = \text{mult. } 7$$

d'où la règle : *on divise le nombre en tranches de 3 chiffres à partir des unités, on multiplie, dans chacune de ces tranches et à partir de la droite, les chiffres respectivement par* 1, 3, 2; *la somme des produits correspondant aux tranches de rang impair diminuée de la somme des produits correspondant aux tranches de rang pair doit alors donner un résultat divisible par* 7.

CONCOURS GÉNÉRAL 1869.

Classe de troisième (sciences).

— On prend un point dans le plan d'un polygone quelconque. On joint ce point aux sommets du polygone, et, de ce point comme centre avec ces droites comme rayons, on trace des arcs de cercle d'un même nombre de degrés et dans le même sens; on joint les extrémités de ces arcs.

Prouver qu'on forme un nouveau polygone égal au premier.

Classe de seconde.

— Les lettres α et β désignant deux nombres donnés positifs ou négatifs, on propose de déterminer a et b de manière que α et β soient la plus grande et la plus petite valeur que prend l'expression

$$\frac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}$$

quand on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$. On examinera si le problème est toujours possible.

— Des prismes tronqués équivalents ont une base inférieure commune et les arêtes dirigées suivant les mêmes droites.

Démontrer que les plans des bases supérieures passent tous par un même point.

Classe de rhétorique.

— Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle dont le rayon est pris pour unité, on mène par le sommet de chaque angle une perpendiculaire à la droite qui divise cet angle en deux parties égales. On obtient ainsi trois lignes qui déterminent un second triangle A'B'C' dont les côtés B'C', A'C', A'B' passent respectivement par les trois sommets A, B, C du premier triangle. Cela posé, on demande de résoudre le triangle ABC sachant :

1° Que dans le triangle ABC, le rapport du côté AB à la somme des deux autres est égale à un nombre donné λ ;

2° Que dans le triangle A'B'C' le rapport du côté A'B' à la somme des deux autres est égal à un nombre donné μ.

On indiquera les conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres donnés pour que le problème soit possible. On achèvera ensuite les calculs en supposant $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{2}{3}$.

On donne un corps sphérique A, dans l'intérieur duquel se trouve une cavité sphérique B. La densité de A est 4 ; son rayon $0^m,50$.

Le rayon de la cavité B est $0^m,15$. La distance de son centre b au centre a de A est $0^m,20$ et la hauteur de b au-dessus de a est $0^m,18$.

On demande la position du centre de gravité du corps A. — On demande en outre quelle serait la position de ce centre de gravité si l'espace B, au lieu d'être vide avait, une densité double de celle de A.

Classe de philosophie.

— *Caractères de divisibilité d'un nombre par 2, 3, 4, 5 et 9.*

— Étant donnés trois cercles qui ont respectivement pour rayons $0^m,315$, $0^m,420$, $0^m,260$, calculer le rayon d'un cercle équivalent à leur somme.

Classe de philosophie (sciences).

— Trois sphères étant données, on peut construire une infinité d'autres sphères qui leur soient tangentes; par le point de contact de chacune de celles-ci avec les trois sphères données, on peut faire passer un plan. Prouver que les plans ainsi construits passent par une même droite.

— Sur l'un des côtés OX d'un angle droit, on porte une longueur arbitraire OM et on prend une longueur ON qui soit à OM dans le rapport d'une ligne donnée n à une autre ligne donnée m ; puis on joint les points M et N à un point fixe donné sur l'autre côté OY. On demande de choisir M de façon que l'angle MAN soit maximum.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE CLERMONT.

Juillet 1874.

— Par un point donné mener une droite qui détermine par son intersection avec les côtés d'un angle donné un triangle d'aire minima.

Novembre 1874.

— Surface totale d'un cône circonscrit à la sphère en supposant que le diamètre de base soit égal au côté du cône. — Rapport de cette surface à celle de la sphère.

Novembre 1875.

1. — Dans un triangle dont les côtés sont a, b, c, et les angles A, B, C, démontrer qu'on aura nécessairement les relations

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}.$$

2. — On demande de construire un triangle rectangle tel que le volume engendré par la révolution autour de l'hypoténuse soit égal au 1/8 de la sphère qui aurait cette hypoténuse pour diamètre.

3. — Parmi toutes les cordes de même longueur inscrites dans un demi-cercle, quelle est celle qui en tournant autour du diamètre engendre la plus grande surface? — Quelle est en second lieu la longueur de la corde qui donnerait la plus grande surface possible?

Avril 1876.

— Résoudre l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4.$$

Juillet 1876.

— On fait tourner un trapèze successivement autour de ses deux bases; quel devrait être le rapport de ces bases pour que les volumes obtenus après une révolution complète soient dans un rapport donné, par exemple, comme 3 est à 4.

— Dans un triangle isoscèle ABC fixe et invariable dont la base et la hauteur sont données, on inscrit un deuxième triangle *abc* variable dont la base est parallèle à celle du premier. On demande:

1° Le maximum de la surface du triangle *abc*;

2° Le maximum du volume qu'il décrit en tournant autour de sa base *abc*.

— Partager une demi-circonférence ABCD par un point M de telle sorte que les segments circulaires ABM, MCD et le triangle AMD engendrent en tournant autour du diamètre AB des volumes en progression géométrique.

— Tous les côtés de longueur connue d'un hexagone régulier sont tangents à une sphère. On connait le rapport m des zones déterminées sur la sphère par le plan de l'hexagone régulier. Quel est le rayon de la sphère?

— Circonscrire à un cercle donné un trapèze isoscèle de surface donnée. Cas du minimum.

— Une droite OA de longueur invariable décrit autour de OM un cône de révolution dont le volume et la surface totale varient avec la distance AB $= x$ du point A à l'axe fixe. On demande : pour quelle valeur de x le volume est maximum; pour quelle valeur de x la surface totale est égale à celle du cercle de rayon a.

Novembre 1876.

1. — On propose de circonscrire à un rectangle donné un triangle isoscèle de surface donnée. Cas du minimum.

2. — Une ville contracte au taux de 5 0/0 un emprunt de 400,000 francs. On calculera la valeur de l'annuité qu'elle devra payer pour être complétement libérée après 20 annuités égales.

— Étudier la variation du signe et de la grandeur de la fraction $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 4}$, lorsqu'on fait varier x par valeurs réelles et d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$.

Avril 1877.

1. — Une fraction dont les termes sont des nombres premiers entre eux est irréductible.

2. — La tangente trigonométrique de la somme de deux arcs est 3; la tangente de leur différence est $\frac{1}{3}$. Quels sont ces deux arcs?

— Démontrer le théorème qui donne le volume décrit par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un sommet sans traverser la surface de ce triangle.

Le triangle étant isoscèle et l'axe passant par le sommet opposé à la base, quel angle doit faire avec cet axe la hauteur du triangle pour que le volume engendré soit égal à celui que l'on obtiendrait en faisant tourner le triangle autour de la base?

Session d'octobre 1877.

Un hexagone régulier de côté a tourne successivement autour d'un de ses côtés AB, et autour d'un axe xy qui lui est extérieur passant par un sommet C et également incliné sur CB et CD. On demande de calculer pour chacune de ces rotations la surface et le volume décrits respectivement par le périmètre et la surface de l'hexagone.

Juillet 1878.

1re Série. — On donne dans un plan un cercle de centre O et de rayon R et un point A à une distance d de ce point. On demande de mener a

A une sécante telle que la corde interceptée BC soit égale à une longueur donnée $2l$, et de calculer la surface engendrée par la corde BC dans sa révolution autour de OA.

2e *Série.* — Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris et calculer sa surface, données : $A = 38°20'$; $b = 7395$ m. ; $c = 4786$ m.

3e *Série.* — Trouver les arêtes x, y, z, d'un parallélipipède rectangle connaissant : 1° la surface totale $2S$ du parallélipipède ; 2° la somme a de ses 3 arêtes ; 3° le rapport m de deux d'entre elles.

4e *Série.* — Volume du segment sphérique. Évaluer le volume du segment détaché dans une sphère d'un rayon égal à 5 mètres par 2 plans parallèles menés d'un même côté du centre à des distances respectivement égales à 1 mètre et à 2 mètres.

5e *Série.* — 1° Inscrire dans une sphère de rayon donné R un cône ABC dont le volume soit dans un rapport donné m avec le volume du segment inférieur BC déterminé par la base du cône.

2° Démontrer que le plus petit multiple commun de deux nombres est égal à leur produit divisé par leur plus grand commun diviseur.

6e *Série.* — Trouver entre quelles limites peut varier la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

Application à l'exemple suivant :

$$\frac{3x^2 - 13x + 6}{5x^2 - 17x + 5},$$

7e *Série.* — Résoudre l'équation $\cos x = m \operatorname{tg} x$ ou x est l'inconnue et m une quantité donnée.

Discussion.

Octobre 1878.

Résoudre un triangle connaissant deux côtés a, b et l'angle A opposé à l'un d'eux.

Application $a = 3{,}785$ m. $b = 5{,}092$ m. $A = 35° 40'$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 116.

Solution par M. Reuss, Collége de Belfort.

Étant donné un triangle ABC, *on considère la bissectrice de l'angle* A *et l'on joint un point quelconque* M *de cette bissectrice indéfiniment prolongée aux sommets* B *et* C. *On propose d'étudier la variation du rapport* $\frac{MB}{MC}$.

Soit AM $= x$. Les triangles MBA, MCA donnent

$$MB = \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx \cos \frac{A}{2}},$$

$$MC = \sqrt{x^2 + b^2 - 2bx \cos \frac{A}{2}},$$

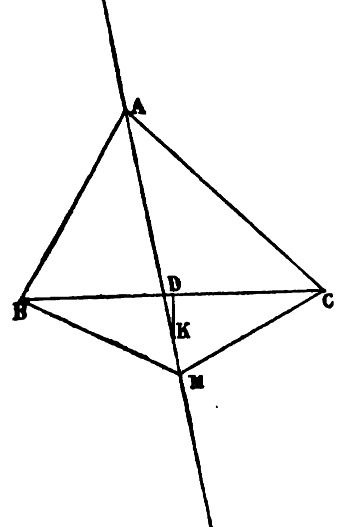
d'où $$\frac{MB}{MC} = \frac{\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx \cos \frac{A}{2}}}{\sqrt{x^2 + b^2 - 2bx \cos \frac{A}{2}}};$$

tel est le rapport dont il faut étudier la variation. Égalant à m et élevant au carré, il vient

$$(m^2 - 1)\, x^2 - 2\, (bm^2 - c)\, x \cos \frac{A}{2} + m^2b^2 - c^2 = 0,$$

d'où $x =$

$$\frac{(bm^2 - c) \cos \frac{A}{2} - \sqrt{-b^2m^4 \sin^2\frac{A}{2} + (b^2 + c^2 - 2bc \cos^2 \frac{A}{2})m^2 - c^2 \sin^2\frac{A}{2}}}{(m^2 - 1)}$$



x devant être réel, la quantité sans le radical doit être positive. C'est un trinôme entier du second degré en m^2 et de la forme

$$-b^2 \sin^2 \frac{A}{2} (m^2 - m'^2)(m^2 - m''^2).$$

Il sera positif, c'est-à-dire de signe contraire à celui de son premier terme, si on donne à m^2 une valeur quelconque comprise entre les racines. Ainsi la condition de réalité est

$$m'^2 > m^2 > m''^2$$

m'^2 désignant la plus grande racine.

Résolvant l'équation obtenue en égalant à o la quantité sans le radical, on a :

$$m^2 = \frac{(b^2 + c^2 - 2bc \cos^2 \frac{A}{2}) - \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos^2 \frac{A}{2})^2 - 4b^2c^2 \sin^4 \frac{A}{2}}}{2b^2 \sin \frac{A}{2}}$$

ou en simplifiant le radical

$$m^2 = \frac{(b^2 + c^2 - 2bc \cos^2 \frac{A}{2}) + \sqrt{a^2(b - c)^2}}{2b^2 \sin^2 \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos^2 \frac{A}{2} - a(b - c)}{2b^2 \sin^2 \frac{A}{2}},$$

Nous supposerons $b > c$, sans quoi nous aurions pu écrire $a(c-b)$ et la plus grande racine au lieu d'être m' aurait été m''. Les conclusions auraient été contraires à celles que nous allons établir.

Si dans les valeurs de m'^2 et de m''^2 nous remplaçons $\cos^2 \frac{A}{2}$ et $\sin^2 \frac{A}{2}$ par leurs valeurs en fonctions des côtés, on arrive aux expressions plus simples

$$m'^2 = \frac{(a + b - c)\, c}{(a + c - b)\, b}, \quad m''^2 = \frac{(a + c - b)\, c}{(a + b - c)\, b},$$

ou encore

$$m' = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}}, \qquad m'' = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}};$$

à la valeur de $m^2 = m'^2$, c'est-à-dire au maximum du rapport correspond pour x la valeur $\frac{p}{\cos \frac{A}{2}}$; au minimum correspond pour x la valeur $\frac{p - a}{\cos \frac{A}{2}}$.

Cela posé, faisons croître x de $-\infty x$. Si à $+\infty = -\infty$,

le dénominateur de $x = 0$, alors $m = 1$. On peut le voir directement en mettant l'expression de m sous la forme

$$\sqrt{\frac{1 + \frac{c^2}{x^2} - 2\frac{c}{x}\cos\frac{A}{2}}{1 + \frac{b^2}{x^2} - 2\frac{b}{x}\cos\frac{A}{2}}},$$

qui pour $x = \pm \infty$ donne $m = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$.

Quand x croît de $-\infty$ à 0, la fonction part de l'unité pour atteindre la valeur plus petite $\frac{c}{b}$ pour $x = 0$, et le rapport diminue jusqu'à sa valeur minimum $\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$ pour $x = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$, puis augmente.

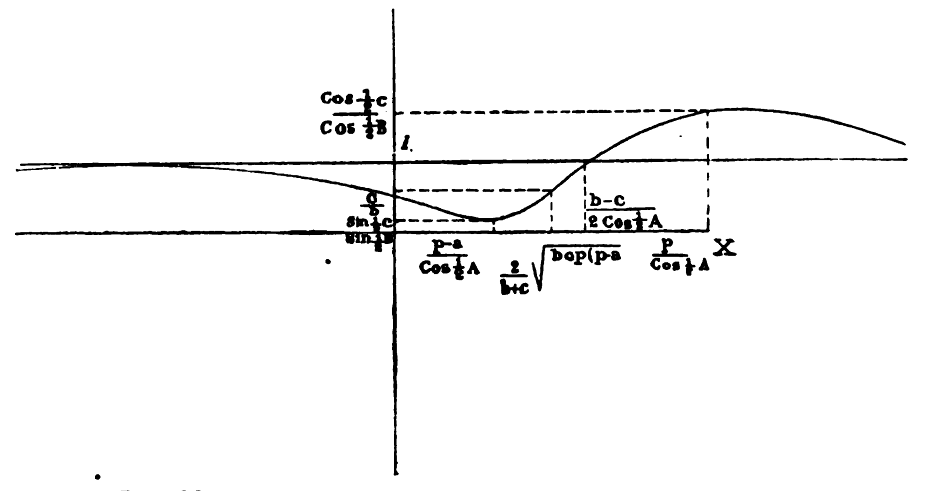
Quand le point M est venu en D, c . a . d . quand $x = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}$ m repasse par la valeur $\frac{c}{b}$. Cette considération seule aurait suffi pour montrer *à priori* qu'il existe à l'intérieur du triangle un point M pour lequel le rapport est minimum ou maximum, car m passe deux fois par la même valeur $\frac{c}{b}$ en prenant des valeurs intermédiaires plus petites ou plus grandes. x continuant à croître, m augmente pour atteindre sa valeur maximum $\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$ quand $x = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$, mais, par hypothèse, $C < B$, donc $\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} > 1$ et comme m croît d'une manière continue, il

doit y avoir entre le point D et le centre du cercle circonscrit un point pour lequel $m = 1$. Il suffit, pour trouver la valeur de x qui le détermine, de résoudre l'équation

$$x^2 + c^2 - 2cx \cos \frac{A}{2} = x^2 + b^2\ 2bx \cos \frac{A}{2},$$

qui donne $x = \dfrac{b + c}{2 \cos \dfrac{A}{2}}$. M est la perpendiculaire menée au milieu de BC.

Si nous donnons à x des valeurs supérieures à celle qui rend le rapport maximum, m diminue de plus en plus et devient à la limite égal à l'unité quand $x = + \infty$.



Le tableau suivant et la courbe ci-contre permettent de suivre commodément les variations de la fonction.

x	m	x	m
$-\infty$	1	croît	décroît
0	$\dfrac{c}{b}$	croît	décroît
$\dfrac{p - a}{\cos \dfrac{A}{2}}$	$\dfrac{\sin \dfrac{C}{2}}{\sin \dfrac{B}{2}}$		

$\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$	$\frac{c}{b}$	croît	croît
$\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$	1	croît	croît
$\frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$	$\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$	croît	décroît
$+\infty$	1		

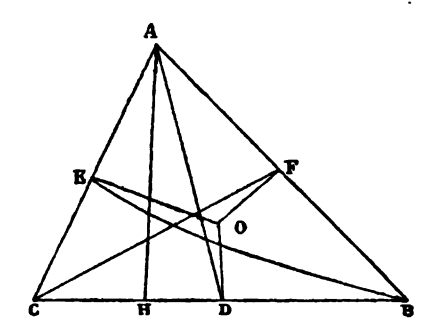
Nota : **M. Sou, du collége de Libourne, a résolu la même question.**

QUESTION 118.

Solution par M. Sou, élève du collége de Libourne.

Si l'on abaisse d'un point O *les perpendiculaires* OD, OE, OF, *sur les côtés d'un triangle, on a*

$$\operatorname{cotg} ADC + \operatorname{cotg} BEA + \operatorname{cotg} CFB = 0.$$



Menons la hauteur AH. On a

$$\operatorname{cotg} ADC = \frac{DH}{AH} = \frac{DH \,.\, a}{AH \,.\, a} = \frac{DH \,.\, a}{2S} = \frac{DH(BD+DC)}{2S}$$

d'un autre côté

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2DH \,.\, BD$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2DH \,.\, DC$$

d'où $\quad 2(BD + DC)DH = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - (\overline{BD}^2 - \overline{DC}^2)$

par suite $\quad \text{cotg ADC} = \dfrac{c^2 - b^2 - (\overline{BD}^2 - \overline{DC}^2)}{4S}$

de même $\quad \text{cotg BEA} = \dfrac{a^2 - c^2 - (\overline{CE}^2 - \overline{AE}^2)}{4S}$

$$\text{cotg CFB} = \frac{b^2 - a^2 - (\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2)}{4S}$$

donc $\quad \text{cotg ADC} + \text{cotg BEA} + \text{cotg CFB}$

$$= \frac{\overline{BF}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AE}^2 - \overline{AF}^2 - \overline{BD}^2 - \overline{CE}^2}{4S}$$

ajoutant et retranchant au numérateur la quantité

$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2$, on trouve

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - (\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC})^2 = 0$$

donc $\quad \text{cotg ADC} + \text{cotg BEA} + \text{cotg CFB} = 0.$

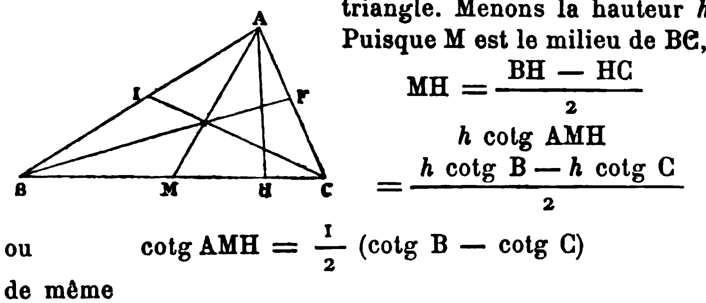
Nota. — **M. Reuss, de Belfort, a résolu la même question.**

QUESTION 119.

Solution par M. Jimenez, élève du Lycée de Bordeaux.

Les médianes d'un triangle forment avec les côtés qu'elles divisent en deux parties égales des angles comptés dans le même sens de rotation dont la somme des cotangentes est nulle.

Soient ABC un triangle, AM, BF, CI les médianes de ce triangle. Menons la hauteur h. Puisque M est le milieu de BC,



$$MH = \frac{BH - HC}{2}$$

$$h \text{ cotg AMH} = \frac{h \text{ cotg B} - h \text{ cotg C}}{2}$$

ou $\quad \text{cotg AMH} = \dfrac{1}{2}(\text{cotg B} - \text{cotg C})$

de même

$$\text{cotg BIC ou } - \text{cotg AIC} = \frac{1}{2}(\text{cotg A} - \text{cotg B})$$

$$\text{cotg AFB ou} - \text{cogt BFC} = \frac{1}{2}(\text{cotg C} - \text{cotg A});$$

faisons la somme, on a

$$\text{cotg AMH} + \text{cotg BIC} + \text{cotg AFB} = 0.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Reuss, de Belfort; Demortain, de Doullens; Sou, de Libourne.

QUESTION 120.

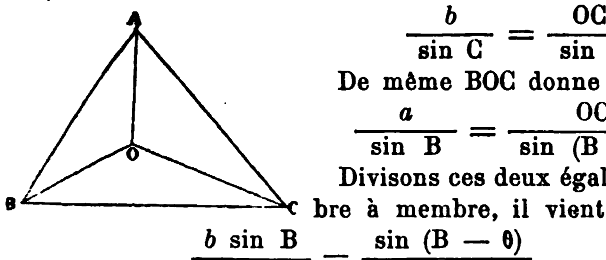
Solution par M. Reuss, de Belfort.

Si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle un point O *tel que*

$$\text{CAO} = \text{ABO} = \text{BCO} = \theta$$

on a $\quad \text{cotg}\ \theta = \text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C}.$

Le triangle AOC dans lequel $\text{AOC} = 180 - (\theta + \text{C} - \theta)$ ou $\text{AOC} = 180 - \text{C}$ donne



$$\frac{b}{\sin \text{C}} = \frac{\text{OC}}{\sin \theta}.$$

De même BOC donne

$$\frac{a}{\sin \text{B}} = \frac{\text{OC}}{\sin (\text{B} - \theta)}.$$

Divisons ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{b \sin \text{B}}{a \sin \text{C}} = \frac{\sin (\text{B} - \theta)}{\sin \theta},$$

ou

$$\frac{\sin (\text{B} - \theta)}{\sin \text{B} \sin \theta} = \frac{b}{a \sin \text{C}}.$$

Remplaçons $\frac{b}{a}$ par $\frac{\sin \text{B}}{\sin \text{A}}$ puis sin B par sin (A + C), il vient

$$\frac{\sin (\text{B} - \theta)}{\sin \text{B} \sin \theta} = \frac{\sin (\text{A} + \text{C})}{\sin \text{A} \sin \text{C}};$$

or le premier membre est égal à $\text{cotg}\ \theta - \text{cotg B}$ et le second à $\text{cotg A} + \text{cotg C}$. On a donc

$$\text{cotg}\ \theta = \text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Demortain, de Doullens; Demari, de Moulins.

QUESTION 121.

Solution par M. THUAL, élève du Lycée de Lorient.

Étant donné un triangle ABC, *sur chacun de ses côtés on construit extérieurement au triangle* ABC *des triangles semblables, de telle manière que chacun des angles adjacents à* A *soit égal à* C; *que chacun des angles adjacents à* B *soit égal à* A; *et que chacun des angles adjacents à* C *soit égal à* B. *Démontrer que les trois cercles circonscrits à ces triangles et les droites qui joignent chacun des sommets du triangle* ABC *au sommet opposé se coupent en un même point* O, *tel que les angles* OBC, OBA, OAB *sont égaux entre eux.*

D'après les hypothèses on voit que les angles E, F, D sont respectivement égaux aux angles A, B, C du triangle.

Les circonférences circonscrites aux triangles ABF et BCD se coupent en B et O. Les deux quadrilatères AOF et BOCD étant inscriptibles, on a AOB = A + C et BCO = A + B; donc AOC = $4dr$ — 2A — B — C = $2dr$ — A = B + C.

Le quadrilatère AOCE est alors inscriptible et la circonférence circonscrite au triangle AEC passe le point O.

Je dis maintenant que les droites AD, DE, FC se coupent en O. Nous avons en effet :

AOB = 185° — AFB = A + C, BOD = BCD = B et AOB + BOD = A + B + C = 180°.

Les trois points A, O, D sont en ligne droite. Même démonstration pour les points E, O,B et F, O, C.

Enfin les angles OBC, OCA, OAB sont égaux. En effet,

OBC = 180° — BOC — OCA = 180 — A — B — OCB = C — OCB = OCA. De même OCA = OAB.

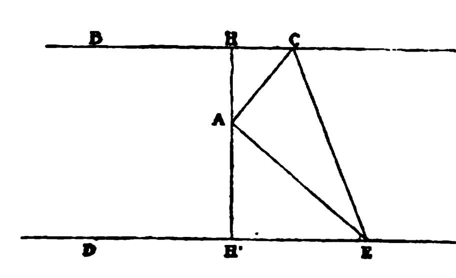
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Sou, de Libourne; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saunier.

QUESTION 122.

Solution par M. DE LA LAURENCIE, élève au Lycée de Nantes.

Étant donné un point A entre deux parallèles, tracer un triangle rectangle ayant son sommet de l'angle droit en A et les deux autres sommets sur les deux parallèles de manière que sa surface soit minima.

Supposons le problème résolu. Soient BC, DE les deux parallèles; HH′ leur perpendiculaire commune passant par le point A. Soient en outre AH $= a$, AH′ $= b$, CA $= x$, EA $= y$, HAC $= \alpha$, H′AE $= \beta$.



La surface du triangle CAE est $\frac{xy}{2}$. Or dans le triangle rectangle HAC on a

$$x = \frac{a}{\cos \alpha}$$

de même

$$y = \frac{b}{\cos \beta}$$

La surface a donc pour expression $\frac{ab}{2 \cos \alpha \cos \beta}$

Pour que cette expression soit minima, il faut que le dénominateur soit maximum. Or $\alpha + \beta = 90° =$ constante et

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + (\cos(\alpha - \beta)}{2}.$$

$\cos(\alpha + \beta)$ étant constant, $\cos \alpha \cos \beta$ sera maximum

...dire quand cos $(\alpha - \beta) = 1$;

QUESTION 12' $\alpha = \beta = 45^\circ$.

...ir le triangle de surface minima

Solution par M. THUAL, él' ...faire au point A avec AH et AH'

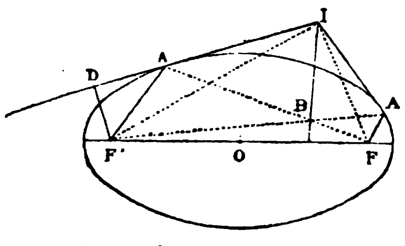
Étant donné un triangle ... *même* question : MM. d'Ocagne, collége Chaptal;
construit extérieurement ... *...beron*, de Moulins; Hugot, de Lyon; Huet, d'Or-
de telle manière que ch ... *Lorient*; Paulme et Martin, de Passy; Jâcquot, de Nancy;
C; *que chacun des* ... *Lavoisier*; Objais, de Moulins; Sou, de Libourne.
chacun des angle
trois cercles ci
gnent chacun
se coupent
OAB *so*

D'·

QUESTIONS PROPOSÉES

146. — On donne un cercle, un diamètre AB et une droite XY perpendiculaire à AB. La polaire d'un point M de XY coupe cette droite en N, et sur MN comme diamètre, on décrit un cercle. Démontrer qne, si l'on fait varier le point M sur XY, tous les cercles tels que MN ont pour axe radical le diamètre AB.

147. — On considère une ellipse. Soit F et F' les foyers de cette ellipse. Par ces points, et dans la même direction, on mène deux rayons vecteurs parallèles rencontrant la courbe, le premier en A, le second en A'. On mène les tangentes en A et A', tangentes qui se rencontrent en I. La figure ainsi tracée jouit des propriétés suivantes.



I. Les triangles F'IA, FIA' sont rectangles au point I.

II. L'angle FIF' est moyen arithmétique entre les angles F'AF, F'A'F.

III. Quand on fait varier la direction des parallèles FA et F'A', le point I décrit le cercle dont le diamètre est le grand axe de l'ellipse.

roites FA, F'A' rencontrent l'ellipse sous deux
e la tangente de leur somme, multipliée par la
tangentes, est un produit constant, quand on
tion des parallèles FA, F'A'.

n

$$\frac{A \times IF}{IA' \times IF'} = \frac{AF}{A'F'}.$$

appelle B le point de rencontre des diagonales
eze AFA'F', le lieu du point B, quand on fait varier la
ection des parallèles AF, A'F', est une ellipse homofocale à la proposée, et normale à la droite BI.

VII. La distance du point B au point I est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point B aux deux foyers F et F'.

VIII. Si du point F on abaisse sur AI la perpendiculaire FD, et du point F' la perpendiculaire F'D', la somme des carrés des inverses de ces perpendiculaires est constante quand on fait varier la direction des parallèles FA, F'A'.

IX. On a $IF \times I'F' = 2a \times IB$.

X. La droite IO est parallèle aux droites FA, F'A', et la somme des inverses des rayons vecteurs FA, F'A' est constante. *(De Longchamps.)*

Avis. — *Bien que, en général, nous ne publiions que des solutions d'élèves, si, dans le courant de l'année, nous n'avons pas reçu de solutions de ce genre, nous publierons volontiers une solution d'une autre personne, pourvu que cette solution soit absolument complète et surtout très-élémentaire.*

148. — Deux cercles se coupent sous un angle de 120°. On mène un cercle tangent à la fois à la tangente commune et aux deux cercles donnés. On a, entre les rayons r et r' des cercles donnés et le rayon x du cercle tangent la relation

$$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{3r}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}}.$$ *(Perrin.)*

149. — Deux circonférences sont tangentes extérieurement. Sur la ligne des centres comme diamètre, on décrit

une circonférence, et l'on mène la circonférence A tangente aux trois circonférences ainsi obtenues. Si R et r sont les rayons des deux premières, D le diamètre de la circonférence A, on a la relation $\frac{1}{D} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$. Chercher ce qui arrive si les circonférences sont tangentes intérieurement. *(Perrin.)*

150. — Une droite AD rencontre deux circonférences O et O' de telle sorte que les cordes interceptées AB et CD soient égales entre elles. Trouver : 1° le lieu géométrique du milieu de AD; 2° l'enveloppe de la droite AD. En déduire le problème suivant : mener par un point donné dans le plan de deux circonférences une droite telle que les cordes interceptées soient égales. (*Julliard.*)

151. — Soit ABC un triangle, O un point de son plan. On mène les droites AO, BO, CO, qui coupent les côtés en A', B', C'; on coupe le triangle A'B'C' par une transversale $\alpha\beta\gamma$ (α est le point où cette transversale rencontre B'C', etc.); les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ rencontrent les côtés du premier triangle en trois points qui sont en ligne droite.

152. — On a une circonférence fixe O, et un point fixe A; par le point A, on fait passer une circonférence variable, qui coupe la circonférence O sous un angle constant; démontrer que la circonférence variable a pour enveloppe une circonférence.

BIBLIOGRAPHIE

Revue de l'enseignement secondaire spécial et de l'Enseignement professionnel. — *Cette Revue paraît le 15 de chaque mois à la librairie Hachette.*

Nous venons de recevoir le premier numéro d'une publication mensuelle qui se propose de rendre à l'enseignement spécial, créé en France par la loi de 1865, le service de mettre ceux qui s'en occupent au courant de tout ce qui peut intéresser cet ordre d'enseignement en France et à l'étranger. Comme notre publication, la nouvelle Revue traitera des sujets de com-

position ou d'examen se rattachant à son objet particulier; en outre, elle contient es actes officiels concernant l'enseignement spécial, et des questions de pédagogie traitées par des hommes au courant de cet enseignement nouveau. Nous croyons cette Revue appelée à rendre de grands services, et c'est pour cela même que nous nous permettons une légère critique à propos d'un article de mécanique. Les programmes de l'enseignement spécial, même le programme de l'agrégation, ne comportent pas l'emploi du calcul intégral, et, si la nouvelle publication veut être sérieusement utile, elle ne doit pas sortir de son programme, indiqué par son titre même. Elle doit donc chercher à traiter les questions qu'elle aborde par les méthodes indiquées dans les programmes officiels de l'enseignement spécial, et montrer que l'on peut, comme nous l'avons déjà dit à propos de la mécanique de MM. Mondiet et Thabourin, faire un cours élémentaire, et pourtant assez complet pour bien faire comprendre à l'industrie les notions de mécanique dont elle a besoin. A. M.

CORRESPONDANCE.

M. Julliard nous a communiqué un théorème intéressant sur les sections coniques; mais comme sa démonstration est un peu longue et qu'elle s'appuie sur des considérations qui sortent du cadre des mathématiques élémentaires, nous en donnons un autre qui exige seulement la connaissance des propriétés des pôles et polaires.

Théorème. — Soit ABC un triangle circonscrit à une conique, et dont les côtés sont tangents en M, N, P, et soit O un point quelconque du plan. On joint OB, OC qui coupent en H et K la corde de contact NP; les droites OM, BK, CH concourent au même point I.

Démonstration. — Je prolonge BC jusqu'à la rencontre de NP en S; le point M appartient à la polaire du point S par rapport à la conique et aussi à la polaire du point S par rapport à l'ensemble des droites AB, AC. Donc M est conjugué harmonique de S par rapport aux points B et C, et par suite M est sur la polaire de S par rapport à OB, OC. Mais le point I, intersection de CH, BK, appartient à la même polaire; donc la droite OM passe au point I.

M. Julliard applique son théorème au problème suivant : Connaissant trois tangentes à une conique non tracée et deux des points de contact, trouver le point de contact de la troisième tangente. — La solution est immédiate si l'on donne les points N, P, il suffit de prendre un point quelconque O, de joindre OB, OC, puis CH et BK et enfin OI qui passe au point M. On peut aussi prendre la polaire de S par rapport à l'angle BAC; cette polaire passe également au point M. On n'a pas même besoin de construire le point S; il suffit de joindre CP, BN qui se coupent en I' et de joindre AI'. Cette construction est du reste bien connue, car ce n'est qu'une application du théorème de Brianchon étendu au triangle circonscrit.

J. K.

M. Combier, ingénieur en chef des ponts et chaussées, nous fait remarquer qu'il s'est glissé une erreur dans l'énoncé du premier théorème signalé par M. Dostor, dans le numéro précédent (*voir page 18*). — En effet, pour que l'énoncé ainsi établi soit exact, il faut que les termes extrêmes fassent partie de la progression arithmétique; or si r est de la forme $(4p + 2)$, $\frac{r}{2}$ sera impair, et si n est pair, $(n - 1)$ sera impair; donc, comme une puissance quelconque de n est paire, les termes extrêmes seront impairs, et la progression peut ne contenir que des termes pairs; donc on ne pourra pas trouver les deux nombres impairs $n^{\alpha - 1} - (n - 1)\frac{r}{2}$ et $n^{\alpha - 1} + (n - 1)\frac{r}{2}$ dans la progression. — Du reste, la somme d'un nombre quelconque de nombres pairs ne peut jamais être égale à la puissance entière d'un nombre impair, quel qu'il soit.

Il faut, d'après cela, modifier l'énoncé de la proposition énoncée de la manière suivante : *On peut toujours trouver des progressions arithmétiques, dont la raison est paire, et telles que la somme de* n *termes consécutifs soit une puissance exacte de* n ;

En effet si l'on a, en appelant n le premier terme, la relation

$$x + pr = n^{\alpha - 1} - \frac{n - 1}{2} r$$

(c'est la condition pour que le premier des termes donnés soit un terme de progression), je dis que l'on pourra trouver un terme de rang $q + 1$ tel que $x + qr$ soit égal à $n^{\beta - 1} - \frac{n -}{2} r$.

En effet, si l'on a les deux égalités $x + pr = n^{\alpha - 1} - \frac{n - 1}{2} r$.

$$x + qr = n^{\beta - 1} - \frac{n - 1}{2} r,$$

on aura, en retranchant membre à membre, et supposant $\beta > \alpha$, et $q > p$,

$$(q - p)\, r = n^{\beta - 1} - n^{\alpha - 1} = n^{\alpha - 1}\left(n^{\beta - \alpha} - 1\right)$$

et on pourra prendre $r = 2d$, d étant diviseur de n, et alors $q - p$ sera un nombre entier.

Le théorème IV pourrait amener à une étude analogue.

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 1410-9.

THÉORIE DE L'INCOMMENSURABILITÉ

RÉDIGÉE D'APRÈS LES NOTES PRISES AU COURS DE M. SONGAYLO

Professeur au Collège Chaptal, examinateur d'admission
à l'École centrale

Par Maurice d'Ocagne, élève au Collège Chaptal, bachelier ès sciences.

I. **Définition de la limite.** — On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont la quantité variable se rapproche indéfiniment, de telle façon que leur différence puisse devenir et rester moindre que toute quantité donnée, aussi petite que l'on veut.

Si la quantité variable A est constamment inférieure à la quantité fixe L, mais qu'elle s'en rapproche de manière à ce que la différence L — A devienne et reste plus petite que toute quantité assignable, le nombre L est dit *limite supérieure* de la variable A.

Si, au contraire, la quantité variable A est constamment supérieure à la quantité fixe, mais s'en rapproche indéfiniment de telle façon que la différence A — L puisse devenir et rester plus petite que toute quantité assignable, la quantité L est dite *limite inférieure* de la variable A.

Dans le premier cas, la quantité A est dite *croissante*, et dans le second, *décroissante*.

Théorème I. — *Lorsqu'une quantité variable* A *croît constamment en restant inférieure à une quantité fixe* Q, *elle a une limite.*

La première condition, celle de la croissance continue, est remplie. Pour la seconde, si nous considérons les quantités de même espèce que Q, qui lui sont inférieures, nous voyons qu'il y en a de plus petites que certaines valeurs de A, et d'autres, au contraire, toujours plus grandes que les diverses valeurs de la variable. Par suite, la plus petite des quantités de même espèce que Q supérieures aux valeurs de la variable constitue une limite L : car, d'une part, la variable peut

prendre toutes les valeurs des quantités de même espèce que A inférieures à L, et de l'autre, on peut choisir ces quantités aussi rapprochées de L qu'on veut.

On démontrerait de même que : *lorsqu'une quantité variable décroît constamment en restant supérieure à une quantité fixe, elle a une limite.*

Théorème II. — *Lorsque deux quantités variables* A *et* B *sont constamment égales et que l'une d'elles* A *offre une limite* L, *l'autre* B *offre aussi une limite et cette limite est égale à* L.

Appelons en effet a et b un couple de valeurs égales des quantités variables A et B. Par hypothèse, A croît ou décroît constamment, et comme B est constamment égale à A, elle croît ou décroît de même.

De plus $L - a$ ou $a - L$ peut devenir moindre que toute quantité donnée aussi petite qu'on veut; il en est, par suite, de même de $L - b$ ou $b - L$.

La quantité B répond donc bien aux deux caractères qui déterminent une limite, et le second caractère montre bien que L constitue cette limite.

II. **Plus grande commune mesure. — Définition de l'incommensurabilité.** — On appelle *commune mesure* de deux quantités, une troisième quantité de même espèce contenue un nombre exact de fois dans chacune d'elles.

On peut se proposer de déterminer la plus grande commune mesure de deux quantités A et B. Pour cela on retranche de la plus grande A la plus petite B autant de fois qu'on le peut. Si B se trouve ainsi contenue un nombre exact de fois dans A, on en conclut que B constitue la plus grande commune mesure cherchée; mais, le plus souvent, il se produit un reste, c'est-à-dire qu'après avoir retranché un certain nombre de fois la plus petite quantité B de la plus grande A, il reste encore une certaine partie R de A, inférieure à B.

Je dis maintenant que la plus grande commune mesure entre B et R est la même que celle entre A et B.

En effet, appelons C la partie de A qu'on obtient en por-

tant sur cette quantité qu'on peut considérer comme une longueur, la quantité B autant de fois qu'on le peut; et soit α la plus grande commune mesure entre B et R. α étant contenue un nombre exact de fois dans R, l'est aussi dans C, et comme par hypothèse elle est contenue un nombre exact de fois dans R, elle le sera par suite dans A : donc c'est une commune mesure entre A et B. C'est la plus grande; en effet, supposons que A et B admettent une commune mesure β plus grande que α. Cette quantité β contenue exactement dans B, l'est dans C, et comme elle l'est dans A, elle le serait dans R. Ce serait donc une commune mesure à B et à R supérieure à α; or α étant, par hypothèse, la plus grande commune mesure entre B et R, cette commune mesure β entre A et B ne peut donc exister et nous sommes, par suite, amenés à chercher la plus grande commune mesure entre B et R. Nous opérerons donc sur ces quantités comme nous venons de le faire sur A et B, et nous continuerons la même opération jusqu'à ce que nous arrivions à un reste R_n contenu un nombre exact de fois dans le précédent R_{n-1}.

R_n est alors la plus grande commune mesure cherchée.

Mais on conçoit qu'en continuant indéfiniment cette opération, on puisse n'arriver jamais à un reste contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent; en un mot, il peut se faire que deux quantités n'admettent pas de commune mesure. Ces deux quantités sont alors dites *incommensurables* l'une par rapport à l'autre.

Or mesurer une quantité c'est chercher la plus grande commune mesure qui existe entre elle et l'unité choisie; si cette commune mesure n'existe pas, la quantité sera incommensurable avec l'unité ou, tout simplement, *incommensurable.*

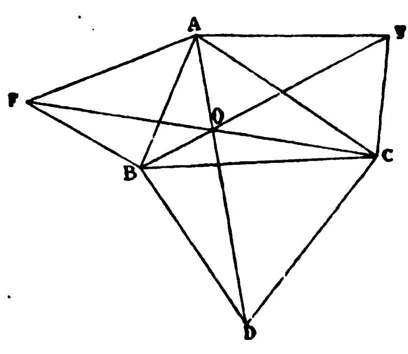
Mais le résultat de la mesure d'une quantité, lorsque cette mesure est possible, donne naissance à un *nombre*. Les grandeurs incommensurables ne seraient donc pas susceptibles d'être représentées par des nombres. On conçoit cependant que l'on puisse établir certaine relation entre ces grandeurs et l'unité. C'est cette relation que nous allons définir.

QUESTION 121.

Solution par M. Thual, élève du Lycée de Lorient.

Étant donné un triangle ABC, *sur chacun de ses côtés on construit extérieurement au triangle* ABC *des triangles semblables, de telle manière que chacun des angles adjacents à* A *soit égal à* C; *que chacun des angles adjacents à* B *soit égal à* A; *et que chacun des angles adjacents à* C *soit égal à* B. *Démontrer que les trois cercles circonscrits à ces triangles et les droites qui joignent chacun des sommets du triangle* ABC *au sommet opposé se coupent en un même point* O, *tel que les angles* OBC, OBA, OAB *sont égaux entre eux.*

D'après les hypothèses on voit que les angles E, F, D sont respectivement égaux aux angles A, B, C du triangle.



Les circonférences circonscrites aux triangles ABF et BCD se coupent en B et O. Les deux quadrilatères AOF et BOCD étant inscriptibles, on a AOB = A + C et BCO = A + B; donc AOC = $4dr$ — 2A — B — C = $2dr$ — A = B + C.

Le quadrilatère AOCE est alors inscriptible et la circonférence circonscrite au triangle AEC passe le point O.

Je dis maintenant que les droites AD, DE, FC se coupent en O. Nous avons en effet :

AOB = 185° — AFB = A + C, BOD = BCD = B et AOB + BOD = A + B + C = 180°.

Les trois points A, O, D sont en ligne droite. Même démonstration pour les points E, O,B et F, O, C.

Enfin les angles OBC, OCA, OAB sont égaux. En effet,

OBC = 180° — BOC — OCA = 180 — A — B — OCB = C — OCB = OCA. De même OCA = OAB.

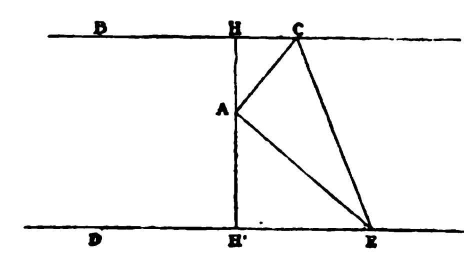
Nota. — **Ont résolu la même question : MM. Sou, de Libourne; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saunier.**

QUESTION 122.

Solution par M. DE LA LAURENCIE, élève au Lycée de Nantes.

Étant donné un point A *entre deux parallèles, tracer un triangle rectangle ayant son sommet de l'angle droit en* A *et les deux autres sommets sur les deux parallèles de manière que sa surface soit minima.*

Supposons le problème résolu. Soient BC, DE les deux parallèles ; HH′ leur perpendiculaire commune passant par le point A. Soient en outre AH $= a$, AH′ $= b$, CA $= x$, EA $= y$, HAC $= \alpha$, H′AE $= \beta$.



La surface du triangle CAE est $\frac{xy}{2}$. Or dans le triangle rectangle HAC on a

$$x = \frac{a}{\cos \alpha}$$

de même

$$y = \frac{b}{\cos \beta}$$

La surface a donc pour expression $\frac{ab}{2 \cos \alpha \cos \beta}$

Pour que cette expression soit minima, il faut que le dénominateur soit maximum. Or $\alpha + \beta = 90° =$ constante et

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) + (\cos (\alpha - \beta)}{2}.$$

$\cos (\alpha + \beta)$ étant constant, $\cos \alpha \cos \beta$ sera maximum

De plus $\frac{p+1}{q}$ surpassant $\frac{p}{q}$ de $\frac{1}{q}$, et $\frac{1}{q}$ devenant infiniment petit quand q devient infiniment grand, il en résulte que $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$ tendent vers la même limite et que, par suite, $\frac{p+1}{q}$ a aussi pour limite a. (*A suivre.*)

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

Généralités. — La théorie des ombres a pour but, connaissant la position d'une ou plusieurs sources de lumière directe, de déterminer sur la surface des corps les portions de ces surfaces qui sont éclairées et celles qui sont dans l'ombre.

La théorie du lavis a pour objet d'étudier les différences d'éclat ou de couleur que présentent ces surfaces en ayant égard :

1° A la manière dont leurs différents éléments reçoivent la lumière directe ou les reflets;

2° Aux positions que ces éléments occupent par rapport au spectateur.

Elle donne la marche à suivre pour rendre ces différences sur les dessins à l'aide de couleurs, couleurs parmi lesquelles nous rangerons l'encre de Chine ou tout autre ton servant à produire les effets de l'ombre.

La théorie du lavis sera basée sur l'étude de trois principes :

1° Le principe des orientations;

2° Le principe des couleurs;

3° Le principe des distances.

Principe des orientations. — L'orientation d'un plan ou d'un élément plan de surface dépend de la position qu'occupe ce plan,

1° Par rapport aux corps lumineux, 2° par rapport aux rayons visuels qui émanent du spectateur.

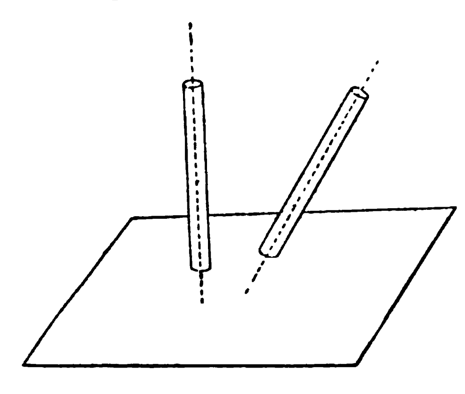
Rayons lumineux et rayons visuels. — Dans le dessin géométrique, les rayons lumineux sont parallèles et ont leurs deux projections inclinées à 45° sur la ligne de terre.

Le spectateur est supposé placé à l'infini, soit au-dessus du plan horizontal, soit en avant du plan vertical, cela dépend de la projection qu'il regarde. Dans tous les cas, les rayons visuels sont perpendiculaires au plan sur lequel se fait la projection.

Corps dépolis et corps polis. — La lumière, en frappant la surface d'un corps, peut être renvoyée de deux manières différentes suivant que ce corps est dépoli ou poli. Dans le premier cas, la lumière est diffusée dans tous les sens; dans le second cas, elle est réfléchie spéculairement.

Expérience sur les corps dépolis. — On prend un plan parfaitement dépoli, une plaque recouverte de plâtre, par exemple, ou de papier blanc non glacé que l'on éclaire par la lumière solaire.

Ce plan s'éclaire uniformément et paraît d'une teinte blanche parfaitement unie.

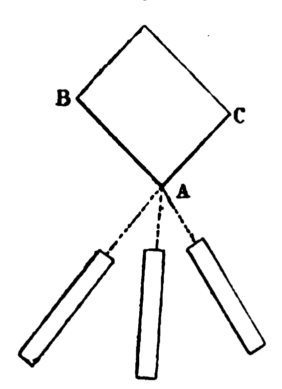


On prend un tube, noirci intérieurement au noir de fumée pour éviter les réflexions intérieures, et à l'aide de ce tube on regarde le plan dans toutes les directions.

L'extrémité ouverte paraît un rond blanc d'un certain éclat, dont il est impossible de saisir les variations quand on change l'inclinaison du tube, excepté lorsque l'on est très-près de l'incidence rasante, auquel cas il se produit

un assombrissement dû aux aspérités de la surface qui se recouvrent les unes les autres et qui présentent chacune leur partie dans l'ombre.

Ces effets sont les mêmes que ceux qui se produisent avec une plaque de métal rougie au feu et devenue source de lumière.

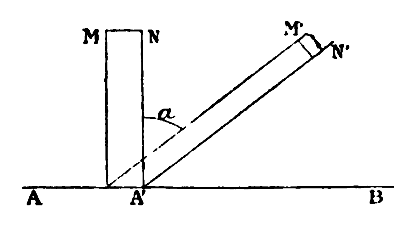


On peut faire l'expérience d'une manière plus concluante. On prend un prisme de plâtre dont l'une des arêtes est bien vive et on l'éclaire de telle sorte que deux de ses faces AB, AC, paraissent également éclatantes.

Avec le tube précédent, on regarde l'arête A, et quelle que soit la direction du tube, les deux faces paraissent également lumineuses.

Conséquences. — 1° Un élément plan d'une surface dépolie se conduit, une fois éclairé par une source de lumière, comme un corps lumineux par lui-même.

2° L'intensité des rayons émis par la surface est proportionnelle au cosinus de l'angle fait par les rayons émis avec la normale à la surface. Nous nommerons cet angle l'angle d'émission. En effet : soit Q la quantité de rayons émis normalement par un élément de surface égal à A; Q' la quantité émise par le même élément sous l'incidence α.



Les premiers forment un cylindre dont la section droite est MN = A.

Les seconds en forment un autre de section droite $M'N' = MN \cos \alpha = A \cos \alpha$. Puisque, vu sous ces deux directions, l'élément paraît également éclatant, c'est que les

quantités de rayons reçus sur l'unité de surface en section droite sont égales dans les deux cas.

Ces quantités sont :

$\frac{Q}{A}$ pour la direction normale, et $\frac{Q'}{A \cos \alpha}$ dans la 2e direction.

On a donc : $\frac{Q}{A} = \frac{Q'}{A \cos \alpha}$ $\quad Q' = Q \cos \alpha$; c. q. f. d.

3° L'éclat apparent d'une surface dépolie ne dépend pas de la position du spectateur, mais uniquement de l'intensité de la source lumineuse et de l'angle sous lequel la lumière directe frappe cette surface.

4° Sur une surface dépolie, éclairée par une source unique de rayons lumineux, les lignes d'égal éclat apparent sont les lignes d'égal éclairement.

Éclairement total. — Éclairement unitaire ou spécifique d'une surface plane. — L'éclairement total d'une surface plane égale à A est la quantité totale Q de lumière reçue par cette surface.

L'éclairement unitaire ou spécifique serait la quantité de lumière $\frac{Q}{A}$ reçue par l'unité de surface.

L'éclairement spécifique est important à considérer. Une surface dépolie nous semblera également éclatante si son éclairement unitaire ou spécifique est le même partout.

Théorème. — L'éclairement unitaire d'un élément de surface est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence des rayons lumineux.

En effet, soit ABCD un prisme à section droite carrée, servant d'enveloppe à toute une série de rayons lumineux en quantité Q, un premier plan P, normal aux rayons lumineux, recevra une quantité de lumière représentée par Q.

Soit A la section droite du prisme, l'éclairement unitaire du plan P sera : $E = \frac{Q}{A}$.

Un plan P' incliné sur le plan précédent d'un angle α sera coupé par le prisme suivant une section de surface égale

à $\frac{A}{\cos \alpha}$. La quantité de lumière reçue sera toujours Q et l'éclairement unitaire.... $E_1 = \frac{Q \cos \alpha}{A}$.

On a donc : $E_1 = E \cos \alpha$; c. q. f. d.

Conséquence. — Sur une surface dépolie, les lignes d'égal éclairement et par suite d'égal éclat sont les lignes d'égale incidence.

Rayons de reflets ou indirects. — Si la lumière solaire était unique, si elle ne donnait pas lieu à des reflets, tous les points dans l'ombre seraient absolument noirs. Or, il n'en est rien ; ces points sont dans des demi-teintes d'éclat variable. Les ombres sont donc éclairées par des rayons indirects que nous nommerons rayons de reflets et dont nous allons étudier la nature et les effets.

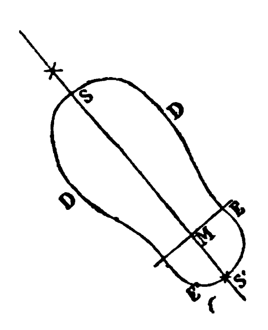
Les rayons de reflets ou indirects peuvent provenir de la masse d'air environnante ou des objets situés dans le voisinage.

Nous ne nous occuperons de cette seconde espèce de reflets que dans le dessin d'architecture, et nous admettrons ici que les objets que nous représentons sont comme des aérostats isolés au milieu de l'atmosphère et à une distance assez grande de la terre pour ne pas en éprouver les reflets.

Courbe représentative des reflets atmosphériques. — Sans chercher à les justifier théoriquement, nous admettrons les résultats qui suivent ; ils ne sont pas complètement exacts, mais nous en tirerons des conséquences simples se rapprochant suffisamment de la réalité.

Lorsqu'on regarde le ciel avec une lunette dont l'objectif est remplacé par un verre dépoli, l'éclat maximum de ce verre a lieu lorsque l'on fixe le soleil. Lorsque la direction s'en éloigne, l'éclat diminue très-rapidement, si bien que pour un angle de 30° du soleil, l'éclat est environ quatre fois plus faible que pour un angle de 3°. Cet éclat passe par un minimum qui répond environ à un angle de 90°, augmente ensuite faiblement, et repasse par un maximum relatif pour un angle de 180°, c'est-à-dire par le point du ciel directement opposé au soleil.

Soit M un élément plan très-petit sur lequel agissent toutes les sources de lumière directe ou indirecte émanant du soleil ou de l'atmosphère. Si de ce point nous menons des rayons vecteurs dans toutes les directions, et si nous portons sur ces rayons des longueurs proportionnelles aux intensités lumineuses dont nous venons de parler, nous aurons une courbe représentative qu'il suffira de faire tourner autour de SM pour avoir la surface représentative des éclairements dus à la lumière directe et aux reflets atmosphériques sur un plan qui serait chaque fois normal aux rayons vecteurs.



Cette courbe présente deux maxima : le premier, très-considérable, correspond aux rayons directs SM ; le second, beaucoup moins intense, correspond aux rayons inverses S'M ; et un minimum que l'expérience seule pourrait déterminer et que nous ferons correspondre, pour simplifier, aux directions ME, ME' perpendiculaires sur le rayon direct.

Rayon atmosphérique principal. — Les choses se passeront donc à peu près comme si nous avions deux soleils, l'un dirigé suivant la direction MS, qui serait le plus lumineux et qui nous enverrait les rayons directs; l'autre dirigé suivant MS' et qui nous lancerait des rayons que nous appellerons *rayons atmosphériques principaux.*

Il faudrait y joindre, cependant, une infinité d'autres sources de lumière symétriquement placées par rapport à la ligne SS' et envoyant des rayons dont les effets sur un plan donneront en se totalisant des éclairements représentés en grandeur par les rayons vecteurs MD, ME normaux aux plans. Nous nommerons ces rayons indirects les *rayons atmosphériques ordinaires.*

Conséquences. — 1° Si nous masquons le soleil à un

élément de surface, cet élément sera éclairé par les rayons indirects qui lui viendront du ciel;

2° Plus il y aura de rayons indirects qui seront masqués, plus l'ombre sera noire, et inversement;

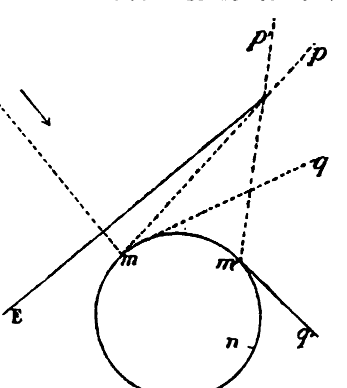
3° De deux éléments placés dans l'ombre, celui qui sera normal au plus grand rayon vecteur sera le plus éclairé;

4° L'ombre portée par un corps sur un autre diminue d'intensité lorsque la distance relative augmente : en effet, lorsque l'objet qui porte ombre est placé près, il masque un plus grand nombre de rayons atmosphériques que lorsqu'il est loin;

5° La ligne d'ombre propre, ayant ses éléments normaux à la direction des rayons vecteurs les moins intenses, sera plus noire que tout autre élément de surface pris dans l'ombre propre, sans être cependant complètement noire;

6° Lorsqu'une surface courbe possède une de ses régions dans l'ombre portée par une autre surface, cette région ne reçoit plus ni les rayons directs ni les rayons atmosphériques voisins des rayons directs et qui sont les plus intenses.

Prenons deux éléments de surface, l'un voisin de l'incidence normale *m* et l'autre *m'* voisin de la ligne d'ombre propre :



Pour fixer les idées imaginons que l'écran E, qui projette une ombre soit très-grand. L'élément *m* reçoit les rayons atmosphériques compris entre le plan *mp* et le plan tangent *mq*, lesquels viennent le frapper très-obliquement, et l'éclairent très-peu.

L'élément *m'*, à son tour, reçoit les rayons bien plus nombreux, compris entre *m'p'* et *m'q'* parmi lesquels un grand nombre le frappent normalement.

L'élément *m'* sera donc plus éclairé que *m*.

Conclusions. — (A) Dans l'ombre propre, un élément *n* sera d'autant plus éclairé par l'ensemble des rayons

atmosphériques qu'il l'eût été davantage par le rayon atmosphérique principal supposé existant seul.

(B) Dans l'ombre portée, un élément *m* ou *m'* sera d'autant plus sombre qu'il eût été plus clair, si cette ombre portée n'eût pas existé.

(C) Les lignes d'égales teintes dans l'ombre portée seront les mêmes que si cette ombre n'existait pas; seulement les zônes qu'elles sépareront seront d'autant plus noires qu'elles eussent été plus éclairées sans l'existence de cette ombre portée.

(D) Dans l'ombre propre, les lignes d'égales teintes se traceront en faisant l'hypothèse d'un soleil fictif, existant seul et directement opposé au soleil réel. Par conséquent, si le corps est dépoli, les lignes d'égales teintes étant les lignes d'égale incidence, on les obtiendra en continuant le tracé de celles qui correspondent à la partie éclairée de la surface et comme si les rayons directs étaient susceptibles de les atteindre.

Lignes d'égales teintes sur une sphère dépolie (Épure). — Le rayon lumineux a été rendu parallèle au plan vertical, nous désignerons par φ l'angle qu'il fait avec la ligne de terre.

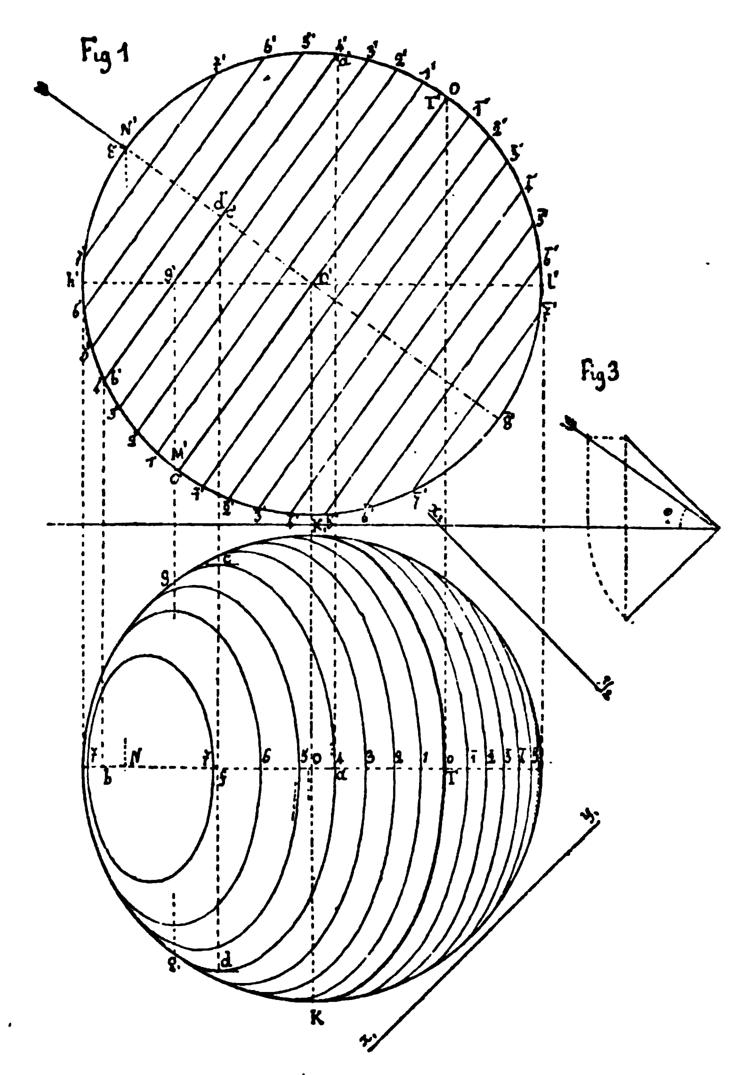
On a $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le plan MN d'incidence normale est le point le plus clair. Les lignes d'égale incidence et par suite d'égales teintes s'obtiendront en coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux. Le nombre de ces plans est arbitraire ainsi que leurs distances relatives.

On a pris 7 plans équidistants, ce qui correspond à des angles d'incidence dont les cosinus décroissent en progression arithmétique.

Les lignes ainsi obtenues ont été désignées par des nombres positifs dans la partie en lumière et par des nombres négatifs dans celle qui est dans l'ombre. La ligne d'ombre propre est la ligne de teinte n° 0.

En prenant pour nouvelle ligne de terre la droite à 45°,



x_1 y_1 la sphère se présente comme si elle était en projection verticale avec le rayon lumineux ramené à 45°.

En prenant x_2 y_2 pour ligne de terre, on voit la sphère en projection horizontale.

Remarque. — Dans une sphère dépolie, la zone la plus claire est très-voisine du contour apparent.

(*A suivre.*)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Combier**, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

La note qui suit, en s'appliquant à quelques problèmes dont la solution géométrique est connue, a pour but simplement de montrer le secours que peut rendre le calcul dans l'étude des solutions des problèmes de géométrie, et comment on peut, dans certains cas, déterminer les éléments d'une figure qu'on ne pourrait construire avec la règle et le compas, d'après les seules données.

I. **Théorème**. — Soient a, b, c les côtés d'un triangle rangés par ordre de grandeur croissante;

s sa surface;

a' b' c' les hauteurs de ce triangle respectivement opposées aux côtés a, b, c.

Je suppose qu'il soit possible de construire un triangle avec a', b' et c' pour côté (ce qui n'a pas toujours lieu), et je désigne par s' la surface de ce second triangle en même temps que j'appelle a'', b'', c'' ses trois hauteurs.

Avec a'', b'', c'' pour côtés, je décris un troisième triangle ayant pour hauteurs correspondantes a''', b''', c'''; puis avec les trois hauteurs de ce troisième triangle pour côtés, j'en construis un quatrième et ainsi de suite indéfiniment; je dis :

1° *Que tous les triangles de rang impair sont semblables entre eux, que tous les triangles de rang pair sont également semblables entre eux, mais non aux premiers.*

2° *Que la série des surfaces de tous ces triangles* s, s', s'', *etc., forme une progression géométrique décroissante.*

En effet on a : $2s = aa' = bb' = cc'$

$$2s' = a'a'' = b'b'' = c'c''$$

et par suite
$$\frac{s'}{s} = \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c} \qquad (1)$$

Donc le troisième triangle construit avec a'', b'' et c'' pour côtés est semblable au premier construit avec a, b et c pour

côtés, et si on appelle s'' la surface de ce troisième triangle, on aura :

$$\frac{s''}{s} = \left(\frac{a''}{a}\right)^2. \qquad (2)$$

Les surfaces des triangles semblables étant entre elles comme les carrés des côtés homologues, la comparaison des équations (1) et (2) donne

$$\frac{s'^2}{s^2} = \frac{a''^2}{a^2} = \frac{s''}{s}$$

d'où

$$s'^2 = ss''$$

La surface s' est donc moyenne proportionnelle entre celle du triangle précédent et celle du suivant.

Le théorème énoncé est donc démontré.

La raison de cette progression dépend du rapport des côtés du triangle qui sert de point de départ.

II. **Théorème.** Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle;

s sa surface;

a', b', c' les trois lignes médianes correspondant aux côtés a, b, c;

s' la surface d'un second triangle construit avec les trois lignes médianes du premier triangle, pour côtés a'', b'', c'' les trois lignes médianes de ce second triangle;

s'' la surface d'un troisième triangle construit avec a'', b'', c'' pour côtés;

s''' la surface d'un quatrième triangle construit avec les trois lignes médianes du précédent et ainsi de suite indéfiniment.

Je dis :

1° *Que tous les triangles de rang impair sont semblables entre eux, que tous les triangles de rang pair sont également semblables entre eux, mais non aux autres; que le rapport de similitude d'un triangle au suivant dans chaque série est constant et égal à 3/4.*

2° *Que la série des surfaces* s, s', s'', s''',... *forme une progression géométrique dont la raison est 3/4.*

En vertu d'un théorème connu on a dans le premier triangle

$$\begin{cases} 4a'^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4b'^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4c'^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{cases} \qquad (1)$$

de même que dans le second

$$4a''^2 = 2b'^2 + 2c'^2 - a'^2$$

et en vertu des équations (1)

$$4a''^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$$

d'où $\qquad a''^2 = \frac{9}{16}\,a^2 \qquad a'' = \frac{3}{4}\,a$

on aura de même $\qquad b'' = \frac{3}{4}\,b$

$$c'' = \frac{3}{4}\,c.$$

Donc le troisième triangle est semblable au premier comme il l'est au cinquième, etc., et le rapport de similitude d'un triangle de la série impaire, ou de la série paire au précédent est bien égal à $3/4$.

Pour calculer la surface s' on se servira de la formule

$$s' = \frac{1}{4}\sqrt{4a'^2b'^2 - (a'^2 + b'^2 - c'^2)^2}$$

dans laquelle on remplacera a'^2, b'^2 et c'^2 par leur valeur tirée des équations (1) et on aura

$$s' = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4} - \frac{(5c^2 - a^2 - b^2)^2}{16}}$$

et en effectuant les calculs

$$s' = \frac{1}{16}\sqrt{9(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)}$$

$$s' = \frac{3}{16}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} = \frac{3}{4}\,s$$

mais le rapport de similitude du triangle s'' au triangle s étant $3/4$ on a : $\quad s'' = \frac{9}{16}\,s = \frac{3}{4}\,s'.$

La série des surfaces s, s', s'', ... forme donc une progression géométrique dont la raison est $3/4$.

La somme des surfaces $s + s' + s'' + \ldots\ldots$ prolongée indéfiniment a donc pour limite

$$\frac{s}{1 - \frac{3}{4}} = 4s.$$

(*A suivre.*)

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le Dr **Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*, voir tome II page 311.)

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Les sciences appliquées, nous l'avons déjà fait remarquer, ne jouissaient pas, à l'école platonicienne, de la même faveur que les sciences abstraites. Par suite, l'astronomie n'a pas fait de progrès sensibles dans la période qui s'est écoulée depuis *Platon* jusqu'à *Aristarque*. La spéculation philosophique avait encore des racines trop profondes pour que les efforts isolés de quelques hommes pussent ébranler son ancienne domination. Le grand *Platon* lui-même était un adepte zélé du mysticisme pythagoricien, et, partant, un ennemi déclaré de toute conception plus réelle, plus tangible. Nous n'approfondirons pas ici ses opinions spéciales sur l'essence des choses de la nature, opinions qu'il a fait connaître dans plusieurs de ses ouvrages, particulièrement dans le *Timée*; elles n'ont aucune importance sérieuse au point de vue du développement ultérieur de l'astronomie. Nous nous bornerons à un rapide examen des théories du mathématicien déjà cité *Eudoxos* de *Knide*.

Ce dernier résida longtemps en Égypte; et, d'après *Sénèque* (*Quæst. nat.*, l. VII), il rapporta de ce pays la connaissance des mouvements planétaires. Quoi qu'il en soit, il est certain qu'*Eudoxos* a, le premier, cherché à expliquer le mouvement irrégulier des planètes; les Ioniens et les Pythagoriciens ne l'avaient pas encore étudié de près; ils avaient attribué à chaque planète une sphère de rotation déterminée, unique. *Aristote* (*Métaph.*, XII, 8) nous expose

les essais d'*Eudoxos* pour expliquer ces irrégularités. Il avait, à cet effet, supposé quatre sphères dans lesquelles la planète se mouvait en même temps : la première sphère était celle des étoiles fixes; c'était celle qui produisait le mouvement diurne; la seconde déterminait le mouvement dans l'écliptique et donnait la longitude; la troisième avait son axe également perpendiculaire à l'écliptique, mais elle tournait dans une direction opposée à la direction de la seconde sphère, ce qui devait expliquer le mouvement rétrograde; et, enfin, la quatrième servait à expliquer les changements en latitude. Pour les mouvements du soleil et de la lune, *Eudoxos* n'admettait que les deux premières et la dernière sphère. Ces hypothèses d'*Eudoxos*, bien que difficiles à comprendre et correspondant peu aux phénomènes naturels, trouvèrent un crédit assez considérable chez les astronomes de l'époque; elles ont, dans tous les cas, beaucoup contribué à l'édification de la théorie d'*Hipparque*. *Eudoxos* aurait été aussi un habile observateur; on montrait à *Knide*, longtemps après sa mort, la tour où il avait fait ses observations.

A cette époque, les sciences physiques reçurent une impulsion puissante et subirent une réforme féconde de la part d'un des plus grands philosophes de tous les temps, du génie universel de l'antiquité, d'*Aristote*, élève de *Platon*. Cet homme célèbre naquit en l'an 384 avant J.-C. à *Stagira*, en Macédoine. Il déploya dès sa jeunesse un grand zèle à s'instruire et à pousser ses investigations dans toutes les parties de la science humaine. La renommée de *Platon* l'attira à *Athènes* dans sa dix-septième année. Il profita pendant vingt ans des enseignements de *Platon*; puis, après la mort de ce philosophe, il se rendit à l'appel de Philippe de Macédoine qui lui confia l'éducation de son fils Alexandre. *Aristote* exerça une grande influence sur l'esprit et le caractère du fils de Philippe. Lorsqu'Alexandre entreprit la campagne de Perse, Aristote se retira à Athènes et y fonda au Lycée la célèbre école péripatéticienne, tandis que les élèves de Platon, sous la conduite de Xénocrate, occupaient l'Académie.

Des persécutions qu'il s'attira par ses théories et provoquées par la défaveur de son ancien élève, le grand Alexandre, le forcèrent, dans un âge avancé, à quitter Athènes et à se retirer à Chalkis dans l'île d'*Eubœa* où il put s'adonner, sans trouble, à ses études favorites jusqu'à sa mort qui arriva en l'an 321 avant J.-C.

Le principe de la philosophie naturelle d'Aristote consiste à rassembler les observations et les expériences afin de remonter, par déduction logique, aux principes des choses. Et cette voie aurait été vraiment la seule bonne pour conduire à la connaissance des phénomènes et des lois de la nature, si les subtilités dialectiques de sa métaphysique ne l'avaient souvent fait aboutir aux théories les plus bizarres. Il voulait aussi transporter dans le domaine des sciences naturelles la logique rigoureuse des mathématiques pures, et il commit la faute grave de subordonner la matière, les faits matériels, à la forme. Ses conclusions hardies, souvent « *géniales* », souvent étranges, furent rarement bien comprises, et fournirent à la postérité prétexte aux interprétations les plus diverses. C'est ainsi que les théories du premier et du plus grand *empirique* de l'antiquité eurent la singulière fortune de rester pendant des siècles les lois fondamentales de la théologie scolastique du moyen âge, et que la gloire d'avoir donné définitivement la victoire et la suprématie aux sciences de la nature ne se rattache pas au nom d'Aristote. Mais son grand mérite reste toujours d'avoir, par son intelligence claire et pénétrante ainsi que par sa logique rigoureuse, porté l'unité et l'ordre dans le grand chaos des sciences, et d'avoir ainsi prescrit à chacune d'elles sa voie précise et certaine.

C'est dans les écrits « Περὶ τοῦ οὐρανοῦ », « Προβλήματα μηχανικά », et « 'Αχροάσεις φυσικαί », qu'Aristote a consigné ses opinions sur l'astronomie, la mécanique et l'histoire naturelle.

Nous serions entraînés trop loin si nous voulions examiner de près ses nombreuses propositions et théories. Nous n'ajouterons que quelques mots pour caractériser sa philosophie. Dans le livre « Περὶ τοῦ οὐρανοῦ », Aristote s'exprime comme il suit sur la forme sphérique du ciel et de l'univers : « Le

cercle étant la plus parfaite de toutes les surfaces parce qu'il n'est limité que par *une seule* ligne, fermée en elle-même, la sphère est aussi le plus parfait de tous les corps, car elle se produit par la rotation du cercle. Mais le ciel doit avoir la forme la plus parfaite; donc il est sphérique. » En outre, il n'admet en dehors du ciel aucun espace vide, ce qui est aussi pour lui une preuve de la forme sphérique du ciel, parce qu'un corps anguleux, dans sa rotation, ne remplirait pas partout le même espace. — Au sujet de la forme sphérique de la terre, Aristote reste plus volontiers sur le terrain de l'observation. Ici il fut le premier qui présenta comme preuves les raisons admises encore aujourd'hui. « Si l'on s'avance, dit Aristote, vers l'occident ou vers le septentrion, les étoiles se lèvent devant nous de plus en plus haut; par conséquent la terre est recourbée dans les deux directions. » Il conclut en outre la forme sphérique de la terre de ce fait que, dans les éclipses de lune, l'ombre de la terre est toujours circulaire. Enfin il en donne comme cause la tendance des parcelles pesantes de la terre à tomber vers le centre de celle-ci; c'est pourquoi elles doivent être situées à égale distance autour de son centre, et former une sphère.

La théorie du mouvement appartient aux spéculations les plus subtiles de la métaphysique d'Aristote, mais nous ne développerons point les grandes et étranges séries d'argumentations et de conclusions de notre philosophe; ce serait fatigant pour le lecteur. Pour terminer, nous nous bornerons à citer sa démonstration de la perfection du monde. «Les choses, dit-il, dont le monde se compose, sont toutes des corps solides; elles ont donc *trois* dimensions. Mais *trois* est le plus parfait des nombres : il en est le premier, car *un* n'est pas encore un nombre et au lieu de *deux* on peut dire *un couple* (1); mais *trois* est le nombre par lequel nous pouvons désigner *tout*; en outre, le nombre *trois* a un commencement, un milieu et une fin. » — Cette dialectique de sophiste serait bien propre à diminuer considérablement à nos yeux

(1) *Beide*; ἄμφω en grec. Le français n'a pas de synonyme comme l'allemand et le grec.

la gloire d'Aristote, si nous n'apercevions dans d'autres directions l'éclat de son esprit pénétrant et lucide.

Les mathématiques pures n'étaient considérées, dans l'école d'Aristote, que comme une science auxiliaire; c'est pourquoi cette école n'a pas donné à cette science d'accroissement remarquable. Aristote était d'ailleurs très-versé dans les mathématiques, témoin les nombreux passages de ses écrits dans lesquels il s'appuie sur des théorèmes mathématiques ou bien les discute. Les principes fondamentaux exercèrent aussi son talent dialectique, et l'on doit à sa logique rigoureuse l'avantage, qui ne saurait être estimé trop haut, d'une démonstration plus claire.

Bien que nous ne puissions attribuer à Aristote ou à ses élèves aucun progrès essentiel en mathématiques, cependant deux d'entre eux ont fait une œuvre utile : ils ont exposé le développement historique de la science jusqu'à cette époque, et, par là, ils ont contribué indirectement à la réunion des éléments par Euclide. Ces deux disciples ont déjà été cités plusieurs fois; ce sont *Théophraste* d'*Erèse*, et *Eudème* de *Rhodes*. Tous deux ont écrit une histoire de la géométrie et de l'astronomie jusqu'à Aristote; malheureusement ces deux ouvrages sont perdus. C'est particulièrement à ces dernières *sources* que puisèrent les auteurs qui ont écrit sur les découvertes astronomiques et mathématiques des philosophes grecs. C'est à *Eudème* que nous devons les quelques rayons de lumière qui nous permettent parfois de jeter un rapide coup d'œil dans la période ténébreuse qui précède *Euclide*.

Il nous reste à citer trois hommes qui vivaient à l'époque d'Aristote et qui se sont distingués dans l'astronomie et la géographie. Ce sont *Dikaearchos* de Messine, *Autolykos* de Pitomœa, et *Pytheas* de Massilia (Marseille).

Le premier est connu pour ses mesures de hauteur de diverses montagnes par des procédés géométriques, et pour sa géographie de la Grèce. Nous avons d'*Autolykos* deux ouvrages d'astronomie sur l'ascension et la déclinaison des étoiles, et sur la sphère mobile; ils ont été traduits et expliqués par divers commentateurs. Le plus célèbre est

Pytheas, né dans la colonie grecque de Marseille; il se fit dans l'antiquité une grande renommée par ses voyages fabuleux. On rapporte qu'il pénétra, dans le nord de l'Europe, jusqu'à l'île de *Thulé* qui est aujourd'hui généralement désignée sous le nom d'Islande. Il se distingua aussi en astronomie par les observations qu'il fit à Marseille; il arriva à déterminer les latitudes de plusieurs stations d'une manière assez précise. Strabon, dans ses écrits, parle de ce savant en plusieurs endroits et fait de son mérite un grand éloge.

Lorsque la nation grecque eut son indépendance ravie par les rois de Macédoine, Philippe et Alexandre, les sciences se retirèrent toujours davantage de son sein. Athènes ne fut pas le centre autour duquel gravitèrent les forces vives de l'empire macédonien. Aussi l'Égypte, avec sa nouvelle ville Alexandrie, s'éleva-t-elle rayonnante au-dessus de tous les autres États que fit naître le partage de l'empire, et la Grèce fut éclipsée et reléguée au dernier plan, dans l'obscurité. L'étude rationnelle des sciences positives fit place en Grèce à une philosophie spéculative toujours plus profonde et plus nuageuse, tandis que sous la direction de *Ptolémée* elle fut cultivée avec le plus grand éclat, et atteignit cette élévation admirable qui, durant seize siècles, laissa bien au-dessous d'elle la culture européenne.

(*A suivre.*)

CONCOURS ACADÉMIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

Concours de 1867.

— **Résoudre le système d'équation** $ax + by = 1$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$$

dans lesquelles a **et** b **désignent des quantités positives. Discuter.**

— **Prouver que, si l'on mène la bissectrice de chacun des angles extérieurs d'un triangle et que l'on prolonge chaque bissectrice jusqu'au côté opposé à l'angle, les trois points d'intersection sont en ligne droite.**

Concours de 1868.

— Prouver que, si trois circonférences ont une corde commune, si d'un point de l'une d'elles on mène des tangentes aux deux autres, le rapport de ces tangentes est constant.

Concours de 1869.

— Résoudre l'équation $\frac{p}{\text{coséc } x} + \frac{q}{\text{séc } x} = r$.

— Etant données deux circonférences sécantes, on mène les quatre tangentes aux points d'intersection; puis on projette le centre de chacune des circonférences sur chacune de ces tangentes, ce qui donne huit points qui se réduisent à six; démontrer que ces six points sont sur une même circonférence.

Concours de 1870.

— Inscrire dans un quadrilatère donné un parallélogramme de surface donnée, et dont les côtés sont parallèles aux diagonales du quadrilatère.

— On a, dans un plan, deux circonférences de centres C et C′, qui se coupent aux points I et J. D'un point quelconque de IJ, on mène une tangente MA à la circonférence C, et une tangente MA′ à la circonférence C′. On joint les points de contact A et A′ par la corde AA′, qui rencontre les circonférences B et B′. Démontrer que les rayons CA, C′B′ sont parallèles, ainsi que les rayons CB et C′A′.

— Justifier la formule $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, dans laquelle a, b, c, d, représentent des nombres quelconques.

Concours de 1872.

— Etant données deux tangentes à une circonférence, mener, par un point de la circonférence, une tangente limitée aux deux premières, telles que la partie comprise entre les deux tangentes soit d'une longueur donnée.

— Résoudre le système $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.
$$xy + xz - yz = 7,$$
$$x + y + z = 6.$$

Concours de 1873.

— On donne un cercle et deux tangentes rectangulaires. Mener une troisième tangente telle que le triangle formé par ces trois tangentes ait une surface donnée. Maximum et minimum du triangle.

— Inscrire et circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire. Calculer les rayons de ces sphères : 1° dans le cas d'une pyramide triangulaire régulière dont les arêtes sont a et b; 2° dans le cas d'un tétraèdre régulier.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

CAEN 1862.

— Trouver les dimensions d'un parallélépipède rectangle connaissant la somme des douze arêtes, la somme des faces latérales et la somme des bases.

DIJON 1873.

— Une droite étant donnée par ses traces, on demande de construire les traces du plan passant par cette droite et faisant un angle donné avec le plan qui la projette sur le plan horizontal.

— Par un point pris dans le plan d'un angle droit, on mène une droite mobile rencontrant les deux côtés de cet angle. Quel est de tous les triangles rectangles que l'on peut former de cette manière, celui qui a l'aire minima?

— Calculer les longueurs des bissectrices intérieures des trois angles d'un triangle rectangle en fonction des côtés de l'angle droit.

— Couper un tronc de cône à bases parallèles par un plan parallèle aux bases de façon que la surface latérale soit coupée en deux parties équivalentes.

— On donne une circonférence de rayon R et une droite située à une distance d du centre; construire un carré dont un côté soit une corde de la circonférence et dont le côté opposé soit sur la droite. — Discuter.

— Construire un triangle isoscèle connaissant la base a et la longueur b des médianes aboutissant aux extrémités de cette base. Exprimer la valeur commune de ces côtés en fonction de a et b.

— Les traces d'un plan font avec la ligne de terre des angles de 30° et 45°. On demande les angles formés par ce plan avec les plans de projection et avec un plan de profil.

GRENOBLE 1855.

— Un convoi parti à 8 h. 30 m. du matin d'une des extrémités d'un chemin de fer de 471 kilomètres, doit mettre 6 h. 40 m. pour atteindre l'autre extrémité; on veut qu'un autre convoi parti à 9 h. 40 m. rejoigne le premier à 356 kilomètres du point de départ; quelle doit être la vitesse moyenne de ce second convoi?

— En supposant que la terre soit une sphère parfaite, trouver le rapport de la zone torride à la surface de la terre; on sait que les tropiques sont à 23° 27′ de l'équateur.

MARSEILLE 1858.

— Étant donnés les trois côtés d'un triangle ABC, savoir :

$$AB = 1750^{m}$$
$$BC = 1520^{m}$$
$$AC = 1600^{m}$$

trouver la longueur de la bissectrice de l'angle A.

— Un triangle équilatéral, un carré et un cercle ont chacun un périmètre de 4 mètres. Trouver le rapport de leurs surfaces.

MARSEILLE 1859.

— Peut-on augmenter d'une même quantité les lignes 1, 2, 3 de manière à rendre possible la construction d'un triangle rectangle? Avec les résultats obtenus, calculer les angles de ce triangle.

MARSEILLE 1860.

— Une bille va de A en B, après avoir touché la bande CD d'un billard; on donne AB = 2 mètres. Les distances des points A et B à la bande CD sont respectivement 1 mètre et 1^{m}, 50. Trouver la longueur du chemin que parcourt la bille.

— On fait tourner un rectangle autour de ses deux côtés. Les deux volumes sont respectivement 40000 et 50000 mètres cubes. Trouver la diagonale du rectangle.

NANCY 1857.

1. — Une sphère creuse en cuivre ayant 0^{m}, 35 pour diamètre de surface extérieure est successivement pesée pleine de mercure et pleine d'eau ; le rapport du premier poids au deuxième est égal à 5,20. On demande le volume de la couche sphérique. — Densité du cuivre, 8,78 ; densité du mercure, 13,60.

2. — Étant donné un cercle de 3^{m}, 50 de rayon, on mène une corde dont la longueur est 1^{m},75. On demande en centimètres carrés les aires des deux surfaces suivant lesquelles le cercle est ainsi partagé.

3. — Mener une tangente commune à deux circonférences. En appelant r et r' les rayons de ces circonférences, on donne $r = 0{,}03$; $r' = 0{,}05$. On demande quelle doit être la distance des centres pour que la tangente commune fasse un angle de 30° avec la ligne des centres. On examinera le cas de la tangente commune intérieure et de la tangente commune extérieure.

NANCY 1858.

1. — Partager graphiquement, à l'aide d'une circonférence concentrique, l'aire d'un cercle de rayon donné en deux parties qui doivent être entre elles comme les nombres 3 et 4. — En supposant le rayon de la circonférence donnée égal à $2^m,50$, calculer le rayon de la circonférence donnée à un centimètre près.

2. — Dans un cercle dont le diamètre est égal à 5^m, on a inscrit un rectangle dont l'un des côtés est égal à 4^m. Par les sommets de ce rectangle, on mène des tangentes qui forment un quadrilatère circonscrit au cercle; on demande la surface de ce quadrilatère, ainsi que ses angles.

NANCY 1860.

1. — Un mobile descend un plan incliné, en parcourant une distance égale à 35^m. La projection de ce chemin sur un plan horizontal est égale à 18^m. Le coefficient de frottement est 0,20. On demande le temps que mettra le mobile à parcourir la distance de 35^m.

2. — La surface d'une sphère est 32 mètres carrés; déterminer le volume d'un segment dont la base est déterminée par un plan sécant mené à une distance du centre égale à $0^m,50$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 123.

Solution par M. Cordeau, élève à l'École Lavoisier (Paris).

Dans le cas douteux du triangle, si l'on connaît A, a, b *et que l'on considère les deux solutions:*

1° *Les centres des deux cercles inscrits et des cercles ex-inscrits touchant le côté* c *sont sur une même circonférence;*

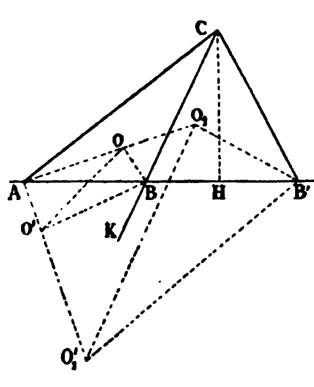
2° *Le produit des rayons des deux cercles inscrits et des deux cercles ex-inscrits touchant le côté* b *est égal au produit des surfaces des deux triangles;*

3° *La somme des rayons des deux cercles inscrits et des cercles ex-inscrits touchant le côté* a *est égale au double de la hauteur commune aux deux triangles.*

(Tucker — *Educational Times.*)

1° Dans le quadrilatère inscriptible $O_1B'O'_1A$, l'angle $O_1B'A$ est égal à l'angle $O_1O'_1A$.

Mais les angles ABK, CBB' sont égaux comme opposés par le sommet et comme le triangle CBB' est isoscèle, l'angle ABK est égal à l'angle CBB' et par suite la moitié de cet angle ou ABO' est égal à $O_1B'A$ et par suite à $O_1O'_1A$.



Dans le quadrilatère inscriptible OAO'B l'angle AOO' est égal à l'angle ABO' et par suite à AO'_1O_1. Donc son supplément $O'OO_1$ est égal au supplément de $O'O'_1O_1$ et le quadrilatère $OO'O_1O'_1$ est inscriptible.

2° On a $r = \frac{S}{p}$, $R = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, dans le triangle ABC

et $r' = \frac{S'}{p'}$, $R' = p' \operatorname{tg} \frac{B'}{2}$, dans le triangle AB'C

mais $\frac{B}{2}$ est le complément de $\frac{B'}{2}$ donc $\operatorname{tg} \frac{R'}{2} = \operatorname{cotg} \frac{B}{2}$

et on a $rr'RR' = SS'$

3° On a les relations suivantes entre r, le rayon du cercle inscrit dans ABC, r' celui du cercle inscrit dans AB'C, R celui du cercle ex-inscrit au triangle ABC, le long de BC et R' celui du cercle ex-inscrit au triangle AB'C le long de B'C.

$$\frac{r}{p-a} = \frac{r'}{p'-a} = \frac{R}{p} = \frac{R'}{p'} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

d'où $$\frac{r + r' + R + R'}{p - a + p' - a + p + p'} = \frac{p-a}{r}$$

ou $$\frac{r + r' + R + R'}{2(p-a) + 2p'} = \frac{\frac{S}{p}}{p-a} = \frac{2p(p-a)}{hc}$$

Mais dans le triangle ABC, $a^2 = b^2 + c^2 - 2c.\ AH = b^2 + c^2 - 2c(c + BH)$

d'où $(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2 = 2bc) + 2c(c + BH)$

d'où $(b + c)^2 - a^2 = 2c\,(b + c + \mathrm{BH})$

ou encore $4p\,(p - a) = 2c\,(b + c + \mathrm{BH})$

on a donc $\dfrac{r + r' + \mathrm{R} + \mathrm{R}'}{2\,(p - a) + 2p'} = \dfrac{h}{b + c + \mathrm{BH}}$

mais $2p'\ a + b + c + 2\mathrm{BH})$

d'où $2(p - a) + 2p' = 2(b + c + \mathrm{BH})$

Donc cette expression devient

$$\frac{r + r' + \mathrm{R} + \mathrm{R}'}{b + c + \mathrm{BH}} = \frac{2h}{b + c + \mathrm{BH}}$$

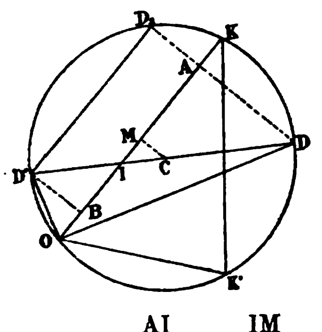
et enfin $r + r' + \mathrm{R} + \mathrm{R}' = 2h.$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Sou, de Libourne, et d'Ocagne, du collége Chaptal, qui nous a envoyé une bonne solution quoique un peu longue.

QUESTION 125.

Solution par M. Deslais, élève au Lycée du Mans.

On donne un cercle C, *un diamètre* DD' *et une corde* KK *perpendiculaire à ce diamètre. On prend sur la circonférence un point* O, *que l'on joint aux extrémités* D, D', K *et* K' *du diamètre et de la corde donnés. Démontrer que la somme des projections* OD *et* OD' *sur* OK *est égale à* OK *et la différence des projections égale à* OK'. (Duval.)



Les projections de OD et de OD' sur OK sont OA etOB. On voit donc que pour démontrer la première partie du problème, il suffit de prouver que OB = AK.

Du centre C abaissons sur OK la perpendiculaire CM. Les triangles IAD, ICM étant semblables, on a

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}} = \frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{AI} - \mathrm{IM}}{\mathrm{DI} - \mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{CD}}$$

De même, à cause des triangles semblables IBD' et ICM,

on a $$\frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{ID'}} = \frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{IB} + \mathrm{IM}}{\mathrm{ID'} + \mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{CD'}}.$$

Donc $\frac{AM}{CD} = \frac{BM}{CD'}$ et comme $CD = CD'$

$AM = BM$ et par suite $AK = OB$.

La différence des projections est AB. Prolongeons DA en D_1. $AD_1 = BD'$ et par suite $D'D_1$ est égale et parallèle à AB. De plus arc OD' = arc KD_1, arc KD = arc $K'D$, par suite arc D_1D' = arc OK' et $C_1D' = OK'$ ou $AB = OK'$.

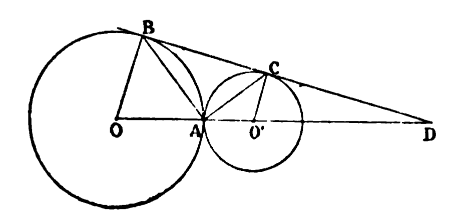
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Legay, de Tarbes; Chavanon, de Lyon; Lacroix, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne; d'Ocagne, collége Chaptal; Vermand, de Saint-Quentin; Roulleau, Gélinet, d'Orléans; Longueville, de Charleville; Bucheron, de Moulins.

QUESTION 126.

Solution par M. Bompard, Collége Stanislas.

Etant données deux circonférences tangentes extérieurement au point A, *mener par ce point deux cordes dont les segments* AB, AC *situés respectivement dans les deux circonférences soient rectangulaires et égaux entre eux.* (Hallé.)

On sait que si l'on mène deux droites rectangulaires par le point de contact de deux circonférences tangentes, les rayons aboutissant au point où chacune coupe respectivement chaque circonférence, sont parallèles, et par suite la droite BC passe par le centre de similitude externe. BA étant égal à AC, l'angle ABC vaut 45°. Soit donc D le centre de similitude externe de ces deux circonférences. Sur AD décrivons un segment capable de 45° qui coupe la circonférence O en un point B. Par A menons la perpendiculaire AB. Les droites AB et AC seront les droites demandées.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Ailleret, de Versailles; d'Ocagne, collége Chaptal; Chavanon, de Lyon; Huet, d'Orléans; Tessier; d'Angers; Combebiac, de Montauban; Vermand, de Saint-Quentin; Genin, de Charleville; Raspilaire, de Saint-Étienne; Plomet, Collége Stanislas,

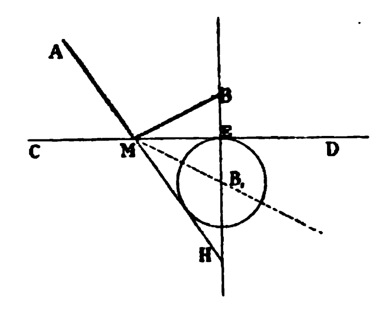
Pauine, de Passy; Schmitz, de la Rochelle; Hoc, de Longwy; Giuilq, lycée Fontanes; Monceau, d'Orléans; Cordeau, École Lavoisier; Gelinet, d'Orléans; Dupuis, de Grenoble; Perrot, d'Angers; Legay, de Tarbes.

M. Vigneau, du lycée d'Angoulême, nous a adressé également une bonne solution de cette question généralisée.

QUESTION 127.

Solution par M. Raspilaire, cours des mineurs, Saint-Etienne.

Étant donnés deux points A *et* B *situés d'un même côté de la droite* CD, *trouver sur cette droite un point* M *tel qu'en le joignant aux deux points* A *et* B, *l'angle* AMC *soit le double de* BMD.



Soit M le point cherché sur la droite, tel que ACM = 2 BMD. Si l'on mène la perpendiculaire indéfinie BE et la bissectrice de l'angle DMH, le point B, où ces deux droites se coupent, sera le centre d'un cercle tangent à CD et à AM prolongée d'où l'on peut déduire facilement la construction.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Genin, de Charleville; Objois, de Moulins; Tissier, d'Angoulême; Ailleret, de Versailles; Glin, lycée Corneille à Rouen; Perot, à Angers; Roulleau, Huet et Gelinet à Orléans; Cordeau et Joly, école Lavoisier; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Hoc, à Longwy; Corbeau, à Saint-Quentin; Chesne, à La Flèche; Bucheron, à Moulins; Bompard, collége Stanislas.

QUESTIONS PROPOSÉES.

153. — Étant donné un cercle O, et un point extérieur P, mener par le point P une sécante PAB, de façon que la partie intérieure AB soit vue du centre O sous un angle égal à l'angle que fait la sécante PAB avec le diamètre PO.

(*De Longchamps.*)

154. — On donne un cercle O et une droite DD'; soit AC une tangente quelconque de ce cercle, tangente qui rencontre en A la droite donnée DD'. On mène les bissectrices des angles en A, et on projette le centre du cercle sur ces bissectrices; on demande : 1° le lieu de projection du centre sur les bissectrices; 2° le lieu du point B où la tangente variable AC rencontre la projetante du point O sur les bissectrices. (*De Longchamps.*)

155. — Étant donné un parallélogramme ABCD, on prolonge AB d'une longueur BB', et AD d'une longueur égale DD'; on construit avec AD' et AB' un parallélogramme; soit C' le quatrième sommet de ce parallélogramme; démontrer que les droites B'D, BD' se coupent sur la droite CC'.

(*De Longchamps.*)

156. — Sur deux côtés consécutifs d'un carré ABCD, on décrit des circonférences ayant pour diamètre ces côtés, et l'on mène des tangentes MQ, NQ parallèles aux côtés du carré. Démontrer que le rayon du cercle O, tangent aux deux premiers et à MQ, NQ, est égal au double du côté du carré, diminué de deux fois le côté du triangle équilatéral inscrit dans l'un des cercles précédents. (*Perrin.*)

157. — Une droite de longueur et de direction constantes, appuie ses extrémités sur deux sphères données. On demande la courbe décrite par chaque extrémité sur la sphère correspondante. (*Amigues.*)

158. — Soit O le centre d'un cercle, ABC un triangle circonscrit, A', B', C' les points de contact des côtés BC, CA, AB; si on désigne par R le rayon du cercle, par S et S' les aires des triangles ABC, A'B'C', on a

$$4S = R^4 \frac{S'^2}{OA'B' \cdot OA'C' \cdot OB'C'}$$

(*Amigues.*)

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 4198-9.

THÉORIE DE L'INCOMMENSURABILITÉ

RÉDIGÉE D'APRÈS LES NOTES PRISES AU COURS DE M. SONGAYLO
Professeur au Collége Chaptal, examinateur d'admission
à l'École centrale

Par Maurice d'Ocagne, élève au Collége Chaptal, bachelier ès sciences.

(*Suite*; voir page 65.)

IV.—Application à la racine carrée.—Théorème. — *Lorsqu'un nombre entier* A *n'est pas carré parfait d'un nombre entier, sa racine est incommensurable.* En effet, si cette racine n'était pas incommensurable, elle serait égale à une fraction $\frac{a}{b}$ qu'on pourrait toujours supposer irréductible et on aurait $A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Or, b étant premier avec a, b^2 l'est aussi avec a^2. Par suite $\frac{a^2}{b^2}$ ne peut donner un nombre entier et l'égalité précédente est impossible.

Il résulte de là que la recherche des racines conduira le plus souvent à des nombres incommensurables.

Comment donc pourra-t-on définir la racine dans ce cas? Pour établir cette définition, nous allons faire sur l'exemple actuel des raisonnements analogues à ceux que nous venons d'exposer d'une manière générale.

Extraire la racine carrée de A à $\frac{1}{n}$ près, c'est chercher le plus grand multiple de $\frac{1}{n}$ dont le carré soit contenu dans A.

Supposons alors qu'on ait extrait la racine carrée de A avec les approximations

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots \frac{1}{n^p}$$

et soient les racines approchées par défaut, et par excès correspondantes :

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m'}{n^2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mu}{n^p}, \quad \frac{\mu'}{n^{p+1}}$$

$$\frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'+1}{n^2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mu+1}{n^p}, \quad \frac{\mu'+1}{n^{p+1}}$$

Nous allons faire voir que l'approximation ainsi définie entraîne la croissance ou le stationnement de la racine.

En effet, on a, par définition,

$$\left(\frac{\mu}{n^p}\right)^2 < A < \left(\frac{\mu+1}{n^p}\right)^2$$

et
$$\left(\frac{\mu'}{n^{p+1}}\right)^2 < A < \left(\frac{\mu'+1}{n^{p+1}}\right)^2$$

ou
$$\mu^2 < An^{2p} < (\mu+1)^2 \qquad (1)$$

$$\mu'^2 < An^{2p+2} < (\mu'+1)^2 \qquad (2)$$

Multiplions l'expression (1) par n^2, nous avons

$$\mu^2 n^2 < An^{2p+2} < (\mu+1)^2 n^2 \qquad (3)$$

L'inégalité (2) exprime que μ' est la racine à une unité près par défaut de An^{2p+2} ; μ' est donc le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans ce nombre.

μn est un nombre entier dont le carré est contenu dans An^{2p+2}, mais ce n'est pas nécessairement le plus grand, car dans (3) la différence entre les racines des membres extrêmes est égale à n, quantité généralement plus grande que 1.

Il résulte donc des inégalités (2) et (3) que l'on a

$$\mu' \geq \mu n$$

ou divisant de part et d'autre part n^{p+1}

$$\frac{\mu'}{n^{p+1}} \geq \frac{\mu}{n^p} \qquad (4)$$

En comparant de même les derniers membres, on voit que $\mu'+1$ est le plus petit nombre entier dont le carré soit supérieur au nombre intermédiaire.

On a donc, comme précédemment,

$$\mu'+1 \leq (\mu+1)\,n$$

ou
$$\frac{\mu'+1}{n^{p+1}} \leq \frac{\mu+1}{n^p} \qquad (5)$$

L'inégalité (4) prouve que les racines approchées par

défaut vont en croissant en pouvant cependant rester stationnaires par intervalles, et comme de plus elles sont toutes inférieures à une racine par excès quelconque, elles admettent une limite. De même, les racines par excès qui, d'après l'inégalité (5), décroissent ou stationnent, tout en restant supérieures à une racine par défaut quelconque, admettent une limite.

De plus, la différence $\frac{1}{n^p}$ entre une racine par défaut et la racine par excès correspondante pouvant devenir plus petite que toute quantité assignable, les deux limites sont les mêmes.

C'est cette limite commune que l'on appelle racine du nombre A.

Dans ce qui précède, nous avons pris pour dénominateurs des fractions exprimant les diverses approximations, les puissances successives d'un certain nombre n; faisons voir que pour obtenir la limite cherchée, il suffit de faire croître le dénominateur de la fraction considérée d'une manière quelconque.

Pour cela prenons la racine carrée à une approximation $\frac{1}{q}$ du nombre A. Soient $\frac{a}{q}$ et $\frac{a+1}{q}$ les racines correspondantes par défaut et par excès,

on a
$$\left(\frac{a}{q}\right)^2 < A < \left(\frac{a+1}{q}\right)^2$$

ou multipliant par n^{2p}

$$\frac{a^2n^{2p}}{q^2} < An^{2p} < \frac{(a+1)^2n^{2p}}{q^2} \qquad (6)$$

D'autre part, nous avons obtenu plus haut

$$\mu^2 < An^{2p} < (\mu+1)^2 \qquad (7)$$

L'expression (6) nous montre que le carré de $\frac{an^p}{q}$ est contenu dans An^{2p}, et l'expression (7) que An^{2p} est inférieur au carré de $\mu + 1$. Par suite,

$$\frac{an^p}{q} < \mu + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{q} < \frac{\mu+1}{n^p} \qquad (8)$$

En comparant de même μ à $\frac{(a+1)n^p}{q}$ on a l'inégalité

$$\frac{(a+1)n^p}{q} > \mu \quad \text{ou} \quad \frac{a+1}{q} > \frac{\mu}{n^p} \qquad (9)$$

Nous pouvons, laissant q fixe, faire varier p; alors les fractions $\frac{\mu+1}{n^p}$ et $\frac{\mu}{n^p}$ tendent, d'après la première partie de la démonstration, vers une même limite L, racine de A.

On a donc, d'après (8) et (9), en remarquant que lorsqu'on passe à la limite les inégalités peuvent se changer en égalités, $\frac{a}{q} \leq L$

et $$\frac{a+1}{q} \geq L \text{ ou } \frac{a}{q} \geq L - \frac{1}{q}$$

Par suite, $$L \geq \frac{a}{q} \geq L - \frac{1}{q}$$

Si maintenant on fait varier q d'une manière quelconque, mais de façon à le rendre plus grand que toute quantité donnée aussi grande qu'on voudra, $\frac{1}{q}$ tendra vers o et, par conséquent, à la limite, on aura

$$\lim \frac{a}{q} = L$$

C'est là ce que nous nous proposions d'établir.

On pourrait répéter les mêmes raisonnements que ceux qui précèdent pour une racine quelconque.

V. — **Calcul des nombres incommensurables.** — Pour l'*addition* et la *soustraction* aucune difficulté ne se présente. On prend des valeurs aussi approchées qu'on veut des nombres incommensurables à ajouter ou à retrancher, et on opère sur ces valeurs suivant les règles connues. On obtient ainsi une valeur approchée de la somme ou de la différence.

Mais, dans la multiplication, on cherche un nombre qui se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur avec l'unité. Dans le cas qui nous occupe, il faudrait chercher un nombre qui se composât avec un nombre incommensurable comme un autre nombre incommensurable

avec l'unité. Or, comme on ne peut composer un nombre incommensurable avec l'unité, la définition se trouve en défaut.

Il faut donc définir la multiplication des nombres incommensurables, et leur division, opération inverse de la première.

Multiplication. — Soient A et B les nombres dont il faut faire la multiplication; considérons les valeurs approchées, a et b par défaut, a_1 et b_1 par excès. Nous allons démontrer que les produits ab et a_1b_1 sont une limite commune, lorsque a, a_1, b, b_1, tendent vers leurs limites.

1° Ils ont une limite. En effet, le produit ab va constamment en croissant; d'ailleurs, il reste toujours inférieur à a_1b_1, par suite, d'après le théorème I sur les limites, il a une limite.

De même a_1b_1, décroissant constamment en restant supérieur à ab, admet une limite.

2° Ces limites sont les mêmes.

Posons $\quad a_1 = a + \alpha \quad b_1 = b + \beta$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} a_1b_1 - ab &= (a + \alpha)(b + \beta) - ab \\ &= \alpha b + a\beta + \alpha\beta \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre a, a_1, b, b_1, vers leurs limites, nous savons, d'après ce qui a été démontré précédemment, que a et a_1 tendent vers la même limite; de même pour b et b_1; par suite α et β tendent vers o, et, à la limite la différence $a_1b_1 - ab$ devient nulle; les deux produits ont donc bien une limite commune. C'est cette limite qui constitue le produit des nombres incommensurables considérés.

Corollaire. — Dans un produit de facteurs incommensurables on peut intervertir l'ordre des facteurs.

Considérons, en effet, les valeurs approchées a, b, c des facteurs incommensurables A, B, C; a, b, c, étant des nombres finis, on a $\quad abc = cab$

et si on prend d'autres valeurs de plus en plus approchées des limites, $\quad a_1, b_1, c_1, \quad a_2, b_2, c_2, \ldots\ldots$ on a encore

$$a_1\, b_1\, c_1 = c_1\, a_1\, b_1$$

$$a_2\ b_2\ c_2 = c_2\ a_2\ b_2$$

. .
. .
. .

Lorsqu'on passe à la limite on peut admettre que les deux produits constamment égaux, le sont encore, et comme les produits *abc, cba* tendent respectivement, d'après ce qui vient d'être dit, vers ABC et CBA, on a, à la limite,

$$ABC = CBA$$

Exemple : $\pi\sqrt{2} = \sqrt{2}\,.\,\pi$.

Division. — Soient D le dividende, d le diviseur, tous deux incommensurables. Considérons les valeurs approchées, Δ et δ par excès, Δ_1 et δ_1 par défaut.

On a :
$$\Delta > D > \Delta_1$$
$$\delta > d > \delta_1$$

Supposons, d'autre part, que $\Delta = \delta_1 q$ (1)

et $\Delta_1 = \delta q_1$ (2)

Δ étant plus grand que Δ_1, et δ_1 plus petit que δ, ces deux raisons s'ajoutent pour donner $q > q_1$.

Faisons tendre Δ, Δ_1, δ, δ_1 vers leurs limites. Dans l'égalité (1) Δ décroît, δ_1 croît, donc q décroît ; de même, dans (2) Δ_1 croît, δ décroît, donc q_1 croît. Il en résulte que q croît constamment, et comme il reste toujours inférieur à q_1, il admet une limite ; de même q_1 décroît constamment en restant supérieur à q, il a donc aussi une limite.

Ces limites sont égales. Pour le démontrer posons

$$\Delta_1 = \Delta - \alpha \qquad \delta_1 = \delta - \beta$$

Remplaçant Δ_1 et δ_1 par ces valeurs dans (1) et (2), il vient
$$\Delta = (\delta - \beta)\,q$$
$$\Delta - \alpha = \delta q_1$$

Retranchant ces deux dernières inégalités membre à membre, il vient $\alpha = \delta\,(q - q_1) - \beta q$

ou $\delta\,(q - q_1) = \alpha + \beta q$

Lorsqu'on passe à la limite, α et β tendant vers o, le second membre de l'égalité tend vers o et comme δ n'est pas nul lim. $q - q_1 = 0$

Ainsi à la limite, $q = q_1$ ou $\dfrac{\Delta}{\delta_1} = \dfrac{\Delta_1}{\delta}$

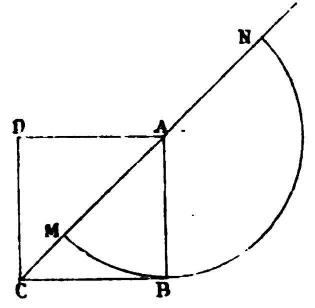
Le quotient cherché sera, par suite, la limite de $\frac{\Delta}{\delta_1}$ ou de $\frac{\Delta_1}{\delta}$.

Des grandeurs incommensurables en géométrie. — Disons enfin un mot de l'incommensurabilité en géométrie.

Les propriétés métriques des figures conduisent parfois à la considération de grandeurs incommensurables ; c'est-à-dire qu'il peut se faire que certains éléments d'une figure n'admettent entre eux aucune commune mesure.

Nous citerons de ces grandeurs incommensurables deux exemples bien connus : la circonférence de cercle et le diamètre ; la diagonale du carré et le côté.

Pour faire voir comment on peut déterminer géométriquement l'incommensurabilité de deux grandeurs, nous allons démontrer, *à priori*, par la seule comparaison de ces deux lignes, que *la diagonale du carré est incommensurable avec le côté* (*).



Menons la diagonale AC du carré ABCD et prolongeons-la au delà du point A. De A comme centre, avec AB pour rayon, décrivons une demi-circonférence qui détermine sur AC et son prolongement les points M et N.

Pour démontrer que AC est incommensurable avec AB, nous allons essayer de mesurer la première de ces lignes à l'aide de la seconde. Formons donc le rapport $\frac{AC}{AB}$.

Nous avons $AC = AM + MC = AB + MC$

Donc $$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{MC}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}} \qquad (1)$$

(*) Nous tenons la démonstration suivante de M. Hauser, professeur de mathématiques spéciales au collége Chaptal. — M. O.

Nous sommes donc amenés à déterminer le rapport $\frac{AB}{MC}$

Or $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 = CM \times CN,$

d'où
$$\frac{AB}{MC} = \frac{CN}{AB}$$

Mais
$$\begin{aligned} CN &= NA + AM + MC \\ &= 2AB + MC \end{aligned}$$

Donc
$$\frac{AB}{MC} = \frac{2AB + MC}{AB} = 2 + \frac{MC}{AC} = 2 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}} \quad (2)$$

Par suite, si nous portons cette valeur dans (1) nous avons
$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}}}$$

Nous sommes donc de nouveau amenés à évaluer $\frac{AB}{MC}$. Or nous connaissons cette valeur; elle nous est fournie par l'égalité (2) et nous introduirons ainsi encore une fois $\frac{AB}{MC}$, qu'il faudra encore remplacer par sa valeur, etc. Nous pourrons ainsi pousser l'opération indéfiniment sans jamais arriver à un résultat fini, car nous retomberons toujours sur le rapport $\frac{AB}{MC}$. Ainsi le rapport $\frac{AC}{AB}$ se présente sous la forme
$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$

et si loin que l'on pousse l'opération, on ne pourra arriver à évaluer exactement ce rapport; il résulte de là que les longueurs AC et AB sont incommensurables entre elles, ce que nous proposions de démontrer.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 70.)

Corps polis. Loi de la réflexion. — Les corps polis sont ceux qui renvoient spéculairement la lumière, c'est-à-dire dans une direction donnée. On sait que le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans un même plan contenant la normale à la surface réfléchissante et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Intensité du rayon réfléchi. — L'intensité du rayon réfléchi varie : 1° avec la nature de la surface réfléchissante ; 2° avec l'angle de réflexion.

Cette dernière variation est assez considérable pour certaines substances. Pour d'autres (et les surfaces métalliques sont de ce cas), l'intensité du rayon réfléchi varie très-peu avec l'incidence. Cette intensité est toujours plus grande sous l'incidence rasante que sous l'incidence normale.

Nous admettrons que les corps polis que nous allons étudier sont des métaux et que l'intensité du rayon réfléchi est indépendante de l'incidence. Cette intensité variera donc seulement avec celle de la source lumineuse.

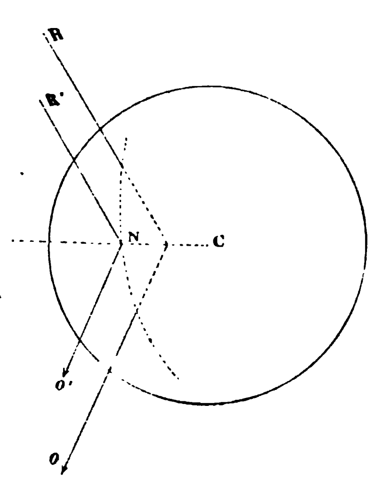
Aspect d'un plan parfaitement poli, éclairé par des rayons parallèles, dirigés dans une seule direction et regardé à l'aide de rayons visuels parallèles, c'est-à-dire l'œil étant à l'infini. — Les rayons se réfléchissent d'après la loi connue. Si les rayons visuels sont parallèles aux rayons réfléchis, tous les points du plan paraissent lumineux, sinon ils seront obscurs et le plan ne semblera pas exister.

Aspect d'un plan poli, éclairé par des rayons parallèles venant dans toutes les directions, l'œil

étant à l'infini. — C'est le cas de la lumière solaire jointe aux lumières indirectes émanant de l'atmosphère. L'œil ne recevra des rayons directs ou indirects que ceux qui, après la réflexion, auront pris la direction du rayon visuel.

Si ce sont les rayons de reflets les plus intenses qui sont renvoyés à l'œil, le plan paraîtra très-lumineux et d'un éclat uniforme, et inversement.

Aspect d'une sphère polie éclairée par des rayons lumineux parallèles, dirigés dans une direction unique, l'œil étant à l'infini. — On mène le rayon lumineux central RC, le rayon visuel CO, la bissectrice de leur angle CN, au point de sortie de cette bissectrice N, un rayon incident R'N' sera réfléchi suivant NO', c'est-à-dire dans la direction de l'œil. Le point N sera le point brillant de la sphère polie.



Ce point seul sera brillant. Tous les autres seront obscurs et l'existence de la sphère ne se révélera que par ce point brillant.

Aspect d'une sphère polie, éclairée par des rayons parallèles venant de toutes les directions, l'œil étant à l'infini. — C'est le cas d'une sphère éclairée par la lumière solaire directe et par toutes les lumières indirectes.

Chaque direction de rayon donnera son point brillant. Comme elles sont en nombre infini, il y aura de ces points brillants sur toute la surface de la sphère; seulement ils n'auront pas le même éclat. Pour avoir des lignes d'égales teintes, si nous admettons, ce qui est faux, que la variation

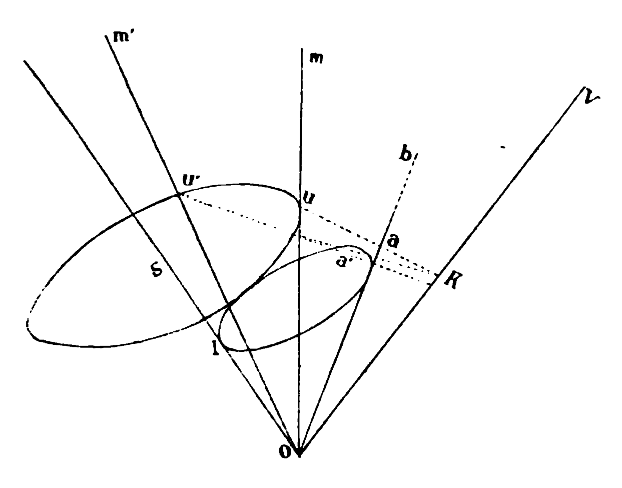
de l'angle d'incidence ne modifie pas l'éclat des rayons réfléchis, il faudra :

1° Classer les rayons indirects d'après leur différence d'éclat, ce qui se ferait à l'aide d'une courbe représentative analogue à celle que nous avons étudiée plus haut ;

2° Grouper les rayons d'égale intensité. Ils formeront une série de cônes de révolution ayant tous pour axe le rayon lumineux direct ;

3° Chercher sur la sphère le lieu des points brillants des rayons d'égale intensité. Pour une série de rayons d'égale intensité les points brillants auront le même éclat et leur lieu géométrique sera une ligne d'égale teinte.

Lignes d'égales teintes sur une sphère parfaitement polie. — Soit OS le rayon direct ; *mu*, *m'u'*..... une série de rayons indirects d'égale intensité et disposés suivant les génératrices d'un cône, dont l'axe SO est le rayon central direct.



Les points d'incidence *u,u'* se trouvent sur un cercle de la sphère, puisque les rayons d'égale intensité forment un cône de révolution.

Soit OV le rayon visuel, K son point de sortie sur la sphère.

Cherchons le point brillant de la direction *mu*. Menons la bissectrice O*a'* de l'angle *u*OV.

Le triangle *u*OK est isoscèle, puisque O*u* et OK sont deux rayons de la sphère. Le point *a* est le milieu de la droite K*u*.

Si l'on prolonge O*a* jusqu'en *b'* rencontre avec la sphère, *b'* sera le point brillant de la direction *mu*. Mais le lieu des points *a'* est un cercle homothétique du cercle *uu'*, par rapport au point K. Le plan de ce cercle est parallèle au plan du cercle *uu'*, et situé à une distance du point K, sortie du rayon visuel, qui est moitié de celle du premier.

Le lieu des points brillants *b'* sera donc dans l'intersection de la sphère et du cône ayant le cercle *aa'* pour directrice et le centre O pour sommet.

Épure. — Par une rotation, le rayon lumineux est supposé rendu parallèle au plan horizontal et projeté à l'angle φ sur ce dernier.

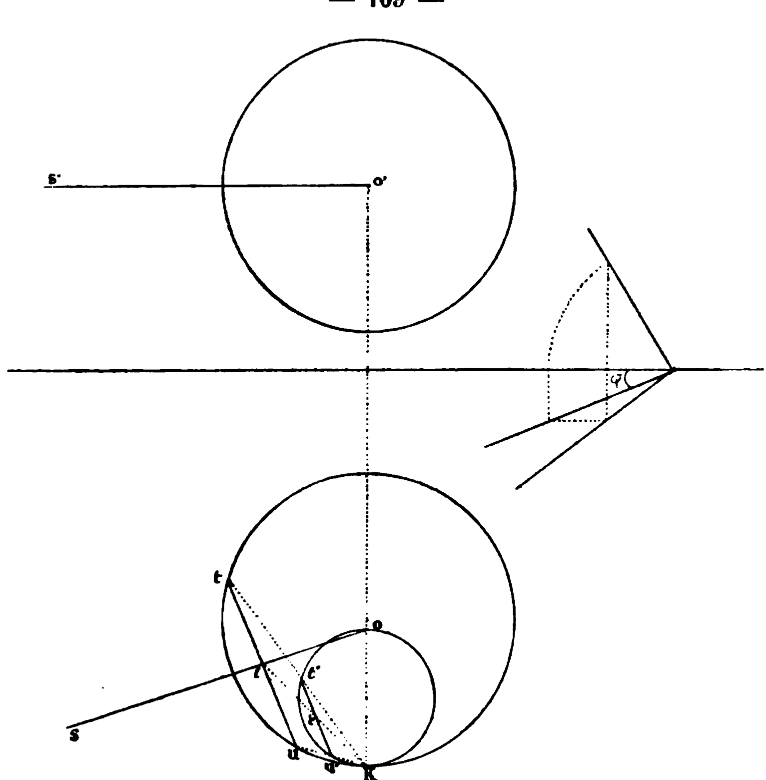
Soit OS, O'S' le rayon direct. Prenons une série de rayons indirects d'égal éclat; ils formeront un cône ayant OS pour axe. La ligne des points d'incidence sera le cercle *ut*, projeté horizontalement en ligne droite et perpendiculairement au rayon direct. Ce cercle peut être considéré comme l'intersection de la sphère et du plan vertical qui aurait *ut* pour trace horizontale.

K est le point de sortie du rayon visuel.

Joignons *t*K, *i*K, *u*K, et prenons le milieu de ces lignes; nous aurons en *t' i' u'*, le cercle homothétique du premier, qu'il faut prendre pour directrice d'un cône ayant son sommet au point O.

Si nous décrivons la sphère ayant OK pour diamètre, ce cercle *u' t'* peut être considéré comme l'intersection de cette sphère par un plan parallèle au premier.

Nous aurons donc les lignes de teinte en prenant la petite sphère OK; la coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux: prenant les cercles ainsi formés pour bases de cônes ayant leurs sommets au centre de la sphère et cherchant les intersections de ces cônes avec la sphère primitive.



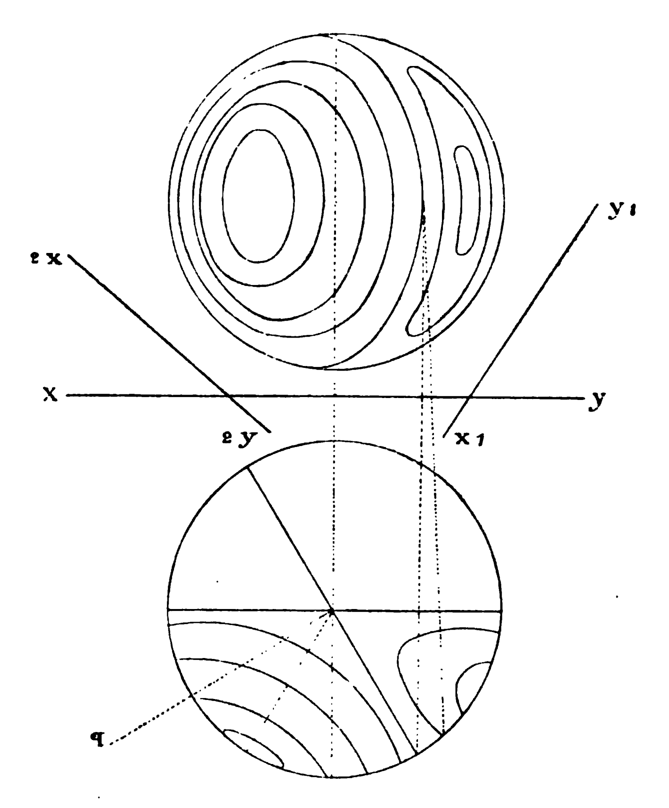
Les courbes en projection horizontale seront des coniques, puisque ce plan de projection est parallèle à un plan diamétral commun aux deux surfaces.

Le calcul montre que toutes les lignes d'égales teintes dans cette hypothèse se projetteront horizontalement suivant des hyperboles ayant mêmes asymptotes.

La connaissance d'un point seulement suffira pour les tracer par points. On en déduira ensuite les courbes en projection verticale.

L'épure en projection verticale une fois faite en prenant x_1y_1 pour ligne de terre, la sphère se présentera dans la position ordinaire d'une élévation; en prenant x_2y_2 on la verra en plan.

On ne s'étendra pas davantage sur l'étude d'une sphère polie placée dans les conditions précédentes, conditions



tout à fait en dehors de celles qui se présentent ordinairement.

Nous avons admis en effet :

1° Que l'incidence ne modifiait pas l'éclat du rayon réfléchi (ce qui n'est pas exact) ;

2° Que la sphère était isolée au milieu de l'atmosphère et placée très-loin de la terre ;

3° Que l'éclat des diverses parties du ciel était conforme à la loi figurée par la courbe représentative.

Or les nuages modifieront cet éclat, et les objets qui

entourent le corps poli viendront s'y réfléchir et former image.

Lorsque l'on voudra, dans un dessin, rendre l'aspect d'un corps parfaitement poli, on devra figurer à sa surface les images des objets environnants. La géométrie donnerait le moyen de trouver ces images brillantes; mais les épures seraient fort compliquées, et il serait oiseux pour un cas si rare dans la pratique de faire une pareille étude. Il sera préférable, si le cas se présente, d'agir comme les peintres, de faire poser le modèle et de le copier. On remarquera seulement que la ligne d'ombre propre est encore dans ce cas une ligne d'égale teinte.

Corps mi-polis. — Les corps mi-polis participent, comme propriétés, des corps polis et des corps dépolis.

Les lumières intenses s'y réfléchissent plus qu'elles ne s'y diffusent, et les lumières faibles font le contraire.

Une lumière intense donnera donc lieu sur leur surface a une image brillante, comme s'ils étaient polis. Nous chercherons ce point brillant comme nous l'avons fait ci-dessus, c'est-à-dire pour la bissectrice de l'angle du rayon lumineux central et du rayon visuel central.

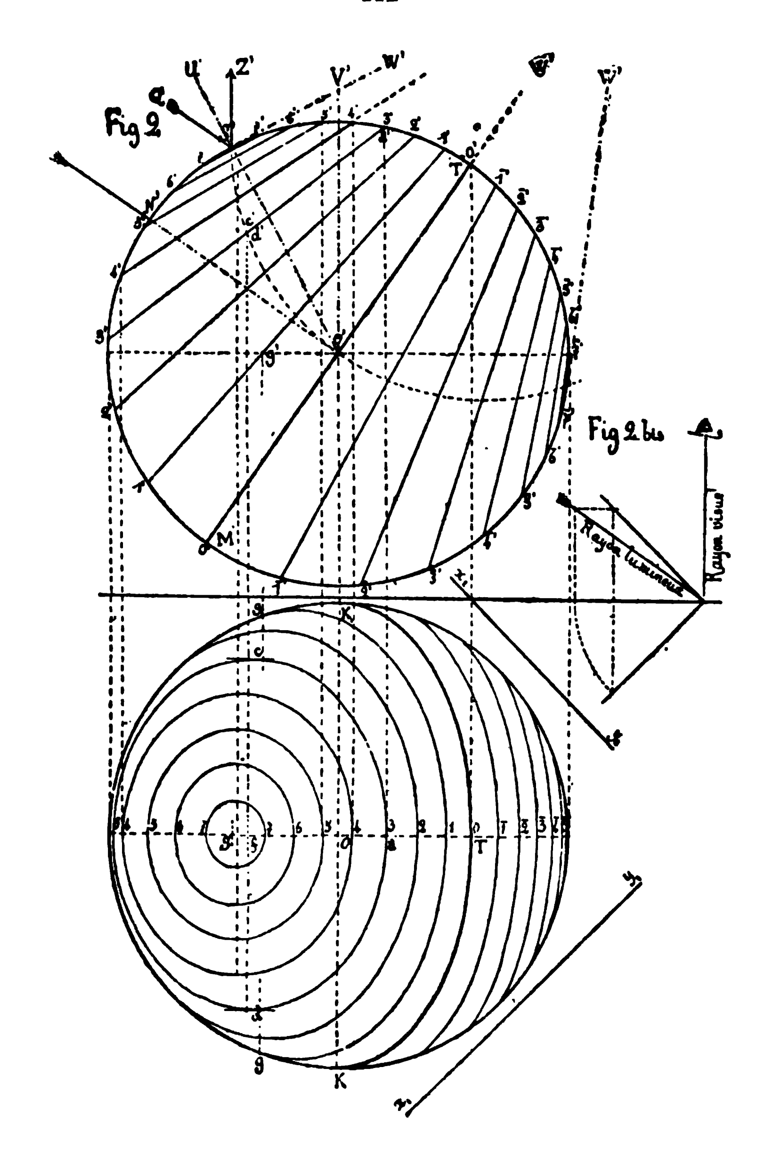
Nous tracerons l'ombre propre comme si la surface était dépolie et nous adopterons comme lignes de teintes une série de courbes passant graduellement du point brillant à la ligne d'ombre propre.

Épure. — Nous avons adopté la construction conventionnelle suivante, s'appliquant à un observateur qui regarderait la projection horizontale. OO′ est le centre de la sphère. Le rayon lumineux est rendu par une rotation parallèle au plan vertical et projeté à l'angle φ sur ce plan.

Le point brillant situé sur le méridien de front.

Le rayon visuel est perpendiculaire au plan horizontal. On a mené le rayon lumineux N′O′ qui passerait par le centre. La bissectrice O′S′ a donné en S′S le point brillant.

L'ombre propre est déterminée par le grand cercle M′T′ perpendiculaire au rayon lumineux.



Pour simplifier, on a pris pour lignes de teintes des courbes planes, mais c'est par pure convention.

On a mené le plan tangent S'W' au point brillant et l'on a pris l'intersection projetée tout entière en W' de ce plan tangent et du plan d'ombre propre.

Les lignes de teinte seront les sections faites par des plans non plus parallèles mais passant tous par la ligne W' perpendiculaire au plan vertical.

Comme pour la sphère dépolie, on a pris sept plans divisant l'hémisphère éclairé en 8 zones.

A cet effet, l'arc T'S' a été partagé en 8 parties égales. Ces lignes ont été affectées de nombres positifs. On a prolongé le même tracé dans l'hémisphère ombré et les lignes ont été affectées de nombres négatifs.

On remarquera que dans une sphère polie ou mi-polie le point brillant est beaucoup plus éloigné du contour apparent que dans une sphère dépolie. Le contour apparent est plus sombre sur la sphère mi-polie que sur l'autre.

Échelles de teintes. — Ayant tracé les lignes de teintes sur une sphère polie ou mi-polie, il sera facile d'en déduire les lignes de teintes sur des cylindres ou sur des cônes de révolution placés dans des positions quelconques.

Il suffira de circonscrire à la sphère le cylindre ou le cône, de déterminer la ligne de contact, de prendre les points de rencontre de cette ligne avec les courbes de teintes et de faire passer par ces points les génératrices des cônes ou des cylindres dont on veut faire le lavis.

Les échelles de teintes que nous adoptons sont au nombre de quinze. Les unes s'appliquent aux corps mi-polis qui sont ceux que l'on rencontre le plus souvent dans le dessin de machines; les autres aux corps dépolis (pierres, bois...), que l'on rencontre en architecture *.

---

* Voir ces échelles dans la *Théorie des ombres et du lavis, leçons professées à l'école Turgot*, par J. Pillet. Librairie Delagrave.

FORMULE D'APPROXIMATION

POUR LA RACINE CARRÉE.

Par M. F. Bernier.

La formule dont il va être question est un cas particulier d'une autre formule générale et très-ancienne, puisqu'on la trouve dans les premières *Tables de Vega* publiées à Vienne en 1783. Mais je ne crois pas qu'on en ait discuté le degré d'approximation. On va voir que cela est facile pour le cas de la racine carrée.

Soit $N = a^2 + x$ un nombre dont on connait une valeur approchée de la racine. Posons $\sqrt{a^2 + x} = a + z$; élevons au carré; l'on aura $x = 2az + z^2 = z(2a + z)$,

$$z = \frac{x}{2a + z}.$$

En négligeant z au dénominateur j'aurai $z = \frac{x}{2a}$, ce qui est la formule d'approximation connue en arithmétique. Si je substitue cette valeur approchée à la place de z, au dénominateur, j'obtiendrai pour seconde approximation,

$$z = \frac{x}{2a + \frac{x}{2a}} = \frac{2ax}{4a^2 + x}$$

Soit e l'erreur de cette expression de z, en sorte que

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{2ax}{4a^2 + x} + e \qquad (1)$$

on tire successivement de cette équation,

$$e = \sqrt{a^2 + x} - \frac{4a^3 + 3ax}{4a^2 + x}$$

$$= \frac{(4a^2 + x)\sqrt{a^2 + x} - (4a^3 + 3ax)}{4a^2 + x}$$

$$= \frac{(4a^2 + x)^2(a^2 + x) - (4a^3 + 3ax)^2}{(4a^2 + x)\left\{(4a^2 + x)\sqrt{a^2 + x} + (4a^3 + 3ax)\right\}}$$

Les calculs faits, le numérateur se réduit à x^3 ; l'on peut reconnaître dans l'accolade du dénominateur, le cube de $\sqrt{a^2+x}+a$.

Ainsi : $e = \dfrac{x^3}{(4a^2+x)(\sqrt{a^2+x}+a)^3}$

moyennant quoi l'équation (1) devient une identité. Les trois termes de son second membre seront désignés ainsi : la racine approchée, la correction et l'erreur.

Afin d'arriver à une limite supérieure de e plus simple que son expression exacte, je supposerai, pour préciser, que a est un entier au moins égal à 10 et approché à une demi-unité près.

1er cas : La racine est approchée par défaut. Alors x est positif. En le négligeant au dénominateur, dans l'expression de e, j'augmente cette valeur et j'ai évidemment

$$e < \frac{x^3}{32a^3}$$

2e cas : La racine est approchée par excès. Faisant abstraction du signe de x et de celui de e, l'on a dans ce cas

$$e = \frac{x^3}{(4a^2-x)(\sqrt{a^2-x}+a)^3},$$

ou bien sous une autre forme

$$e = \frac{x^3}{a^5\left(4-\frac{x}{a^2}\right)\left(\sqrt{1-\frac{x}{a^2}}+1\right)^3}$$

A la place du rapport variable $\frac{x}{a^2}$ je puis mettre, une fois pour toutes, sa plus grande valeur possible, correspondant à la plus grande de x par rapport à a, c. à d. à $a-\frac{1}{4}$, et à la plus petite de a, c. à d. 10. En définitive, si je remplace $\frac{x}{a^2}$ par $\frac{10-\frac{1}{4}}{100} = \frac{39}{400}$, les deux derniers facteurs du dénominateur deviendront constants et

aussi petits que possible. J'aurai alors, tous calculs faits,

$$e < \frac{x^3}{28,9a^5}$$

En comparant cette limite à celle relative à la racine approchée par défaut, on voit qu'on peut se borner à la seconde, et même écrire plus simplement, quel que soit le nombre des chiffres de a

$$e < \frac{x^3}{28a^5}$$

Je mets cette inégalité sous la forme suivante

$$e < \frac{1}{3,5a^2}\left(\frac{x}{2a}\right)^3$$

et je remarque que $\frac{x}{2a}$ est, à peu près, la correction même de la racine approchée ayant, dans nos conditions, 0,5 pour plus grande valeur. Ainsi, quel que soit a, on aura

$$e < \frac{0,5^3}{3,5\ a^2} = \frac{1}{28\ a^2} = \frac{0,036}{a^2}$$

Soit n le nombre des chiffres de a supposé entier; en sorte que $a > 10^{n-1}$

et par suite $e < \frac{0,036}{10^{2n-2}} = \frac{3,6}{10^{2n}}$,

ou plus simplement, et pour tous les cas:

$$e < \frac{4}{10^{2n}}$$

Donc, *l'erreur de la correction est au plus de 4 unités de l'ordre décimal* 2n *à partir du dernier chiffre de la racine approchée.*

Il y a avantage, dans la pratique, à mettre la formule sous une autre forme, en y remplaçant x par $N - a^2$; elle devient alors $\sqrt{N} = a + \frac{2a(N - a^2)}{3a^2 + N}$.

Le procédé ordinaire de l'extraction de la racine carrée donne immédiatement le moyen de former le carré de la racine approchée. Tout comme, si l'on reconnaît que la racine approchée par défaut le serait à plus d'une demi-unité, il est bien facile de modifier le résultat de manière

que le nombre *a* soit la racine approchée par excès à une demi-unité près, d'en former le carré, ainsi que la quantité négative N — a^2.

QUESTION D'EXAMEN

On sait que les trois systèmes d'équations fondamentales données dans les cours de trigonométrie pour la résolution des triangles quelconques peuvent se déduire les uns des autres, et que, en réalité, il n'existe que trois équations entre les côtés et les angles; on peut se croire en droit d'en conclure que, trois quelconques des six quantités précédentes étant données, on peut en déduire les trois autres. Or, on sait par la géométrie que, si l'on se donne les trois angles d'un triangle, celui-ci n'est déterminé que d'espèce, mais non pas de grandeur; en d'autres termes, les côtés sont indéterminés, mais le rapport de deux d'entre eux au troisième est connu. Il est donc utile de montrer qu'il n'y a pas contradiction entre la géométrie et la trigonométrie; on pourrait le voir facilement en ramenant tous les systèmes au premier, ou à la proportionnalité des sinus aux côtés; il n'y a que deux équations pour déterminer trois quantités (car on suppose que les angles donnés sont bien les angles d'un triangle, c'est-à-dire que leur somme est égale à 180°). Mais on peut aussi chercher à démontrer directement sur l'un quelconque des systèmes qu'il est indéterminé; c'est ce que nous allons faire ici.

Pour cela, nous admettrons comme une relation déjà connue l'égalité suivante, qui a lieu entre les trois angles d'un triangle :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

Considérons d'abord le système

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

Nous voulons prouver que ce système de trois équations se réduit à deux; pour cela nous allons diviser le tout par c par exemple, il vient

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}\cos C + \cos B$$

$$\frac{b}{c} = \cos A + \frac{a}{c}\cos C$$

$$1 = \frac{a}{c}\cos B + \frac{b}{c}\cos A$$

On tire facilement des deux premières, par élimination, les valeurs suivantes :

$$\frac{a}{c}\sin^2 C = \cos A\cos C + \cos B$$

$$\frac{b}{c}\sin^2 C = \cos B\cos C + \cos A$$

En multipliant la troisième équation par $\sin^2 C$, qui n'est pas nul, et remplaçant $\frac{a}{c}\sin^2 C$, $\frac{b}{c}\sin^2 C$ par les valeurs précédentes que nous avons déduites des deux premières, on a $\sin^2 C = \cos^2 B + \cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C$

Ce qui n'est autre chose que l'égalité fondamentale que nous avons admise; on voit donc que la troisième équation est vérifiée d'elle-même, ou qu'elle est une conséquence des deux autres.

Considérons maintenant le système

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

En ajoutant la troisième équation successivement aux deux premières, on obtient le système suivant :

$$a = b\cos C + c\cos A$$
$$b = c\cos A + a\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Des deux premières on tirera, comme précédemment.

$$\frac{a}{c}\sin^2 C = \cos A\cos C + \cos B$$

$$\frac{b}{c}\sin^2 C = \cos B\cos C + \cos A$$

Divisons les deux membres de la troisième par c^2, et multiplions ensuite par $\sin^4 C$, il viendra, en remplaçant $\frac{a}{c}\sin^2 C$, $\frac{b}{c}\sin^2 C$ par les valeurs qui précèdent, effectuant les calculs, après réduction

$$\sin^4 C = \cos^2 B\,(1 - \cos^2 C) + \cos^2 A\,(1 - \cos^2 C) + 2\cos A \cos B \cos C\,(1 - \cos^2 C)$$

ce qui donne en divisant par $\sin^2 C$, ou par son égal $1 - \cos^2 C$,

$$\sin^2 C = \cos^2 B + \cos^2 A + 2\cos A \cos B \cos C.$$

Nous retombons donc encore sur l'égalité fondamentale que nous avons admise, les conclusions précédentes sont donc encore acceptables, et par suite on voit que la trigonométrie nous montre bien, comme la géométrie, que, en donnant les trois angles d'un triangle, on détermine son espèce, mais non ses dimensions réelles.

A. M.

NOTE SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par E. Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique.

Si un carré entier augmenté ou diminué d'un nombre pair donne un carré parfait, le premier carré augmenté ou diminué de la moitié de ce nombre pair sera la somme de deux carrés.

Les deux cas à examiner ont une démonstration commune fort simple.

L'hypothèse donne $x^2 \pm 2\lambda = K^2$ (1)

Ce qu'on peut écrire, puisque K, suivant le signe de λ, est plus grand ou plus petit que x

$$x^2 \pm 2\lambda = (x \pm \varepsilon)^2$$

On voit immédiatement que ε est pair, soit que x soit pair, soit que x soit impair ; on peut donc écrire

$$x^2 \pm 2\lambda = (x \pm 2\alpha)^2$$

ou $$x^2 \pm 2\lambda = x^2 \pm 4\alpha x + 4\alpha^2$$

d'où $$\pm 2\lambda = \pm 4\alpha x + 4\alpha^2$$

ou $$\pm \lambda = \pm 2\alpha x + 2\alpha^2$$
ou $$x^2 \pm \lambda = x^2 \pm 2\alpha x + 2\alpha^2$$
ou enfin $$x^2 \pm \lambda = (x \pm \alpha)^2 + \alpha^2$$ c. q. f. d.

REMARQUE. — Si l'on fait $x = 5$
$$\lambda = 12$$
les deux équations comprises sous la double égalité (1) ont lieu à la fois; $K = 7$ avec le signe plus et $K = 1$ avec le signe moins.

Cela donne la première solution en nombres entiers des équations indéterminées
$$x^2 + 2y = z^2$$
$$x^2 - 2y = t^2$$

NOTE DE GÉOMÉTRIE

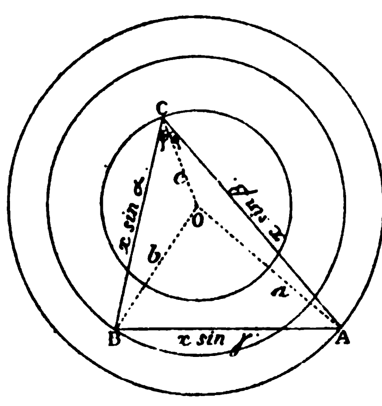
Par M. **Combier**, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

(*Suite;* voir tome II, page 79.)

III. **Problème.** — *Déterminer un triangle semblable à un triangle donné, et dont les trois sommets reposent sur trois circonférences concentriques données.*

Solution trigonométrique.

Soit O le centre des trois circonférences, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ les trois rayons, α, β, γ les angles du triangle cherché connus par ceux du triangle donné auquel il doit être semblable. — Pour fixer les idées, nous supposerons que le sommet de l'angle α doit reposer sur la circonférence de rayon a, le sommet de l'angle β sur la circonférence de rayon b et le sommet de l'angle γ sur la



circonférence de rayon c. Tirons les trois rayons OA, OB, OC et désignons respectivement par φ et ψ les deux angles BCO, ACO dont la somme $\varphi + \psi$ doit être égale à γ si le centre O est situé à l'intérieur du triangle, et dont la différence $\varphi - \psi$ doit être égale à γ, si au contraire le centre O est en dehors du triangle à déterminer. Nous aurons donc :

(1) $$\varphi \pm \psi = \gamma$$

Si on désigne par m, n, p les trois côtés du triangle opposés respectivement aux angles α, β, γ, on a :

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{n}{\sin \beta} = \frac{p}{\sin \gamma}$$

et si l'on représente par x l'une quelconque de ces trois expressions, les trois côtés m, n et p seront exprimés par une seule inconnue

$$m = x \sin \alpha \qquad n = x \sin \beta \qquad p = x \sin \gamma.$$

On connait d'ailleurs la signification géométrique de x; c'est le diamètre du cercle circonscrit au triangle cherché.

Les deux triangles BCO, OCA donnent

(2) $$\begin{cases} a^2 = c^2 + x^2 \sin^2 \beta - 2cx \sin \beta \cos \psi \\ b^2 = c^2 + x^2 \sin^2 \alpha - 2cx \sin \alpha \cos \varphi \end{cases}$$

Il nous reste à éliminer φ et ψ entre les équations (1) et (2), pour obtenir une équation qui ne renferme plus que l'inconnue x.

L'équation (1) peut être remplacée par la suivante :

$$\cos \gamma = \cos (\varphi \pm \psi) = \cos \varphi \cos \psi \mp \sin \varphi \sin \psi$$

d'où $$\pm \sin \varphi \sin \psi = \cos \varphi \cos \psi - \cos \gamma$$

et en élevant au carré et remplaçant $\sin^2$ par $1 - \cos^2$

(3) $$\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \gamma - \sin^2 \gamma = 0.$$

Des équations (2) on tire :

$$\cos \varphi = \frac{x^2 \sin^2 \beta + c^2 - a^2}{2cx \sin \beta} \quad \cos \psi = \frac{x^2 \sin^2 \alpha + c^2 - b^2}{2cx \sin \alpha}$$

Remplaçant $\cos \varphi$ et $\cos \psi$ par leur valeur dans l'équation (3) on a :

$$\frac{(x^2 \sin^2 \alpha + c^2 - b^2)^2}{4c^2x^2 \sin^2 \alpha} + \frac{(x^2 \sin^2 \beta + c^2 - a^2)^2}{4c^2x^2 \sin \alpha \sin \beta}$$

$$- \frac{2(x^2 \sin^2 \alpha + c^2 - b^2)(x^2 \sin^2 \beta + c^2 - a^2)}{4c^2x^2 \sin \alpha \sin \beta} - \sin^2 \gamma = 0$$

En chassant les dénominateurs et ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, on trouve

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & x^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta (\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma) \\ & - 2x^2 \sin\alpha \sin\beta \left[\begin{aligned} & a^2 (\sin\beta - \sin\alpha \cos\gamma) \\ & + b^2 (\sin\alpha - \sin\beta \cos\gamma) \\ & + c^2 (\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \\ & \qquad\qquad \sin\beta \cos\gamma) \end{aligned}\right] \\ & + a^4 \sin^2\alpha + b^4 \sin^2\beta + c^4 \sin^2\gamma - 2a^2b^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \\ & - 2a^2c^2 \sin\alpha (\sin\alpha - \sin\beta \cos\gamma) \\ & - 2b^2c^2 \sin\beta (\sin\beta - \sin\alpha \cos\gamma) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Cette équation est compliquée, mais on doit prévoir que les angles α, β, γ, doivent entrer d'une manière symétrique avec a, b, c et que cette équation est susceptible de simplification. En effet les trois angles α, β, γ ne sont pas arbitraires, puisque leur somme est égale à deux angles droits. En vertu de cette condition on démontrera aisément les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma &= \sin^2\gamma \\ \sin\beta - \sin\alpha \cos\gamma &= \sin\gamma \cos\alpha \\ \sin\alpha - \sin\beta \cos\gamma &= \sin\gamma \cos\beta \end{aligned}$$

et par suite l'équation (4) devient :

$$\left\{\begin{aligned} & x^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma \\ & - 2x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma (a^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \sin\beta \cos\beta + c^2 \sin\gamma \cos\gamma) \\ & + a^4 \sin^2\alpha + b^4 \sin^2\beta + c^4 \sin^2\gamma - 2a^2b^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \\ & - 2a^2c^2 \sin\alpha \sin\gamma \cos\beta - 2b^2c^2 \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha \end{aligned}\right\} = 0$$

Cette équation est du second degré par rapport à $x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ et on en tire :

$$x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

$$= \left\{\begin{aligned} & a^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \sin\beta \cos\beta + c^2 \sin\gamma \cos\gamma \\ & \pm \sqrt{\begin{aligned} & a^4 \sin^2\alpha (\cos^2\alpha - 1) + b^4 \sin^2\beta (\cos^2\beta - 1) \\ & \qquad + c^4 \sin^2\gamma (\cos^2\gamma - 1) \\ & + 2a^2b^2 \sin\alpha \sin\beta (\cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta) \\ & + 2a^2c^2 \sin\alpha \sin\gamma (\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma) \\ & + 2b^2c^2 \sin\beta \sin\gamma (\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma) \end{aligned}} \end{aligned}\right.$$

mais la somme des angles α, β, γ, étant égale à deux droits,

$$\begin{aligned} \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta &= \sin\alpha \sin\beta \\ \cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma &= \sin\alpha \sin\gamma \\ \cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma &= \sin\beta \sin\gamma \end{aligned}$$

En conséquence :

$$x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \left\{ \begin{array}{l} a^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \sin\beta \cos\beta + c^2 \sin\gamma \cos\gamma \\ \pm \sqrt{\begin{array}{l} - a^4 \sin^4\alpha - b^4 \sin^4\beta - c^4 \sin^4\gamma + 2a^2b^2 \\ \qquad \sin^2\alpha \sin^2\beta \\ + 2a^2c^2 \sin^2\alpha \sin^2\gamma + 2b^2c^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma \end{array}} \end{array} \right.$$

On remarquera que le radical représente quatre fois la surface du triangle construit avec les trois côtés $a \sin\alpha$, $b \sin\beta$ et $c \sin\gamma$; si donc l'on imagine ce triangle construit et qu'on désigne sa surface par S on aura :

$$(5) \quad x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = a^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \sin\beta \cos\beta + c^2 \sin\gamma \cos\gamma \pm 4S$$

Il est facile de voir que $x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ représente le double de la surface du triangle cherché.

Revenons au triangle construit avec les trois côtés $a \sin\alpha$, $b \sin\beta$, $c \sin\gamma$, et désignons par C l'angle opposé au côté $c \sin\gamma$ dans ce triangle. On aura en vertu de théorèmes connus :

$$c^2 \sin^2\gamma = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta - 2ab \sin\alpha \sin\beta \cos C$$
$$4S = 2ab \sin\alpha \sin\beta \sin C.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (5) par $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta}$ et qu'on y remplace 4S et $c^2 \sin^2\gamma$ par les valeurs ci-dessus, en remarquant que

$$\sin\alpha \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha = \sin(\alpha + \gamma) = \sin\beta$$
$$\sin\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\beta = \sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha$$
$$\cos\gamma \cos C \mp \sin\gamma \sin C = \cos(\gamma \pm C)$$

on trouve, après réduction :

$$(6) \quad x^2 \sin^2\gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma \pm C)$$

Le côté $x \sin\gamma$ opposé à l'angle γ dans le triangle cherché est donc le troisième côté d'un triangle, construit avec les deux côtés a et b comprenant un angle égal à $\gamma + C$ (ou à $\gamma - C$, ou $C - \gamma$, suivant que C sera plus grand ou plus petit que γ.)

Le problème trigonométrique consistera donc à calculer les angles A, B, C du triangle ayant pour côtés $a \sin\alpha$, $b \sin\beta$, $c \sin\gamma$, ou de tout triangle semblable à celui-là, par exemple, avec les trois côtés

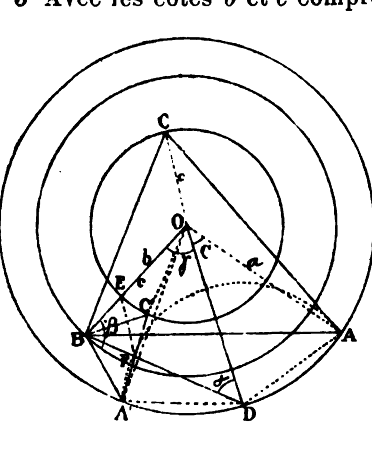
$$a, \quad \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha} \quad \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

et de calculer le troisième côté des triangles construits :

1° Avec les côtés a et b comprenant l'angle $\gamma + C$ ou $\gamma - C$;

2° Avec les côtés a et c comprenant l'angle $\beta \pm B$;

3° Avec les côtés b et c comprenant l'angle $\alpha \pm A$.



Mais l'équation (6) va nous fournir la solution graphique du problème.

Sur le rayon OB, construisons un triangle semblable au triangle donné. de telle sorte que l'angle au centre $BOD = \gamma$, l'angle $OBD = \beta$, l'angle $ODB = \alpha$.

Par le point E où le rayon OB rencontre la circonférence de rayon c, menons EF parallèlement au côté OD; on aura :

$$OD = \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha} \quad BD = \frac{b \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$FD = BD \times \frac{c}{b} = \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Si donc du point D comme centre, avec un rayon $FD = \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}$, on décrit une circonférence qui coupe en A et A', la circonférence de rayon a, et qu'on tire les deux droites OA, OA', puis DA et DA', on aura construit deux triangles égaux DOA, DOA' avec les trois côtés

$$OA = OA' = a, \; DA = DA' = \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}, \; OD = \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha}$$

lequel est semblable au triangle qui aurait pour côtés $a \sin \alpha$, $b \sin \beta$, $c \sin \gamma$; l'angle DOA est donc celui que nous avons désigné par C dans la formule (6), et si l'on tire les lignes BA et BA' on aura dans les triangles BOA et BOA' :

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + C)$$
$$\overline{A'B}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma - C)$$

AB et A'B sont donc les deux valeurs du côté représenté par $x \sin \gamma$.

Connaissant le côté du triangle cherché reposant sur les circonférences de rayon a et b, il est bien facile de compléter la solution graphique.

Cette solution graphique a été indiquée par le résultat de calculs algébriques. Il est facile d'en démontrer l'exactitude par des considérations géométriques très-simples.

En effet, après avoir déterminé le côté BA par la construction indiquée ci-dessus, faisons l'angle BOC = BDA; on a : $\frac{FD}{BD} = \frac{OE}{OB} = \frac{c}{b}$, et à cause de FD = DA on a : $\frac{DA}{BD} = \frac{OE}{OB} = \frac{OC}{OB}$.

Les deux triangles BOC, BDA sont donc semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc l'angle CBO = ABD et par conséquent, l'angle CBA = OBD = β.

Mais les triangles semblables BAD, BOC donnent $\frac{BC}{BA} = \frac{OB}{BD}$, donc le triangle CBA est semblable au triangle OBD; ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.

On montrera de même qu'en faisant l'angle BOC' = BDA', le triangle BA'C' est semblable au triangle OBD et par conséquent au triangle donné.

La solution géométrique est beaucoup plus simple que la solution trigonométrique; mais nous tenons à constater que c'est cette dernière qui nous a conduit à la solution graphique, et que ce n'est qu'après l'avoir ainsi découverte, que nous avons pu en démontrer géométriquement l'exactitude.

Nous avons supposé que l'on prescrivait quel était celui des trois angles α, β, γ dont le sommet devait reposer sur chacune des trois circonférences données; mais le problème

dans sa généralité ne comporte pas cette restriction. On peut donc supposer le sommet de l'angle α sur la circonférence de rayon a; β étant sur la circonférence de rayon b ou sur celle de rayon c, ce qui donne deux cas particuliers, et comme à chacun répondent deux solutions; le sommet de l'angle α restant sur la circonférence de rayon a, il y aura ou pourra y avoir quatre solutions. En supposant le sommet des angles β et γ successivement sur la circonférence de rayon a, on aura huit autres solutions, en tout douze.

Ces douze solutions peuvent être toutes réelles, toutes imaginaires, en partie réelles, en partie imaginaires. Par exemple, avec l'hypothèse suivie dans les calculs ci-dessus, il faut qu'on puisse former un triangle avec les trois côtés $a \sin \alpha$, $b \sin \beta$, $c \sin \gamma$. Si le triangle est impossible avec ces côtés, l'hypothèse adoptée ne donnera lieu à aucune solution. Le problème peut donc être susceptible de deux, quatre, six, huit, dix, douze solutions, ou n'en comporter aucune.

(A suivre.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 124

Solution par MM. Gindre et Faivre, élèves du Lycée de Lons-le-Saulnier.

Construire un triangle dont on connaît la médiane AM *et la bissectrice* AD *issues du sommet ainsi que la différence des angles à la base.*

Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle demandé.

L'angle MDA extérieur au triangle ADB est égal à $B + \frac{A}{2}$; de même l'angle ADB extérieur au triangle ADC est égal à $C + \frac{A}{2}$; par conséquent la différence de ces deux angles ou $MDA - ADB = B - C = \alpha$. D'autre part $MDA + ADB$

$= 180^\circ$, donc $MDA = \frac{180 + \alpha}{2}$. Si nous construisons le cercle circonscrit au triangle ABC, la bissectrice AD prolongée passera par le milieu A′ de l'arc BA′C, il en sera de même de la perpendiculaire élevée au point M sur la droite BC.

De là la construction suivante :

Sur une droite indéfinie xy et en un point D quelconque menons une ligne DA égale à la bissectrice et faisant avec xy un angle $yDA = \frac{180 + \alpha}{2}$. Du point A, avec une ouverture de compas égale à la médiane AM, décrivons un arc de cercle qui coupe xy en un point M. Joignons AM. Au point M élevons une perpendiculaire qui rencontre AD prolongée en A′. Cette droite MA′ renferme le centre du cercle circonscrit au triangle cherché, puisqu'elle est perpendiculaire sur le milieu d'une corde. Ce centre devant également se trouver sur la perpendiculaire élevée au milieu E de AA′, se trouvera à leur intersection O. Si donc de ce point comme centre avec OA pour rayon on décrit une circonférence, elle coupera xy en deux points B et C qui, joints au point A, forment le triangle cherché.

Pour que le problème soit possible, il faut avoir $AM > AD$, puisque dans le triangle AMD l'angle en D est toujours obtus.

Si $AM = AD$ le problème ne sera possible que si la différence des angles à la base est nulle. Alors le triangle est isoscèle.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Manceau, d'Orléans ; Lannes, de Tarbes ; Hoc, de Longwy ; Cordeau, école Lavoisier ; Junck, Vermand, de Saint-Quentin ; Raspilaire, école des Mineurs, de Saint-Etienne ; Chavanon, de Lyon ; Ailleret, de Versailles ; Tissier, d'Angoulême ; Chretien, du Havre.

QUESTIONS PROPOSÉES

159. — Étant donnés quatre points dans un plan, construire un carré dont les quatre côtés passent chacun par un des points donnés.

160. — Soit ABC un triangle dans lequel les deux bissectrices de l'angle en A sont égales. Démontrer que le cercle décrit sur BC comme diamètre rencontre les côtés AB et AC en deux points P et Q, tels que CP = CQ. *(Launoy.)*

161. — Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent à ce côté, et sachant que les bissectrices de cet angle sont égales. *(Launoy.)*

162. — Étant donnés deux points P et P' à l'intérieur d'une circonférence, sur un même diamètre et à égale distance du centre, on propose de mener deux parallèles PQ, P'Q' terminées à la circonférence, et telles que le trapèze PQP'Q' soit maximum. *(De Lonchamps.)*

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne nous communique une note se rapportant à deux articles qu'il nous a déjà envoyés, et nous rappelant que la propriété qu'il a démontrée pour l'ellipse s'applique, sans modification, à l'hyperbole, et donne lieu aux mêmes conséquences.

Erratum. Dans le numéro de mars, page 67, ligne 4, il faut lire : *Étant contenu un nombre exact de fois dans* B, au lieu de : Étant contenu un nombre exact de fois dans R.

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 5210-9.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Combier**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

(*Suite ;* voir page 120.)

IV. **Problème.** — *Étant donnés les trois côtés d'un triangle* a, b, c, *on partage la base* a *en un point* D *qui divise cette base proportionnellement aux nombres* m *et* n ; *on tire la droite* AD ; *on demande de calculer la longueur de cette ligne* AD.

Abaissons la perpendiculaire AF sur la base FD et la projection de la ligne AD sur la base du triangle, et en considérant successivement les deux triangles ADC, ADB, on a :

$$b^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD \times FD$$

$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times FD$$

mais on a $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{m}{n}$; d'où $BD \times n = CD \times m$

Multiplions par m les deux membres de la première des équations ci-dessus, et par n les deux membres de la seconde et ajoutons-les membre à membre, nous aurons :

$$mb^2 + nc^2 = (m + n)\,\overline{AD}^2 + m\overline{CD}^2 + n\overline{BD}^2$$

mais $\qquad CD = \dfrac{na}{m + n} \qquad BD = \dfrac{ma}{m + n}$

$$m\overline{CD}^2 = \frac{mn^2a^2}{(m + n)^2} \qquad n\overline{BD}^2 = \frac{m^2na^2}{(m + n)^2}$$

$$m\overline{CD}^2 + n\overline{BD}^2 = \frac{mna^2}{m + n}$$

d'où $\qquad mb^2 + nc^2 = (m + n)\,\overline{AD}^2 + \dfrac{mna^2}{m + n}$

et par suite :

$$\overline{AD}^2 = \frac{m}{m + n}\,b^2 + \frac{n}{m + n}\,c^2 - \frac{mn}{(m + n)^2}\,a^2$$

Supposons par exemple que BD soit le tiers de la base a, CD les $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{1}{2}$, et il nous faut faire dans la

formule $m = 1$, $n = 2$, et l'on a :

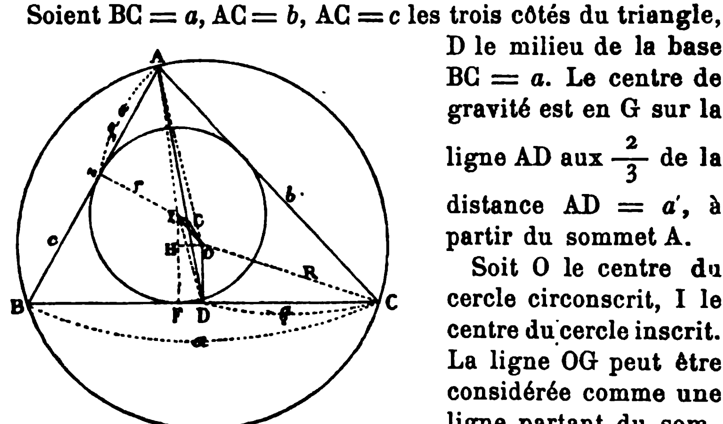
$$\overline{AD}^2 = \frac{1}{3} b^2 + \frac{2}{3} c^2 - \frac{2}{9} a^2$$

ou $$3\overline{AD}^2 = b^2 + 2c^2 - \frac{2}{3} a^2$$

V. — Nous allons appliquer cette formule à la résolution du problème suivant :

Calculer les distances du centre de gravité d'un triangle au centre du cercle circonscrit et au centre du cercle inscrit.

Soient $BC = a$, $AC = b$, $AC = c$ les trois côtés du triangle, D le milieu de la base $BC = a$. Le centre de gravité est en G sur la ligne AD aux $\frac{2}{3}$ de la distance $AD = a'$, à partir du sommet A.



Soit O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit. La ligne OG peut être considérée comme une ligne partant du sommet O du triangle OAD et aboutissant en un point G qui partage la base $AD = a'$ dans le rapport de 1 à 2 et d'après la formule du problème précédent.

$$3\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 + 2\overline{OD}^2 - \frac{2}{3} a'^2 = R^2 + 2\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{2}{3} a'^2$$

en appelant R le rayon du cercle circonscrit au triangle ou remplaçant $\overline{OD}^2$ par $R^2 - \frac{a^2}{4}$ et a'^2 par sa valeur $\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

$$3\overline{OG}^2 = 3R^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}\right)$$

ou $$3\overline{OG}^2 = 3R^2 - \frac{b^2}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{a^2}{3}$$

ou

$$(1) \qquad \overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

Le triangle IAD donnera de même :

$$3IG^2 = IA^2 + 2ID^2 - \frac{2}{3} a'^2$$

$$= IE^2 + EA^2 + 2(IF^2 + FD^2) - \frac{2}{3} a'^2.$$

Si on désigne par r le rayon du cercle inscrit, on a

$$IE = IF = r.$$

Si l'on considère que $2a + 2AE$ représente le périmètre $2p$, on aura $AE = p - a$.

De même $BF = p - b$, $FD = BD - BF = \frac{a}{2} - p + b$

$$= \frac{a}{2} - \frac{a + b + c}{2} + b = \frac{b - c}{2}$$

Remplaçant les lignes par leurs valeurs, on trouve, toutes réductions faites :

$$(2) \qquad \overline{IG}^2 = r^2 + \frac{5}{9} p^2 - \frac{4}{9} (ab + ac + bc)$$

Si par le point O, on mène OH parallèle à la base, on formera un triangle rectangle dont l'hypoténuse IO sera la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit. En observant que l'angle DOC est égal à l'angle A du triangle ABC, on aura :

$$OD = R \cos A, \qquad IF = r$$

$$IH = r - R \cos A \qquad OH = FD = \frac{b - c}{2}$$

et par suite on trouve

$$OI = R^2 - 2Rr + 4Rr \sin^2 \frac{1}{2} A + r^2 - \frac{a^2 - (b - c)^2}{4}$$

or, on a :

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p - b)(p - c)}{bc}, \; r^2 = \frac{(p - b)(p - c)(p - a)}{p}$$

$$\frac{a^2 - (b - c)^2}{4} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{4} = (p - c)(p - b)$$

donc $4Rr \sin^2 \frac{1}{2} A + r^2 - \frac{a^2 - (b-c)^2}{4}$

$$= (p-b)(p-c)\left[\frac{4Rr}{bc} + \frac{p-a}{p} - 1\right]$$

$$= (p-b)(p-c)\left[\frac{4Rr}{bc} - \frac{a}{p}\right]$$

or $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4pr}$ d'ou $\frac{4Rr}{bc} - \frac{a}{p} = 0$

par conséquent

(3) $$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$

Cette distance ne dépend donc que de la valeur des deux rayons R et r.

Les formules (1) et (2) peuvent se mettre sous une autre forme, et les distances OG et IG exprimées en fonction des deux rayons R, r et du périmètre $2p$.

On a : $(a + b + c)^2 = 4p^2$

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab + ac + bc)p - abc$$

$$= -p^3 + (ab + ac + bc)p - abc$$

$$R = \frac{abc}{4pr} \qquad abc = 4pRr$$

par conséquent :

$$pr^2 = -p^3 + (ab + ac + bc)p - 4pRr$$

d'où $$ab + ac + bc = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 4p^2$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 - 2p^2 - 2r^2 - 8Rr = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

en conséquence les formules (1) et (2) deviennent

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{2}{9}(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

$$\overline{IG}^2 = r^2 + \frac{5}{9}p^2 - \frac{4}{9}(p^2 + r^2 + 4Rr) = \frac{1}{9}p^2 + \frac{5}{9}r^2 - \frac{16}{9}Rr$$

Posons $OG = m \quad IG = n \quad OI = q$

et nous aurons les trois équations :

$$\overline{OG}^2 = m^2 = R^2 - \frac{2}{9}(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

$$\overline{IG}^2 = n^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$
$$\overline{OI}^2 = q^2 = R(R - 2r)$$

Ces trois formules vont nous fournir une très-élégante solution du problème suivant.

VI. **Problème.** — *Étant donné sur un plan le centre du cercle circonscrit à un triangle, le centre du cercle inscrit et le centre de gravité, construire ce triangle.*

Soient : C le centre du cercle circonscrit.
I le centre du cercle inscrit.
G le centre de gravité.

Si l'on désigne par m, n, q les distances de ces trois points, c'est-à-dire les côtés du triangle dont ils sont les sommets, en posant :

$$m = CG \quad n = IG \quad q = CI$$

si on désigne par R, r, $2p$ le rayon du cercle circonscrit, celui du cercle inscrit et le périmètre,
on aura, en vertu de formules précédemment démontrées :

$$(1) \qquad m^2 = R^2 - \frac{2}{9}(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

$$(2) \qquad n^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$

$$(3) \qquad q^2 = R^2 - 2Rr$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $+3$
Ceux de l'équation (2) par $+6$
Ceux de l'équation (3) par -2
et additionnons membre à membre ces trois équations ainsi modifiées, nous aurons :

$$(4) \qquad 3m^2 + 6n^2 - 2q^2 = (R - 2r)^2$$

Prolongeons la droite IG, et prenons sur ce prolongement la longueur $GI' = 2GI = 2n$, joignons CI'; je dis que CI' est égal à $R - 2r$.

En effet, le triangle CGI' donne :

$$\overline{CI'}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{I'G}^2 - 2CG \times I'G \times \cos CGI' = m^2 + 4n^2 - 4mn \cos CGI$$

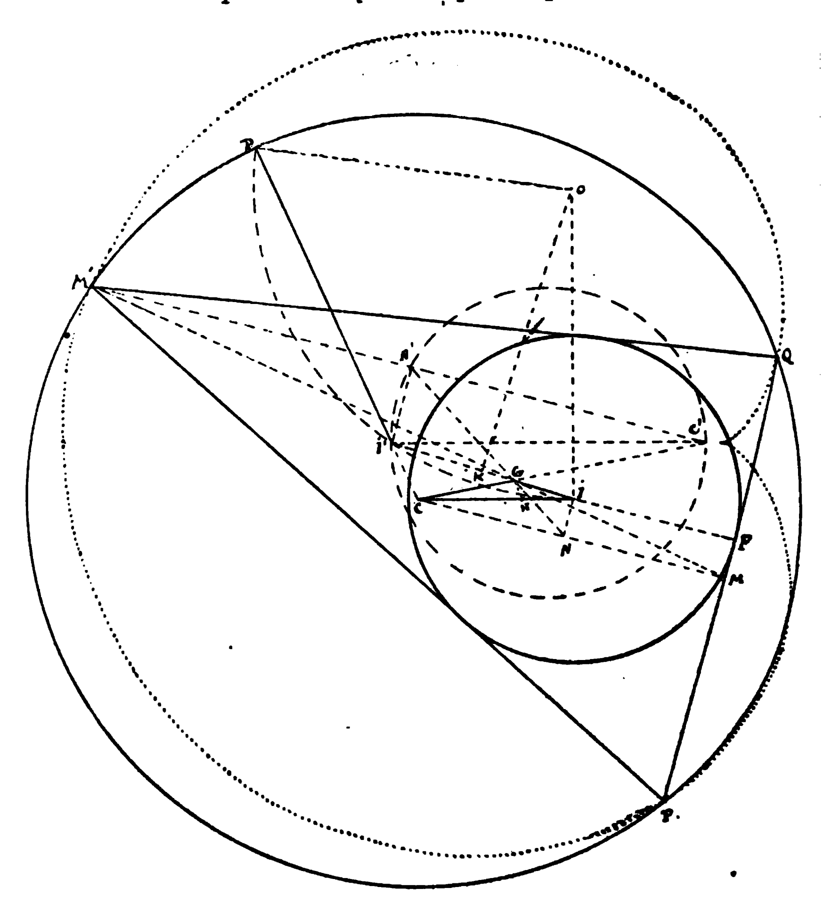
Le triangle CGI donne à son tour

$$q^2 = m^2 + n^2 + 2mn \cos CGI'$$

et par suite $\overline{CI'}^2 + 2q^2 = 3m^2 + 6n^2$

ou bien $\overline{CI'}^2 = 3m^2 + 6n^2 - 2q^2 = (R - 2r)^2$
donc $CI' = R - 2r$

Décrivons maintenant une circonférence tangente à la droite CI au point I et passant par le point I'; cette cir-



conférence va couper en D le prolongement de la droite CI ; je dis que CD est le rayon du cercle circonscrit au triangle cherché, en même temps que la corde I'D est le diamètre du cercle inscrit.

En effet, on a, en vertu d'un théorème connu,

$\overline{CI}^2$ ou $q^2 = CD \times CI' = CD \times (R - 2r)$
mais l'équation (3) donne $q^2 = R (R - 2r)$
donc $R = CD$
et $I'D = R - CI' = R - (R - 2r) = 2r$

Si donc du point C comme centre avec CD pour rayon, on décrit une circonférence, ce sera celle du cercle circonscrit au triangle cherché.

De même, si du centre I, avec la moitié de la corde I'D, on décrit une circonférence, ce sera celle du cercle inscrit.

Nous allons maintenant, par des considérations purement géométriques, compléter la solution de ce problème.

Supposons le problème résolu, et soit M'PQ le triangle qui satisfait aux conditions données.

Si du point C on abaisse une perpendiculaire sur le côté PQ, elle tombera en M, sur le milieu de PQ, et la droite M'M passera par le centre de gravité G, où elle sera divisée aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur.

Si on prolonge la droite CG d'une longueur GC' double de GC, on sait que le point C' est le point de concours des trois hauteurs du triangle ; donc la droite M'C' est perpendiculaire à PQ et par conséquent parallèle à CM, et aussi à IF, ligne qui joint le centre du cercle inscrit au point de contact de sa circonférence avec le côté PQ.

Tirons la droite C'I', elle sera parallèle à CI et double de CI.

Abaissons du point I une perpendiculaire IN sur CM, et du point I' une perpendiculaire I'N' sur C'M'; les deux triangles CIN, C'I'N' seront semblables, comme ayant leurs côtés parallèles et C'I' étant double de CI, I'N' se trouve le double de IN.

Si maintenant on tire GN' et GN, on formera deux triangles GI'N', GIN qui seront semblables comme ayant un angle égal N'I'G' = NIG comme alternes-internes, compris entre deux côtés proportionnels, I'G double de IG, I'N' double de IN; donc l'angle NGI = N'GI' et comme les trois points I, G, I' sont en ligne droite, il en est de même des trois points N', G, N et GN' est double de GN.

Les droites M'N' et MN étant parallèles, les deux triangles

GN'M', GNM sont semblables et M'N' est double de NM, par conséquent double du rayon du cercle inscrit IF, et égal à la corde I'D.

L'angle I'N'C' étant droit, le point N' se trouve sur la circonférence décrite sur I'C' comme diamètre.

Si donc on décrit cette circonférence, que par le point C' on mène un rayon vecteur quelconque qui la coupe en N', et qu'on prolonge ce rayon vecteur d'une longueur N'M' égale à la corde I'D, le sommet M' du triangle cherché se trouvera sur le lieu géométrique de tous ces points M', et comme il doit se trouver aussi sur la circonférence du cercle circonscrit précédemment déterminé, il se trouvera au point de rencontre des deux courbes.

Le lieu géométrique déterminé par les rayons vecteurs partant du point C' et prolongés d'une longueur égale à la corde I'D au delà de leur rencontre avec la circonférence décrite sur C'I' comme diamètre, avec CI $= q$ pour rayon, ne doit pas seulement contenir le sommet M', il doit contenir les deux autres P et Q comme l'indique la figure où ce lieu géométrique est représenté par un trait pointillé. Mais il suffit de tracer avec soin le lieu géométrique dans le voisinage de l'un de ses points de rencontre avec la circonférence, un des sommets suffisant pour construire le triangle dont on connaît le cercle inscrit et le cercle circonscrit.

On chercherait vainement à résoudre graphiquement ce problème par l'emploi exclusif de la ligne droite et du cercle, les distances m, n et q, qui constituent les données de la question, sont toutes trois des fonctions symétriques des côtés et réciproquement. Donc toute équation qui pourra servir à déterminer l'un des côtés en fonction de m, n et q devra les donner tous les trois, elle sera donc du troisième degré.

Ce problème a été choisi pour montrer quels secours peut apporter le calcul à la recherche des éléments d'une figure géométrique, et à la solution graphique d'un problème.

NOTE SUR LA DIVISIBILITÉ

En général, lorsqu'on veut chercher un caractère de divisibilité par un nombre premier, les seuls nombres pour lesquels cette recherche soit utile, on tâche de trouver une puissance de 10 qui, divisée par le diviseur considéré, donne comme reste + 1 ou — 1. On en déduit alors un caractère de divisibilité analogue à la divisibilité par 3 ou par 11, en décomposant le nombre en tranches contenant un certain nombre de chiffres, à partir de la droite. Mais souvent, ce caractère de divisibilité donne lieu à une recherche encore pénible, outre qu'elle n'est pas applicable pour les nombres simples, c'est-à-dire pour les nombres les plus usuels. Nous allons indiquer, dans cette note, une manière de procéder très-générale, qui dans beaucoup de cas donne une méthode fort simple pour trouver le reste de la division par un nombre premier, et nous verrons comment on peut appliquer facilement cette méthode à la recherche de caractères de divisibilité par les nombres premiers inférieurs à 100. Pour cela, nous ferons usage des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Lorsque le diviseur est de la forme* 10p — 1, *on divise les dizaines du dividende par* p ; *à droite du reste on écrit les unités du dividende ; on fait la somme du nombre ainsi obtenu et du quotient. Cette somme ne diffère du dividende que d'un multiple du diviseur.*

En effet, soit A un nombre dont les dizaines sont D et les unités u, de telle sorte que l'on ait :

$$A = D \times 10 + u;$$

Posons en outre $N = 10p - 1$, et

$$D = pq + r;$$

il en résulte $D \times 10 = p \times 10 \times q + r \times 10$

et

$$A = p \times 10 \times q + r \times 10 + u = (N + 1)\,q + r \times 10 + u$$

ou encore $A = m.\,N + q + (r \times 10 + u)$.

Or, la partie entre parenthèses se formera bien en écrivant les unités du dividende à droite du reste de la division des dizaines par p; q est le quotient de cette division.

Remarque. — Si la somme $q + r \times 10 + u$ est supérieure à N, on appliquera encore la même règle, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne N ou un nombre inférieur à N. Dans ce dernier cas, ce nombre sera le reste de la division.

Théorème II. — *Lorsque le diviseur est de la forme* $10p + 1$, *on divise les dizaines du dividende par* p ; *à droite du reste on écrit les unités du dividende; on fait la différence du quotient et du nombre ainsi obtenu ; cette différence et le dividende donné ne diffèrent que d'un multiple du diviseur.*

En effet, en prenant les mêmes notations que précédemment, on aura

$$A = p \times 10 \times q + r \times 10 + u = (N - 1) q + r \times 10 + u$$

ou $$A = m. N - [q - (r \times 10 \; u)]$$

ou bien, si q est trop faible,

$$A = mN + [(r \times 10 + u) - q].$$

Le théorème est donc démontré.

On fera la même remarque que précédemment; on trouve comme reste, o, N ou un nombre inférieur à N; dans ce dernier cas, on aura le reste.

Ces théorèmes établis, nous allons pouvoir indiquer un caractère de divisibilité pour les nombres premiers inférieurs à 100. Pour cela, nous remarquerons qu'un nombre premier est terminé par un des chiffres 1, 3, 7 ou 9. (Nous laissons de côté, cela va sans dire, les caractères de divisibilité simples connus pour 2 et 5).

Si le nombre est terminé par 9, nous appliquons le premier théorème. Et, nous avons ainsi le tableau suivant :

N	p
19	2
29	3
59	6
79	8
89	9

Ainsi, par exemple, un nombre sera divisible par 59, si, en divisant les dizaines par 6, écrivant les unités à droite du reste et

faisant la somme de ce nombre et du quotient, on obtient un nombre divisible par 59.

Prenons par exemple le nombre 6077. Divisons par 6 les dizaines, nous aurons comme quotient 101 et comme reste 1 ; donc nous prendrons $101 + 17 = 118$.

De même 118 donnera $1 + 58 = 59$. Donc 118 est divisible par 59, et par suite il en est de même de 6077.

Si le nombre est terminé par 1, on emploiera le second théorème, et on pourra former le tableau suivant.

N	p
31	3
41	4
61	6
71	7

Prenons par exemple 7747 et cherchons si ce nombre est divisible par 61; divisons les dizaines par 6 ; nous avons comme quotient 129 ; le reste est 0; donc nous prendrons 129 — 7 ou 122. Appliquons la même règle, nous avons $2 - 2 = 0$. Donc 7747 est divisible par 61.

Lorsque le nombre premier n'est terminé ni par 9, ni par 1, on remarquera qu'il est terminé par 3 ou par 7; par suite, on pourra ramener au premier théorème en multipliant par 3, ce qui donnera un nombre de la forme $10\,p - 1$, si le nombre considéré est terminé par 3; ou bien, s'il est terminé par 7, on pourra de la même manière, par une multiplication par 3, avoir un nombre de la forme $10\,p + 1$ et on sera ramené au second théorème. Nous pourrons former les deux tableaux suivants :

N	p
13	4
23	7
73	22
83	25

N	p
7	2
17	5
37	11
67	20

On voit que pour 67, il suffira de diviser les centaines par 2, d'abaiser à droite du reste les deux derniers chiffres, et d'appliquer le second théorème.

Il nous reste encore quatre nombres premiers inférieurs à 100; pour ces quatre nombres, nous allons déduire, encore, de nos théorèmes des règles très-simples pour la divisibilité.

Si nous prenons 43, en le multipliant par 7, on obtient 301, et alors, en appliquant le second théorème, nous diviserons les centaines par 3; à droite du reste, nous abaisserons les deux derniers chiffres; nous ferons la différence entre le nombre ainsi formé et le quotient, et nous verrons si cette différence est divisible par 43.

Exemple: 7783. Prenons le tiers des centaines; nous avons 25, et pour reste 2; nous chercherons la valeur de la différence 283 — 25; cette différence est 258; en la divisant par 43 directement, nous trouvons comme reste 0. Donc 7783 est divisible par 43.

Considérons 97; ce nombre est égal à 100 — 3. Si l'on appelle C les centaines du nombre, U le nombre formé par les dizaines et les unités, on a

$$A = C \times 100 + U = C \times 97 + 3 \times C + U.$$

Donc: *pour savoir si un nombre est divisible par* 97, *on fait le triple de ses centaines, et on y ajoute le nombre formé par les deux derniers chiffres; on cherche si ce nombre est divisible par* 97.

Exemple: 10573; on a $105 \times 3 = 315$; prenons $315 + 73$ ou 388; on trouve de même $3 \times 3 = 9$; $9 + 88 = 97$. Donc 10573 est divisible par 97.

De même, si l'on prend 47, comme $47 \times 2 = 94 = 100 - 6$, on verra que: *un nombre est divisible par* 47 *lorsque* 6 *fois ses centaines, augmentées du nombre formé par ses deux derniers chiffres de droite, donnent un nombre divisible par* 47.

Exemple: 7849. On a $78 \times 6 = 468$; $468 + 49 = 517$. $5 \times 6 = 30$; $30 + 17 = 47$.

Donc 7849 est divisible par 47.

Enfin, si l'on prend 53, on a $53 \times 2 = 106$; donc: *un nombre sera divisible par* 53 *lorsque la différence entre six fois ses centaines et ses unités sera divisible par* 53.

Exemple: 8851. On a $88 \times 6 = 528$; $528 - 51 = 477$; $4 \times 6 = 24$; $77 - 24 = 53$; donc 8851 est divisible par 53.

Il serait facile d'étendre l'emploi des deux théorèmes donnés à la recherche du caractère de divisibilité par un nombre premier quelconque; c'est seulement pour nous limiter que nous avons pris les nombres premiers inférieurs à 100, nombres qui reviennent plus souvent dans la pratique, et qui donnent lieu à des divisions assez simples.

Il peut être intéressant de déduire de l'emploi des théorèmes précédents certains caractères de divisibilité connus, Nous allons considérer, par exemple, la divisibilité par 3 et la divisibilité par 11.

Pour trouver un caractère de divisibilité par 3, nous multiplierons le diviseur par 3, ce qui nous donnera 9, et comme ici $p = 1$, on voit que l'on sera amené à prendre la valeur absolue du nombre formant les dizaines, et à ajouter à cette valeur les unités. Par exemple, si l'on a le nombre 45678, on sera amené à chercher si 3 divise exactement la somme $4567 + 8$. Mais, pour cela, je décomposerai le premier nombre 4567 de la même manière, et je serai amené à considérer $456 + 7 + 8$; en continuant de même je trouverai que : *un nombre quelconque est un multiple de* 3 (*ou de* 9), *augmenté de la somme des valeurs absolues de ses chiffres significatifs.*

Si nous considérons 11, nous verrons, en appliquant le second théorème, que nous devrons prendre la valeur absolue du nombre formé par les dizaines, et en retrancher les unités. Prenons le même nombre que précédemment 45678; nous serons amenés à considérer la différence $4567 - 8$. Si le chiffre des unités était inférieur au chiffre des dizaines, on verrait tout de suite qu'il suffirait de retrancher des dizaines du premier terme la différence entre les unités; pour montrer qu'il en est encore ainsi, je remarque que, pour faire l'opération, je prends la somme des deux nombres $(456 - 1) \times 10$, et $10 + 7 - 8$. En appelant D la différence précédente, j'ai donc

$$\begin{aligned} D &= (456 - 1) \times 10 + (10 + 7 - 8) \\ &= m\,11 - (456 - 1) + (11 - 1 + 7 - 8) \\ &= m\,11 - (456 - 7 + 8) \end{aligned}$$

En continuant de cette manière, on trouvera que : *un nombre*

quelconque est un multiple de 11, *augmenté de l'excès de la somme de ses chiffres d'ordre impair sur la somme de ses chiffres d'ordre pair.*

Enfin, on a $11 \times 9 = 99 = 100 - 1$. On en conclut immédiatement que *si l'on décompose un nombre quelconque en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche pouvant n'avoir qu'un chiffre, ce nombre est un multiple de* 11 *ou de* 9, *augmenté de la somme des valeurs absolues des tranches.*

On retrouve ainsi trois règles bien connues pour la divisibilité par 9 ou par 11.

A. M.

NOTE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

SUR LA SECTION PLANE DU CONE DROIT A BASE CIRCULAIRE

On sait que, si on coupe un cône droit à base circulaire par un plan, la section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole; c'est cette propriété qui a fait donner à ces courbes le nom de *sections coniques*. Il doit évidemment exister un certain nombre de propriétés communes à ces courbes et, en particulier, on doit pouvoir en donner une définition qui s'applique aux trois courbes. Cette définition, que l'on donne seule en Angleterre, est la suivante : *on appelle conique une courbe telle que le rapport des distances de chacun de ses points à un point fixe et à une droite fixe est constant.*

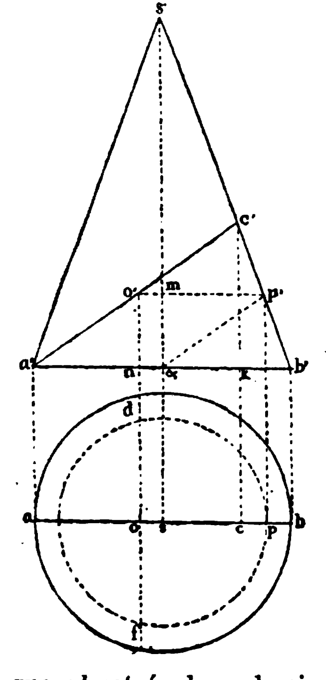
On peut facilement démontrer les propriétés générales de ces courbes en partant de cette définition, et en particulier le théorème qui va faire l'objet de cette note s'expose en quelques mots, et pour les trois courbes. Cependant, je me propose de le démontrer séparément pour chacune des trois courbes, en m'appuyant exclusivement sur les définitions connues et sur les propriétés que l'on démontre dans

tous les cours, en me rapportant au programme de l'École de Saint-Cyr. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Si l'on projette orthogonalement sur le plan de la base la section d'un cône droit à base circulaire par un plan, la courbe projection a pour foyer la projection du sommet, ou le centre du cercle de base.

Comme la projection reste identique à elle-même lorsque le plan de projection se déplace parallèlement à lui-même, nous prendrons, pour plus de simplicité dans la démonstration, le plan de base dans une position particulière, que nous indiquerons dans chaque cas.

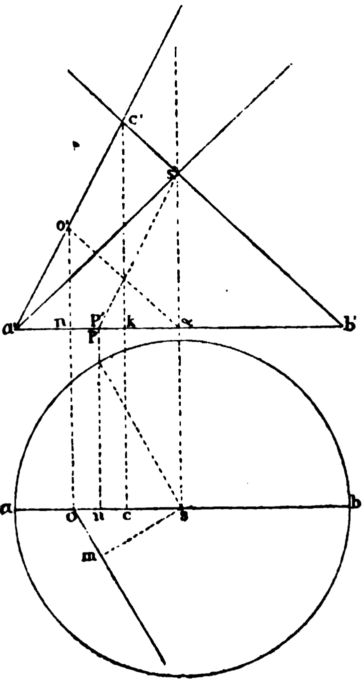
I. **La section est une ellipse.** — Je suppose le plan sécant perpendiculaire au plan vertical, et le plan de base passant par le point où le plan sécant rencontre la génératrice de front. On sait que $a'c'$ représente le grand axe de l'ellipse de section, et ac le grand axe de la projection sur le plan de base. Pour avoir le petit axe, on prend le milieu o' de $a'c'$, et par ce point on mène un plan horizontal; il coupe le cône suivant un cercle qui se projette horizontalement suivant le cercle sp, et le plan sécant suivant une perpendiculaire au plan vertical, dont la projection horizontale est df. La portion de cette droite comprise dans l'intérieur du cercle sp représente le petit axe de la projection, et aussi la vraie grandeur du petit axe de la courbe. Pour montrer que le point s est foyer de la projection, il suffit de prouver que sd est égal au demi grand axe, ou à ao.



Dans le triangle $a'c'b'$ la ligne $o'b'$ est parallèle à $a'b'$ et

passe par le milieu de $a'c'$; donc $o'p' = a'\alpha$; si, dans le parallélogramme $a'o'p'\alpha$ j'abaisse, des deux sommets opposés o' et α, des perpendiculaires $o'n$ et αm sur les côtés parallèles, il est facile de voir que $a'n = mp'$. Mais $a'n = ao$; $mp' = sp = sd$; donc $sd = ao$, et le point s est foyer de l'ellipse dont le grand axe est ac et le petit axe df.

II. **La section est une hyperbole.** — Je donne au plan sécant et au plan de base les mêmes positions que dans le cas précédent. $a'c'$ sera encore l'axe transverse de la section, et ac l'axe transverse de la projection. On sait que le lieu géométrique des projections du foyer sur les tangentes est un cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre, et que l'asymptote est une tangente dont le point de contact est à l'infini. Il en résulte que si du foyer on abaisse une perpendiculaire sur l'asymptote, la distance du centre au pied de cette perpendiculaire est égale au demi-axe transverse. Cette propriété est caractéristique du foyer pour un point de l'axe.



D'après cela, cherchons les asymptotes de la courbe, asymptotes qui se projettent suivant les asymptotes de la projection. Abaissons du point s la perpendiculaire sm sur l'asymptote om. Les triangles semblables spn, som nous donnent

$$\frac{om}{r - a} = \frac{sn}{r} = \frac{p'a}{ab'}.$$

D'autre part, si je joins le point o' au point a, la ligne $o'\alpha$

est parallèle à $c'b'$, puisque o' est le milieu de $a'c'$, et α le milieu de $a'b'$. Donc les triangles $a'o'\alpha'$, $p's'b'$ sont semblables, et ils donnent

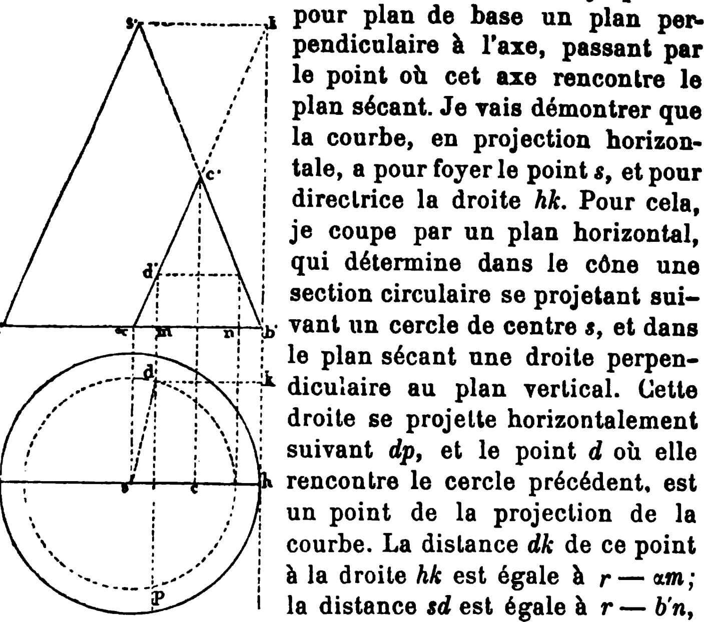
$$\frac{a'h}{h\alpha} = \frac{p'\alpha}{\alpha b'},$$

ou

$$\frac{a}{r-a} = \frac{p'\alpha}{\alpha b'}.$$

En comparant cette égalité avec les précédentes, on en tire $om = a$. Donc le point s est le foyer de la projection horizontale de la courbe.

III. **La section est une parabole.** — Je suppose toujours le plan perpendiculaire au plan vertical, et je prends pour plan de base un plan perpendiculaire à l'axe, passant par le point où cet axe rencontre le plan sécant. Je vais démontrer que la courbe, en projection horizontale, a pour foyer le point s, et pour directrice la droite hk. Pour cela, je coupe par un plan horizontal, qui détermine dans le cône une section circulaire se projetant suivant un cercle de centre s, et dans le plan sécant une droite perpendiculaire au plan vertical. Cette droite se projette horizontalement suivant dp, et le point d où elle rencontre le cercle précédent, est un point de la projection de la courbe. La distance dk de ce point à la droite hk est égale à $r - \alpha m$; la distance sd est égale à $r - b'n$, et comme le triangle $c'\alpha b'$ est isoscèle, puisque $c'\alpha$ est parallèle à $s'a'$, il en résulte que $\alpha m = b'n$; donc $dk = sd$; et comme le point d est quelconque, on voit que la courbe lieu des points d est une parabole ayant pour directrice hk et s pour foyer.



Le théorème est donc démontré dans les trois cas.

A. M.

CONCOURS GÉNÉRAUX

CONCOURS DE 1864

Classe de Seconde (Sciences).

On donne sur une droite quatre points A, B, C, D.

On a AB = 60ᵐ, BC = 20ᵐ, CD = 40ᵐ.

Déterminer un point P duquel ces trois distances soient vues sous le même angle et calculer la distance PI de ce point à la droite ABCD et les distances BI, CI, PA, PB, PC et PD.

— Transformer l'expression

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)}{\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z)}$$

en la rendant calculable par logarithmes.

Classe de Rhétorique (Sciences).

Etant donné un parallélépipède rectangle, on détermine les centres de toutes ses faces : ces centres sont les sommets d'un polyèdre dont on demande le volume et la surface.

— Etant donnés une droite indéfinie AB et un point fixe O sur cette droite, on décrit de ce point fixe comme centre avec un rayon arbitraire, une circonférence de cercle. A partir de l'un des points C où cette circonférence rencontre AB on porte sur cette droite et du côté du centre une longueur CD égale à une longueur donnée, et l'on élève en D une perpendiculaire à AB. On demande le lieu des points M et M' où cette perpendiculaire rencontre la circonférence.

Classe de Philosophie.

Etant données les deux diagonales d'un quadrilatère, le construire de façon à lui donner la plus grande surface possible.

Soient A et B deux points dont la distance est un mètre. De chacun de ces points comme centre avec un rayon égal à un mètre on décrit un cercle. Calculer à un centimètre carré près l'aire de la partie commune aux surfaces des deux cercles.

Classe de Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle et un carré circonscrit ; trouver la relation entre les tangentes des angles sous lesquels les deux diagonales du carré sont vues d'un point de la circonférence du cercle.

— Rendre calculable par logarithmes :

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

Départements.

Etant donné un triangle ABC, on demande de mener par le sommet C une droite CD telle que la somme des projections des côtés AC et BC sur cette droite soit égale à une longueur donnée. Discuter le problème.

Résoudre le même problème par la trigonométrie.

CONCOURS DE 1865

Classe de Troisième.

Une circonférence de cercle tourne dans son plan autour d'un de ses points et dans chacune de ses positions on lui mène des tangentes parallèles à une droite fixe donnée. On demande le lieu des points de contact.

— Un terrain de 60 arpents de Paris a été vendu à raison de 3000 livres tournois l'arpent. La valeur a doublé depuis cette époque. On demande d'évaluer en francs sa valeur actuelle et ce que vaut l'hectare, sachant :

1° que 80 francs valent 81 livres;
2° que l'arpent vaut 100 perches de 18 pieds de côté;
3° que le pied est la sixième partie de la toise;
4° que 10 millions de mètres valent 5130470 toises;

Classe de Seconde.

Étant donnée une équation du second degré, on demande d'en former une seconde qui ait pour racines les carrés des inverses de la proposée.

— On donne un angle trièdre à deux faces égales; on demande de le couper par un plan, de telle sorte que la section soit égale à un triangle équilatéral donné.

Classe de Rhétorique.

Soit CD la directrice d'une parabole, A son sommet, MN une tangente quelconque. On mène du point A une perpendiculaire AQ sur cette tangente; on prend à partir du point A une quantité AR = PQ. Trouver le lieu du point R.

— Trouver les côtés d'un triangle rectangle sachant que le volume engendré par ce triangle en tournant autour de son hypoténuse est équivalent au volume d'une sphère de rayon $\sqrt[3]{\frac{36}{5}}$ et que la somme des deux volumes engendrés par ce triangle en tournant successivement autour de chacun des deux côtés est équivalente au volume d'une sphère de rayon $\sqrt[3]{21}$

Classe de Philosophie.

Dans un cube donné on inscrit une sphère et dans cette sphère on inscrit un second cube. On demande le rapport des volumes de ces deux cubes.

Un bassin a la forme d'un prisme hexagonal régulier. Sa capacité est de 2000 hectolitres; sa profondeur est $1^m,50$. On demande la longueur des côtés de sa base.

Classe de Mathématiques élémentaires.

Étant donnés une circonférence AA'BB' et un point P, on mène par le point P deux sécantes PAA', PB'B qui coupent la circonférence donnée aux points A et A' B et B' respectivement.

Ensuite on circonscrit une circonférence à chacun des triangles PAB, PA'B'. Ces deux circonférences qui ont un point commun en P, se coupent en un second point M.

Cela posé, on demande de trouver le lieu géométrique décrit par le point M quand on fait varier l'une des deux sécantes, PAA', PB'B.

Départements.

Etant donné un triangle isoscèle, on demande le lieu des points du plan tels que la perpendiculaire abaissée de chacun d'eux sur la base du triangle soit moyenne géométrique entre les perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres côtés.

— Résoudre l'équation

$$\sin(x + a) - \sin(x - a) + 2m\cos^2\frac{y}{2} = K$$

dans laquelle a, m, K sont des constantes données et sachant que

$$x + y = \frac{\pi}{2}.$$

Discussion. — Quelles conditions doivent remplir les constantes pour que $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = \frac{\pi}{4}$ soient des solutions de l'équation.

— Interprétation des racines de

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quand a converge vers zéro.

CONCOURS DE 1866

Classe de Troisième.

Etant donnés une circonférence et deux points A et B sur un même diamètre, on joint respectivement aux points A et B les extrémités P et Q d'un diamètre mobile PQ; les droites PA et QB ainsi obtenues les coupent en un point M.

On demande de trouver le lieu géométrique décrit par ce point M quand on fait mouvoir le diamètre PQ.

Classe de Seconde.

Etant donnés une sphère et un plan, on considère chaque point du plan comme le sommet d'un cône circonscrit à la sphère et qui a pour base, en conséquence, un petit cercle de cette sphère.

On demande de trouver le lieu géométrique des centres des petits cercles ainsi déterminés.

Classe de Rhétorique.

Résoudre à la manière des équations du second degré, l'équation

$$x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}.$$

— On a deux pyramides égales à bases carrées et dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On les assemble en faisant coïncider leurs bases, et l'on coupe le polyèdre qui résulte de cet assemblage par un plan mené par le milieu d'une arête, parallèlement à l'une des faces qui aboutissent à l'une ou à l'autre des extrémités de cette arête. On demande la forme de la section plane ainsi obtenue.

Classe de Philosophie.

On donne deux circonférences C et C' et une droite perpendiculaire à la ligne des centres. Par chaque point P de la droite D on mène des tangentes à l'une et à l'autre circonférence, et dans chacune d'elles on joint les points de contact.

Les deux cordes de contact ainsi obtenues se coupent en un point M dont on demande le lieu géométrique.

Classe de Mathématiques élémentaires.

Étant donné un losange ABCD dans lequel la diagonale BD est égale à chaque côté, on mène par le sommet C une droite PQ qui rencontre en P et en Q respectivement les côtés AB et AD. On mène enfin les droites PD et QB qui se coupent en un point M.

Cela posé, on demande de trouver le lieu géométrique décrit par le point M quand la droite PQ tourne autour du sommet C.

CONCOURS DE 1870

Classe de Troisième.

Étant données deux circonférences tangentes extérieurement. On mène par le point de contact A, dans les deux circonférences, les cordes AB et BC, perpendiculaires entre elles. On joint par une droite BC les extrémités de ces cordes et l'on divise cette droite en deux parties qui soient dans un rapport donné.

Lieu des points de division M.

— Le plus petit multiple de deux nombres est 2,520, leur plus grand commun diviseur est 35. Trouver ces deux nombres, sachant que l'un d'eux est les $\frac{8}{9}$ de l'autre.

Classe de Seconde.

Étant donné un tétraèdre dont toutes les arêtes sont égales, on abaisse de l'un des sommets une perpendiculaire sur la face opposée et l'on joint le milieu de cette perpendiculaire aux trois autres sommets. Démontrer que les trois lignes de jonction ainsi menées sont perpendiculaires deux à deux.

— Étant donnée une droite AB, trouver sur cette droite deux points de M et P tels que AM soit moyenne proportionnelle entre AP et MP et que MP soit moyenne proportionnelle entre MB et PB. (Solut. algébrique.)

Classe de rhétorique.

Étant donné un demi-cercle AB on demande de trouver sur la circonférence un point M tel que si l'on mène la tangente MP jusqu'à sa rencontre avec le diamètre prolongé, qu'on joigne le point M au centre, et qu'on fasse ensuite tourner la figure autour de AP, les volumes engendrés par le secteur AOM et par le triangle OMP soient entre eux dans un rapport donné.

Classe de philosophie.

Un triangle équilatéral ABC dont le côté est a, tourne autour d'une droite MN située dans son plan et parallèle à l'un des côtés BC. Quelle doit être la distance des deux parallèles BC et MN pour que le volume engendré par le triangle en tournant autour de MN soit égal à quatre fois le volume engendré par le même triangle tournant autour de son côté BC.

— Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Cas où le quotient est périodique.

Classe de mathématiques élémentaires.

On donne une circonférence O et un point P dans son intérieur. Par ce point on mène deux cordes rectangulaires quelconques APC, BPD. On forme le quadrilatère inscrit ABCD en joignant les extrémités de ces cordes. On trace ensuite les tangentes au cercle aux points A, B, C, D ; les points de rencontre de ces tangentes concourantes forment un second quadrilatère.

Démontrer que ce second quadrilatère A, B, C, D est inscriptible dans un cercle dont le centre est sur la droite PO.

— Exprimer, au moyen du rayon du cercle O et de la distance OP et de l'angle de l'une des cordes avec OP, de l'angle APO par exemple, les segments des cordes, les côtes du quadrilatère inscrit, les segments des côtés du quadrilatère circonscrit et les sinus des angles de ce quadrilatère.

— Démontrer à l'aide des relations obtenues, que le produit des côtés du quadrilatère inscrit, la distance des centres des deux cercles et le rayon du second cercle demeurent invariables quand on fait tourner les cordes autour du point P.

CONCOURS DE 1872.

Classe de troisième

Étant donnés deux cercles qui se coupent, on propose de mener par l'un des points d'intersection A une corde AC telle que la partie MC comprise entre les deux circonférences soit égale à une ligne donnée.

— Extraire la racine carrée de 0,69444...... et expliquer le résultat auquel on parvient.

Classe de seconde

Étant donné un parallélipipède ABCDEFGH on mène les plans BDH et CEG et la diagonale AF et l'on demande :

1° En quels points les triangles BDH et CEG seront rencontrés par cette diagonale ;

2° Dans quels rapports cette diagonale sera-t-elle divisée par les plans de ces triangles.

— Le volume d'un prisme est 36^{m} et si l'on augmente sa base de 7^{mq} en diminuant sa hauteur de 1^{m}, le volume augmente de 12^{mc}.
Trouver la base et la hauteur du prisme.

Classe de Rhétorique.

Etant donné un cercle, on lui circonscrit un parallélogramme que l'on fait tourner autour de l'une de ses diagonales. On demande : 1° de faire voir que la surface et le volume ainsi engendrés sont proportionnels.
2° De calculer cette surface et ce volume. Connaissant le rayon du cercle et l'aire du parallélogramme.

Classe de Philosophie.

Étant donnés un cercle O et une corde AB de ce cercle, on décrit d'un point quelconque M de la circonférence comme centre, un cercle tangent à AB et des extrémités A et B de cette corde on mène des tangentes à la circonférence ainsi décrite. Lieu géométrique des points P où ces couples de tangentes se rencontrent.
— Couper par un plan une sphère donnée de telle façon que la surface de la calotte sphérique détachée soit équivalente à la surface latérale du cône ayant même base et pour sommet le centre de la sphère.

Classe de Mathématiques élémentaires.

Un ballon a été observé en même temps de trois stations situées dans un plan horizontal et qui sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs connues. On a mesuré les angles formés avec le plan horizontal par les rayons visuels dirigés vers le ballon. — Déterminer la hauteur du ballon au-dessus du plan qui passe par les trois stations.
Examiner en particulier le cas où les stations sont les sommets d'un triangle équilatéral.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 70.)

Principe des couleurs. — Tons simples et purs. — En peinture, lorsqu'on ne cherche pas à se tenir dans les lois rigoureuses de la physique, on admet trois couleurs simples que nous nommerons les tons simples, et qui, par leur réunion, formeront le blanc; ce sont :

Le Jaune, couleur claire et brillante;

Le Rouge, couleur éclatante et demi-claire;

Le Bleu, couleur sombre.

Le noir est l'absence de lumière; ce n'est pas une couleur.

Lorsque ces tons sont à leur maximum de densité et qu'ils ne sont mêlés ni de noir ni de blanc, on dit que ces tons sont purs.

Tons rabattus, tons éclaircis. — S'ils sont mêlés de noir, on dit que les tons sont rabattus; s'ils sont mêlés de blanc, on dit qu'ils sont éclaircis.

Suivant la fraction de noir ou de blanc qu'ils contiennent ils peuvent être éclaircis ou rabattus à 1/10, 2/10, 3/10, etc.

Tons composites de 1er, 2e ou 3e ordre. — Si l'on mélange, par parties égales, les tons simples, on obtiendra les tons composites de premier ordre qui pourront être rabattus ou éclaircis.

Rouge et Jaune donnent Orange;
Jaune et Bleu donnent Vert;
Bleu et Rouge donnent Violet.

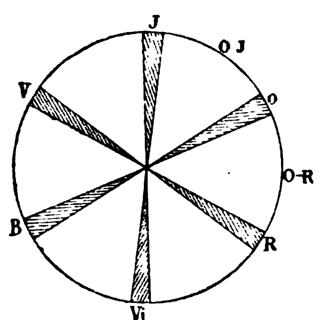
Si l'on mélange un ton composite de 1er ordre avec le ton simple qui en est le plus voisin, on aura un ton composite de 2e ordre.

Orangé et Rouge donnent Orangé-Rouge;
Orangé et Jaune donnent Orangé-Jaune, etc.

Les tons de 3e ordre s'obtiendront en mélangeant l'un des précédents avec la couleur simple du composite qui l'avoisine.

Orangé-Rouge et Rouge donnent Orangé-Rouge-Rouge, etc.

Rosace de couleurs pures. — On trace un cercle: on prend les points situés au sommet d'un triangle équilatéral et l'on y place les trois couleurs simples.



Sur les points situés à égale distance des précédents on placera les tons composites du premier ordre et ainsi de suite.

Cette rosace a été construite par M. Chevreul pour servir aux usages de la manufacture des

Gobelins. Il a construit également d'autres rosaces, donnant les tons de la précédente, mais éclaircis ou rabattus à 1/10, 2/10, etc. Il les a classés et dès lors il lui a été facile, étant donné un ton quelconque, d'indiquer la rosace à laquelle il appartient et la place qu'il y occupe.

Couleurs complémentaires. — Deux tons sont complémentaires lorsque par leur mélange ils donnent du blanc ou du gris non coloré.

Si l'on admet que les trois tons simples sont nécessaires pour former le blanc, on aura d'une manière approchée tous les tons complémentaires les uns des autres, en prenant sur la rosace des couleurs celles qui sont aux extrémités d'un même diamètre.

Le rouge	a pour complément	le vert.
Le jaune	—	le violet.
Le bleu	—	l'orange.

Couleurs usuelles. — On ne trouve que très-difficilement, dans le commerce, les couleurs pures; elles sont toujours plus ou moins mêlées à un pigment noir, de telle sorte que si l'on mélange deux couleurs complémentaires on n'obtiendra pas du blanc, mais du gris.

Si, de même, on mélange un jaune pur et un bleu pur du commerce, on n'obtiendra pas un vert pur mais un vert un peu gris : c'est ce qui explique les efforts des fabricants de couleurs pour arriver à créer directement toutes les nuances des tons purs et composites.

Pour le dessin de machines et le lavis, on n'a besoin que des couleurs suivantes:

Encre de Chine	Ombres.
Ocre jaune	Jaunes.
Gomme gutte	Jaunes.
Jaune indien	Jaunes.
Sépia	Jaunes.
Terre de Sienne brûlée.	Rouges.
Carmin	Rouges.
Vermillon.	Rouges.

Bleu de Prusse		Bleus.
Indigo		
Outremer ou Cobalt		

Teintes conventionnelles. — On a adopté, dans le dessin de machines, les teintes conventionnelles suivantes pour rendre la coloration des principaux matériaux que l'on emploie en mécanique.

Composition des teintes conventionnelles.

Fer, tôle, acier.	Bleu de Prusse.	18	20
	Encre de Chine.	2	
Fonte	Bleu de Prusse.	15	20
	Encre de Chine.	4	
	Carmin	1	
Laiton, bronze	Gomme gutte.	18	20
	Carmin	2	
	Jaune ind. si c'est poss.	»	
Cuivre rouge.	Terre de Sienne brûlée .	10	20
	Carmin	10	
Bois.	Ocre jaune.	4	20
	Sépia	4	
	Terre de Sienne brûlée .	10	
	Carmin	2	

Terrains : — Sépia et Sienne brûlée avec touches plus intenses faites au pinceau.

Ouvrages en coupe : — Carmin très-étendu.

Lavis en camaïeu. — On nomme camaïeu une peinture faite avec un seul ton (bleu, rouge ou noir). Un lavis fait uniquement à l'encre de Chine est un camaïeu.

Il est facile de voir que dans un pareil lavis on rendra d'une manière approchée les effets des couleurs en se servant d'une teinte très-légère pour le jaune, puisque c'est une couleur claire, d'une teinte plus accentuée pour le rouge et d'une teinte plus foncée encore pour le bleu.

Causes de la couleur des objets. — Saturation, sursaturation, sous-saturation. — Un objet éclairé

par la lumière blanche nous paraît coloré, parce que cette lumière est décomposée à sa surface. Une portion est pour ainsi dire absorbée, tandis que l'autre est renvoyée. Si le rouge est absorbé, le vert est renvoyé. La couleur renvoyée est complémentaire de celle qui est absorbée.

Il existera un instant où la limite d'absorption sera atteinte. A ce moment, si l'on éclaire davantage la surface, toute la lumière blanche reçue ne sera pas décomposée: une portion nous sera renvoyée, et l'objet nous paraîtra teinté de sa couleur propre, mais mêlée de blanc, c'est-à-dire éclaircie.

Au contraire, si la lumière blanche éclairante diminue d'intensité, l'objet paraîtra plus sombre et teinté de sa couleur propre rabattue.

Il y aura saturation, dans le premier cas, sursaturation dans le second, et sous-saturation dans le troisième.

Conventions. — Orientations saturées, sursaturées et sous-saturées. — En dessin géométrique, il nous faut un point de départ défini, quoique conventionnel.

Nous conviendrons qu'un plan est à sa limite de saturation, c'est-à-dire à son maximum de coloration, ni teinté de noir, ni teinté de blanc, lorsqu'il est parallèle au plan de la projection que l'on regarde. Nous nommerons orientation saturée celle qui correspond à cette position. Si le plan se place plus normalement à la lumière, il se sursature et s'éclaircit; s'il fait le contraire, il se sous-sature et se rabat.

Il est facile de voir, en consultant les échelles, que sur les surfaces courbes, la zone saturée, c'est-à-dire celle sur laquelle nous devrons trouver la couleur propre de l'objet, ni rabattue ni éclaircie, sera celle comprise entre les lignes de teintes nos 4 et 5. Il est très-important de retenir ce résultat.

(*A suivre.*)

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE CLERMONT

Novembre 1878.

1° Série. — Établir les formules de résolution d'un triangle rectiligne connaissant deux côtés et l'angle compris. Les appliquer à l'exemple suivant : $a = 4{,}732^m$, $b = 3{,}615.9$, $C = 65° 37' 6''$.

2° Série. — 1. Montrer que le triangle formé avec des longueurs inversement proportionnelles aux hauteurs d'un triangle est semblable à ce triangle.

2. Sachant que les hauteurs d'un triangle sont égales à 20 mètres, à 15 mètres et à 12 mètres. Calculer la surface et les côtés du triangle.

3° Série. — Résoudre $2 \operatorname{cotg} x + 3 \operatorname{tg} x = a$.

Discussion. — Application au cas de $a = 2\sqrt{6}$, calculer dans ce cas x en degrés, minutes et secondes.

FACULTÉ DE CAEN

Session d'avril 1879.

1re SÉRIE. — Démontrer qu'une tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et l'axe. — Montrer comment on peut construire la directrice quand on connaît le foyer et le point de contact de la tangente.

— La durée moyenne de la révolution sidérale de la lune étant égale à 27 jours, 32166, celle de l'année sidérale étant de 365 jours, 264, on propose de calculer en jours et fraction décimale de jour la durée de la révolution synodique de la lune et de convertir la fraction décimale obtenue en heures, minutes et secondes.

2e SÉRIE. — Simplifier $p(p-a) + (p-b)(p-c)$

$$\text{pour } p = \frac{a+b+c}{2}$$

— Calculer la bissectrice de l'angle A, connaissant b, c et le triangle étant rectangle.

3e SÉRIE. — Étant donnée la somme des rayons de deux sphères, étudier les variations de la somme de leurs volumes.

FACULTÉ DE PARIS

Session de novembre 1878.

Comment, en géométrie descriptive, obtient-on la distance d'un point à une droite ?

— Trouver les expressions de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. On remarquera que ces expressions sont des fonctions rationnelles de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Pouvait-on prévoir ce fait à priori?

— Partager une droite donnée en deux parties proportionnelles aux carrés de deux lignes données.

— On donne une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre; par le point A et le centre C on mène deux droites parallèles AD et CE faisant avec le diamètre AB un angle x et rencontrant respectivement la demi-circonférence aux points D et E. On joint DE, BD, BE et l'on propose de déterminer l'angle x de façon que l'aire du trapèze ADEC soit le double de l'aire du triangle BED.

— Calculer le rayon de la base et la hauteur h d'un cône connaissant son volume représenté par $\frac{1}{3} \pi a^3$ et sa surface totale représentée par πb^2.

— Calculer la tangente de l'angle A d'un triangle sachant que les côtés ont pour longueur $a = 7$, $b = 4$, $c = 5$.

— Résoudre
$$\sin x + \sin y = a.$$
$$\cos x \cos y = b.$$

Appliquer à $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$.

— Le triangle ABC est rectangle en A, les côtés AB, AC ont une longueur b. Exprimer en fonction de b le volume engendré par la rotation du triangle autour de AX situé en dehors du triangle et faisant un angle de 30° avec AB.

— Le quadrant AB dont le centre est en O est divisé au point C en deux parties telles que la corde AC est le double de la corde CB. Calculer la tangente, le sinus et le cosinus de l'angle $\frac{\text{BOC}}{2}$.

— Calculer le premier terme d'une progression arithmétique connaissant la raison de cette progression et la somme des n premiers termes.

— Démontrer que le trinôme $x - 1 - x^2$ est négatif, quel que soit x.

— Rendre calculable par logarithmes la somme de deux tangentes.

— Etant donné un hémisphère on propose de le couper par un plan parallèle à la base de façon que le volume compris entre le plan et la surface sphérique soit égal à la demi-somme des cônes ayant pour base commune le cercle d'intersection et pour sommets le centre et l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan.

— Etant donné un rectangle OABC, par le sommet O on mène dans l'intérieur du rectangle deux droites OA′, OB′, rencontrant respectivement les côtés AC et BC en A′ et B′ et faisant respectivement le même angle x avec les autres côtés OA et OB. On joint A′ B′. Déterminer l'angle x de façon que l'aire du triangle OA′ B′ soit la somme des aires des triangles OAA′ et OBB′.

— L'angle yox est droit. On porte sur oy une longueur OB $= h$, puis à la suite une longueur BC $= m$. Déterminer la longueur OA sur ox de telle sorte que les deux angles CAB, BAO soient égaux.

— Quelle relation doit-il y avoir entre les tangentes de trois angles pour que la somme de ces angles soit égale à 180°?

— Démontrer que le produit du plus petit commun multiple et du plus grand commun diviseur de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres.

— Examiner la variation de la surface d'un trapèze isoscèle circonscrit à une circonférence donnée.
Indiquer dans quel cas cette surface sera minimum.

— Dans une circonférence de rayon r, on mène un diamètre AB et une perpendiculaire CD à ce diamètre distante du centre d'une quantité d moindre que r. Déterminer les rayons des circonférences tangentes aux deux droites rectangulaires et à la circonférence donnée.

— Etant donné un triangle rectangle BAC, mener par le sommet de l'angle droit A une sécante telle qu'en abaissant les perpendiculaires CD, BE sur cette sécante, la somme des deux triangles ACD, ABE soit égale au triangle ABC.

— Soit un demi-cercle de diamètre AB. Déterminer sur ce demi-cercle un point M tel qu'en menant MN parallèle à AB et en joignant AM, on ait MN = 2 AM. Prendre pour inconnue l'angle MOA.

— On donne un rectangle ABCD, Trouver sur la base supérieure un point M tel qu'en le joignant au sommet A et en faisant tourner la figure autour de la base inferieure AB, la surface engendrée par AM soit égale à celle engendrée par CM.

— On donne l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, former une équation qui aurait pour racines les carrés des racines de la première. Si les racines de la première sont réelles, celles de la seconde le sont aussi. — La réciproque est-elle vraie ?

— De ce que $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$, peut-on en conclure que le triangle soit rectangle.

Session d'avril 1879.

Résoudre

$$a \sin x + b \sin y = a$$
$$a \cos x + b \cos y = b$$

— On donne dans un trapèze isoscèle les deux bases a et b et le côté c. On demande la longueur de la diagonale. Application numérique $a = 25$, $b = 7$, $c = 3$.

— Etant donnés un cercle et un diamètre AB de ce cercle, on considère le rectangle MNPQ dont deux sommets M et N sont à l'intersection du cercle et d'une parallèle à AB et dont les deux autres P et Q sont les projections de M et N sur AB. Déterminer la position de MN pour laquelle la surface de ce rectangle est maxima.

— Quels sont tous les angles x vérifiant l'équation $\cos 2x = \cos x$?

— Calculer les côtés d'un triangle sachant que les longueurs des côtés sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que le nombre qui mesure la surface est égal à deux fois le nombre qui mesure le périmètre.

— Un mobile est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle de 30° avec l'horizon. Quel sera l'espace parcouru au bout d'une minute ? quelle sera alors sa vitesse ?

— Trouver la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est a, la raison r et dont le nombre des termes est n. Pour

quelle valeur de a et de r cette somme sera-t-elle égale à n^2 quel que soit n?

— Résoudre $$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$$

— Étant donné un triangle équilatéral ABC, déterminer l'angle que fait avec le côté AB $= a$ une droite AD menée par le sommet A, dans l'intérieur du triangle, de manière que le volume engendré par le triangle partiel ABD tournant autour de AD soit égal à 4 fois le volume engendré par le triangle ACD tournant autour de cette même droite AD.

— Étant donné un triangle équilatéral ABC de côté a, on prend sur les côtés des longueurs $AA' = BB' = CC' = x$. Quelle doit être cette longueur x pour que l'aire du triangle A'B'C' soit la moitié de l'aire totale ABC.

— Un poids de 10 kilog. glisse sur un plan incliné de 45° sur l'horizon, en suivant une ligne de plus grande pente du plan. Quel est le travail accompli par la pesanteur pendant que le poids se déplace de A en B. AB $= 2^m$

— Calculer $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ connaissant $\cos a$.

— Etant donné un triangle de côtés a, b, c, et d'angles A, B, C, démontrer que les angles aigus x, y, z déterminés par les équations $\cos x = \frac{a}{b+c}$, $\cos y = \frac{b}{a+c}$, $\cos z = \frac{c}{a+b}$ vérifient les relations

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

— Étant donnée une demi-circonférence de diamètre AB $= 2$R et la tangente AC à l'extrémité A du diamètre, on prend un point S sur le prolongement du diamètre AB, et on mène de ce point la tangente SC à la demi-circonférence; on demande de déterminer la distance AS de façon que l'aire latérale du cône engendré par la rotation du triangle SCA autour du côté SA soit équivalente à $\frac{3}{2}$ de l'aire de la surface engendrée dans cette rotation par la demi-circonférence.

— Déterminer toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

QUESTIONS PROPOSÉES

163. — On donne une droite AB; un point C se déplace entre A et B. Sur AC et BC comme diamètres on décrit les circonférences O et O'. On mène une des tangentes communes extérieures qui rencontre en P et Q les tangentes en A et B. On mène PO et QO', ces deux lignes se coupent en un point M dont on demande le lieu géométrique. *(Julliard.)*

164. — Construire graphiquement l'angle x donné par l'équation
$$\operatorname{tg} x = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{3 \cos^2 \varphi - 1}$$
où φ est un angle donné. (*Launoy.*)

165. — b et c sont deux côtés d'un triangle, l et l' les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle compris. Il existe entre ces quatre longueurs la relation
$$4b^2c^2 = l^2(b+c)^2 + l'^2(b-c)^2. \quad (\textit{Launoy.})$$

166. — On donne une ellipse dans laquelle la longueur du petit axe est moyenne proportionnelle entre celle du grand axe et la distance focale. Le centre du cercle inscrit au triangle formé par les deux foyers et un point quelconque de l'ellipse partage la normale en ce point en moyenne et extrême raison. (*Launoy.*)

167. — Construire un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent et le rapport de la surface de ce triangle à celle du triangle formé par les deux bissectrices de l'angle donné et le côté opposé. Examiner le cas où ce rapport est égal à 2. (*Launoy.*)

Avis. — Nous prions nos correspondants de vouloir bien nous faire parvenir, le plus tôt possible, les sujets de composition donnés dans chaque académie au baccalauréat ès sciences à la session d'avril, ainsi que les sujets de concours académiques, aussitôt qu'ils seront connus. Nous rappelons à ce propos que toute communication ne faisant pas double emploi avec un sujet déjà publié sur les questions de concours ou d'examen, tant au baccalauréat qu'à l'École militaire, qui nous serait envoyé, serait accueilli avec reconnaissance.

Nous devons rappeler à nos correspondants les indications suivantes relatives à toute communication : Les solutions émanées de professeurs ne seront pas insérées ni signalées, à moins d'avis contraire. — Toute solution d'une question doit être sur une feuille isolée, ainsi que la figure, que l'on pourra fixer à la feuille relative à la solution correspondante. Chaque solution doit être signée. Les questions proposées doivent, autant que possible, être accompagnées d'un aperçu sur la solution ; sont exceptées de cette condition les questions de concours et d'examen. — Enfin, pour éviter toute confusion ou un oubli involontaire, nous invitons nos correspondants à vouloir bien suivre, pour leur envoi, les indications mises sur la couverture.

A. M.

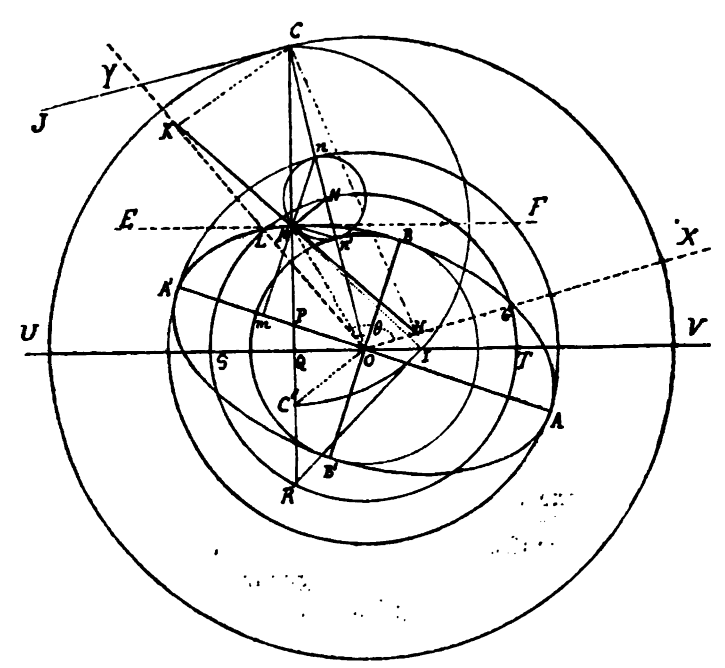
Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 8148-9.

NOTE DE MÉCANIQUE ET GEOMÈTRIE

Par M. H. Lecoq, professeur au Lycée de Constantine.

Le problème suivant de statique, à cause des notions de cinématique qu'il emprunte pour sa solution, conduit à un procédé particulier de construction pour la normale à l'ellipse et à une détermination simple de son rayon de courbure. C'est surtout à ce point de vue que la question offre de l'intérêt.



Etant données sur un plan vertical les traces OX *et* OY *de deux plans inclinés à l'horizon et perpendiculaires au plan vertical, placer dans ce dernier une droite* KH *pesante, homogène, de longueur donnée* l, *de telle sorte qu'étant posée par*

ses deux extrémités sur OX *et* OY, *elle soit en équilibre en faisant abstraction du frottement.*

Soit KH la position d'équilibre et θ l'angle YOX.

Élevons en K et H les perpendiculaires KC et HC à OK et OH ; le point C de leur rencontre est le centre instantané de rotation de la droite KH considérée comme mobile.

Le lieu du point C est une circonférence décrite du point O comme centre, car OC est le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère KOHC et il est égal à

$$OC = \frac{KH}{\sin YOX} = \frac{l}{\sin \theta}$$

Si donc l est constant il en est de même de OC.

La droite MN qui joint les milieux des diagonales de ce quadrilatère a aussi une longueur invariable, car

$$\overline{OK}^2 + \overline{KC}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{HO}^2 = l^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \theta} + 4\overline{MN}^2$$

et comme $\overline{OK}^2 + \overline{KC}^2 = \overline{CO}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HO}^2$

on en tirera $\qquad MN = \frac{l}{2} \operatorname{cotg} \theta$

Le lieu des milieux M de KH est une ellipse passant par les points G et L tels que $OG = OL = \frac{l}{2}$. Les axes de cette ellipse sont dirigés suivant les bissectrices des quatre angles que forment les droites OX, OY et leurs prolongements.

Le petit axe est égal à $\frac{l}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$

Le grand axe à $\qquad \frac{l}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$

Le point C centre instantané de rotation de la droite KH est aussi celui de la droite de longueur constante MN dont les deux extrémités N et M glissent l'une sur la circonférence de rayon $ON = \frac{l}{2}$ et l'autre sur l'ellipse ABA'B', puisque CM est normale à la courbe que décrit le point M, c'est-à-dire à l'ellipse engendrée.

De plus, si N tourne autour de O d'un angle infiniment petit ω, le même point qui est le milieu de OC peut être

considéré comme tournant du même angle autour de C, mais en sens inverse. Pareillement dans un déplacement infiniment petit le point D tournera de l'angle ω autour de C centre instantané de la rotation MN.

Actuellement la condition d'équilibre proposée consiste en ce que la normale CM soit verticale ou que le milieu de la droite HK se trouve au point M de l'ellipse où la tangente EF' est horizontale. En effet, considérons un déplacement virtuel élémentaire qui se réduit à une rotation infiniment petite autour de C. Le travail virtuel des réactions normales de chacun des deux plans est nul de lui-même; le travail du poids appliqué au milieu M de KH est également nul, puisque le déplacement du point d'application est horizontal; donc l'équilibre a lieu.

Le problème ne sera possible que si, dans l'angle θ, on peut mener une tangente horizontale à l'arc d'ellipse intercepté entre les deux côtés de cet angle.

Conséquences :

I. a et b étant les deux demi axes de l'ellipse, on trouvera

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{a+b}{a}}, \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$l = 2\sqrt{ab}, \quad OC = a + b, \quad ON = \frac{a+b}{2}, \quad MN = \frac{a-b}{2}$$

On conclut de ces valeurs la construction suivante de la normale en M.

Du centre O de l'ellipse décrivons deux circonférences avec $a + b$ et $\frac{a+b}{2}$ comme rayons; du point M comme centre et avec $\frac{a-b}{2}$ pour rayon décrivons un arc de cercle qui coupe la seconde en N; tirons ONC et CM sera la normale cherchée.

II. Traçons encore du point O comme centre avec a et b comme rayons deux circonférences; on aura

$$nN = n'N = MN = \frac{a-b}{2}$$

donc le triangle nMn' est rectangle.

Abaissons de n une perpendiculaire sur AA'; soit M_1 son point de rencontre avec l'ellipse; joignons $n'M_1$ et NM_1 (ces constructions ont été omises pour ne pas compliquer la figure). D'après une construction bien connue de l'ellipse, l'angle $nM'n'$ est droit; donc

$$NM_1 = \frac{nn'}{2} = \frac{a-b}{2}$$

et, par suite, M_1 coïncide avec M; en conséquence Mn' est parallèle à AA' et nM lui est perpendiculaire.

III. On en conclut

$$\frac{CM}{MP} = \frac{Cn'}{n'O} = \frac{a}{b}$$

ou, si l'on pose $CM = \beta$ et $MP = n$

$$\frac{\beta}{n} = \frac{a}{b}$$

Or on sait que le rayon de courbure ρ est égal au cube de la normale divisé par le carré du paramètre *,

soit $$\rho = \frac{n^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}$$

donc on a aussi cette expression $\rho = \frac{\beta^3}{ab}$.

* M. Collignon, dans son traité élémentaire de mécanique pour l'enseignement élémentaire spécial, donne, par des considérations élémentaires, une expression du rayon de courbure de l'ellipse, dont il est facile de déduire l'énoncé précédent. En effet, si j'appelle p la distance du foyer F à la tangente en M, r le rayon vecteur correspondant, ρ le rayon de courbure, n la normale, M. Collignon établit d'abord la formule suivante

$$\rho \times \left(\frac{p}{r}\right)^3 = \frac{b^2}{a}.$$

Puis, il montre que la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$;

Mais on a $\frac{p}{r} = \frac{\frac{b^2}{a}}{n}$; donc, on trouve

$$\rho\left(\frac{\frac{b^2}{a}}{n}\right)^3 = \frac{b^2}{a}; \text{ d'où } \rho = \frac{n^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}.$$

IV. Détermination directe du rayon de courbure. ω étant l'angle infiniment petit dont se déplace N en tournant autour de O ou de C, soit φ l'angle infiniment petit correspondant dont se déplace M en tournant autour du centre de courbure C.

Rappelons que le rayon de courbure, comme celui d'un cercle, est égal au rapport d'un arc infiniment petit de sa circonférence à l'angle des normales menées à ses extrémités et que par conséquent l'arc est égal au rayon de courbure multiplié par l'angle en question exprimé en parties du rayon; on aura donc, si l'on convient d'affecter d'un accent les positions simultanées voisines des points N, M et C,
$$CC' = OC \times \omega = (a + b)\omega$$
$$RC \times \varphi = (\rho + \beta)\varphi = CC' \cos(\widehat{JC, EM}) = CC' \cos \widehat{MCN}$$
$$RM \times \varphi = \rho\varphi = CM \times \omega = \beta\omega.$$
JC étant la tangente en C à la circonférence UCV, on en déduira par l'élimination de CC' et du rapport $\frac{\omega}{\varphi}$
$$\beta(\rho + \beta) = \rho(a + b) \cos MCN;$$
or, le triangle MCN donne
$$\cos MCN = \frac{\beta^2 + ab}{\beta(a + b)},$$
d'où
$$\rho = \frac{\beta^3}{ab}.$$

V. Pour construire cette expression, remarquons que le triangle CMO et sa médiane MN donnent :
$$\overline{OM}^2 + \beta^2 = a^2 + b^2.$$
D'ailleurs on a évidemment :
$$\overline{CQ}^2 + \overline{QO}^2 = (\beta + MQ)^2 + \overline{QO}^2 = (a + b)^2$$
et
$$\overline{OM}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QO}^2;$$
d'où
$$\beta \times MQ = ab \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\beta^2}{MQ}.$$
Ce qui justifie la construction suivante :

Décrivons du point M comme centre avec CM ou β comme rayon, l'arc CI jusqu'à sa rencontre en I avec UV parallèle à la tangente EF, autrement dit avec le diamètre conjugué du rayon OM et au point I élevons une perpendiculaire à MI; cette perpendiculaire passera au centre de courbure.

VI. La même figure sert à démontrer aisément la relation MP. MQ $= b^2$ facile à traduire en langage ordinaire.

En observant que $\pi ab = \pi \frac{l^2}{4}$ on en conclut que l'aire de l'ellipse est équivalente à celle du cercle de diamètre l.

On établira aussi que β est moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs menés de M aux foyers de l'ellipse, d'où en les désignant par r et r'

$$\beta^2 = rr'$$

et par suite $$\rho = \frac{rr'}{MQ} = \frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

on arrivera à cette égalité en considérant le triangle des rayons vecteurs et en appliquant le théorème qui donne le produit de deux côtés en fonction de la bissectrice et des segments qu'elle détermine sur la ligne des foyers.

VII. Les projections de β sur les rayons vecteurs prolongés sont constantes et égales à b. C'est ce que l'on déduira des égalités suivantes, en appelant u leur angle

$$4C^2 = r^2 + r'^2 - 2\, rr' \cos u$$

$$r^2 + r'^2 = 2\overline{OM}^2 + 2C^2$$

$$rr' = \beta^2$$

par suite $$b^2 = \beta^2 \frac{1 + \cos u}{2}$$

et $$b = \beta \cos \frac{u}{2}$$

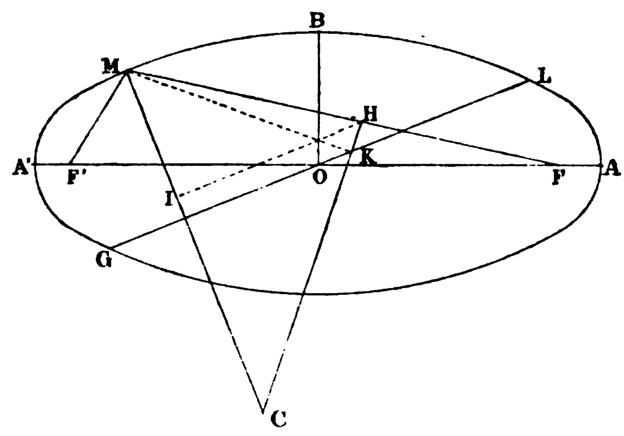
Cette remarque permet de simplifier encore la construction du centre de courbure en dispensant de tracer la circonférence UCV et en déterminant β au moyen de b et d'u.

Soient MF, MF' les rayons vecteurs, AA' le grand axe, OB le demi petit axe, O le centre et M le point considéré de l'ellipse.

Menons la normale MC où la bissectrice de l'angle FMF $= u$; prenons MI $=$ BO $= b$ et menons par I la perpendiculaire IH à MI jusqu'à sa rencontre en H avec l'un des rayons vecteurs MF; on aura

$$b = MH \cos \frac{u}{2} \qquad \text{d'où } MH = \beta$$

Décrivons du centre M avec MH pour rayon l'arc HK jusqu'à sa rencontre avec la parallèle GOL à IH; enfin



élevons KC perpendiculaire à MK et le point C sera le centre de courbure.

Nota (fig. 1). — Si l'on prend MC' = MC = β on aura OC' parallèle à MN et double de cette ligne. Donc le lieu du point C' est une circonférence ayant son centre en O.

D'où ce résultat :

Si sur les normales à l'ellipse on prend à partir du point M de part et d'autre des longueurs égales à $\sqrt{rr'}$, le lieu des extrémités de ces droites seront deux circonférences concentriques ayant pour rayons $a + b$ et $a - b$.

La circonférence décrite sur CC' comme diamètre est donc celle qui contient le point I et sa tangente en I passe par le centre de courbure R.

VARIATION DU TRINOME

$ax^4 + bx^2 + c$.

1. Avant d'étudier cette variation, résumons celle du trinôme $ax^2 + bx + c$. Il peut se mettre sous la forme

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right];$$

et l'on voit que, x variant de $-\infty$ à $-\dfrac{b}{2a}$, puis de

$-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$, le trinôme varie de $\pm\infty$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$, puis de $\frac{4ac-b^2}{4a}$ à $\pm\infty$, l'infini ayant le signe de a. Le trinôme prend les mêmes valeurs pour $x=-\frac{b}{2a}-\alpha$ et $x=-\frac{b}{2a}+\alpha$. Si a est positif, le trinôme a pour *minimum* $\frac{4ac-b^2}{4a}$; si a est négatif, cette même quantité est le *maximum* du trinôme; le minimum est négatif, nul ou positif, suivant que les racines sont réelles et inégales, égales ou imaginaires; c'est le contraire pour le maximum.

Le trinôme peut encore se mettre sous la forme

$$a(x-x')(x-x''),$$

x' et x'' étant ses deux racines. Cette décomposition fait voir immédiatement que la valeur du trinôme est de même signe que a, excepté quand x est compris entre les deux racines, ce qui ne peut arriver que quand elles sont réelles et inégales. C'est ce qu'on peut également conclure de la première décomposition.

Considérons maintenant le trinôme ax^4+bx^2+c.

2. Commençons par remarquer que le trinôme prend les mêmes valeurs pour $x=-\alpha$ et pour $x=+\alpha$; en sorte que x variant de $-\infty$ à o, le trinôme prend les mêmes valeurs que quand x varie de $+\infty$ à o.

3. Le trinôme peut s'écrire $a\left(x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}\right)$.

1° Si $\frac{b}{a}$ est positif, le facteur $x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}$ est constamment croissant avec la valeur absolue de x; par conséquent, x variant de $-\infty$ à o et de o à $+\infty$, ce trinôme diminue constamment de $+\infty$ à $\frac{c}{a}$, puis augmente constamment de $\frac{c}{a}$ à $+\infty$; il a donc seulement un minimum égal à $\frac{c}{a}$. En multipliant par a toutes les

valeurs que prend ce trinôme, on aura celles du trinôme $ax^4 + bx^2 + c$; donc, quand a et b sont positifs, x variant
de $-\infty$ à o, et de o à $+\infty$,
le trinôme varie de $+\infty$ à c, et de c à $+\infty$;
et quand a et b sont négatifs, x variant
de $-\infty$ à o, et de o à $+\infty$,
le trinôme varie de $-\infty$ à c et de c à $-\infty$.

Dans le premier cas c est un minimum, et dans le second cas c est un maximum.

2° Si $\frac{b}{a}$ est négatif, on sait que x^2 variant de $+\infty$ à $-\frac{b}{2a}$, le trinôme $(x^2)^2 + \frac{b}{a}(x^2) + \frac{c}{a}$ décroît constamment de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, et que x^2 décroissant à partir de $-\frac{b}{2a}$, le trinôme va constamment en croissant; donc x variant de $-\infty$ à $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, le trinôme $x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}$ décroîtra d'abord de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, puis x variant de $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à o, le trinôme croîtra de $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ à $\frac{c}{a}$; et x variant de o à $+\infty$, le trinôme repassera par toutes les valeurs précédentes.

En multipliant par a ces deux séries de valeurs, on aura celles du trinôme $ax^4 + bx^2 + c$; donc lorsque a est positif et b négatif, x variant de

$$-\infty \text{ à } -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

et de $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à o,

le trinôme varie de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$

et de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ à c,

en décroissant dans le premier intervalle et en croissant dans le second;

puis x variant de $\quad 0$ à $\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

et de $\quad \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à $+\infty$,

le trinôme varie de $\quad c$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$

et de $\quad \frac{4ac-b^2}{4a}$ à $+\infty$,

en décroissant dans le premier intervalle et en croissant dans le second.

Il y a deux minimums égaux à $\frac{4ac-b^2}{4a}$ et un maximum égal à c.

Mais si a est négatif et b positif, x variant de

$$-\infty \text{ à } -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

et de $\quad -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à 0,

le trinôme varie de $\quad -\infty$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$

et de $\quad \frac{4ac-b^2}{4a}$ à c,

en croissant dans le premier intervalle et en décroissant dans le second; puis x variant de

$$0 \text{ à } +\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

et de $\quad +\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à $+\infty$,

le trinôme varie de $\quad c$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$

et de $\quad \frac{4ac-b^2}{4a}$ à $-\infty$,

en croissant dans le premier intervalle et en décroissan dans le second.

Il y a deux maximums égaux à $\frac{4ac - b^2}{4a}$ et un minimum égal à c.

4. Quant aux signes du trinôme, ils seront donnés facilement par la décomposition en facteurs. On a

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - y')(x^2 - y''),$$

y' et y'' étant les racines du trinôme $ay^2 + by + c$.

Si les racines y' et y'' sont négatives ou imaginaires, le produit $(x^2 - y')(x^2 - y'')$ est constamment positif; par conséquent la valeur du trinôme est constamment du signe de a.

Si y' est négatif et y'' positif, le facteur $x^2 - y'$ est positif; mais le facteur $x^2 - y''$ ou $(x + \sqrt{y''})(x - \sqrt{y''})$ n'est positif que si x n'est pas compris entre les racines $-\sqrt{y''}$ et $+\sqrt{y''}$; en sorte que x variant de $-\infty$ à $-\sqrt{y''}$ ou de $+\sqrt{y''}$ à $+\infty$, le trinôme prend le signe de a; et que x variant de $-\sqrt{y''}$ à $+\sqrt{y''}$, la valeur du trinôme est de signe contraire à a.

Si y' et y'' sont tous deux positifs, le trinôme prend le signe de a quand x^2 n'est pas compris entre y' et y''; et comme

$$(x^2 - y')(x^2 - y'') = (x + \sqrt{y''})(x + \sqrt{y'})(x - \sqrt{y'})(x - \sqrt{y''})$$

on peut dire que le trinôme est positif quand la valeur de x est supérieure ou inférieure à un nombre pair des quatre quantités

$$-\sqrt{y''}, \quad -\sqrt{y'}, \quad +\sqrt{y'}, \quad +\sqrt{y''}.$$

Ainsi le trinôme prend le signe de a quand x est inférieur à $-\sqrt{y''}$ ou compris entre $-\sqrt{y'}$ et $+\sqrt{y'}$ ou supérieur à $+\sqrt{y''}$; et il est de signe contraire à a quand x est compris entre $-\sqrt{y''}$ et $-\sqrt{y'}$ ou entre $+\sqrt{y'}$ et $+\sqrt{y''}$.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 151.)

Des teintes. — Transparence et intensité d'une teinte. — Une teinte d'encre de Chine ou de couleur appliquée sur le papier agit comme un verre coloré ou teinté qui ne laisse passer qu'une fraction de la lumière qui est distribuée à ce papier et qui nous est renvoyée par lui.

Nous appellerons transparence d'une teinte, la fraction de la lumière que laisse passer cette teinte.

L'intensité serait la fraction de lumière arrêtée.

Si on représente par T la transparence et par I l'intensité, on aura $T + I = 1$.

Problème n° 1. — Quelle est la transparence finale T'' de deux teintes superposées de transparence T et T'? — On aura: $$T'' = T \times T'$$

En effet, la teinte de transparence T', par définition, laisse passer une fraction T' de la teinte sur laquelle on l'applique; si donc cette teinte n'a qu'une transparence T, la transparence totale sera $T \times T'$.

Conséquences: 1° Si l'on prend une série de teintes égales superposées, tandis que le nombre des teintes croîtra en proportion arithmétique, la transparence finale décroîtra en proportion géométrique;

2° Si l'on passe une même teinte sur deux autres teintes inégales, l'assombrissement relatif le plus considérable sera produit sur la teinte la plus faible.

Problème n° 2. — Réaliser au lavis à l'encre de Chine une teinte de transparence connue, $\frac{2}{3}$ par exemple.

Avec un tire-ligne rempli d'encre absolument noire on tracera une série de traits parallèles et équidistants. Ces

traits auront une épaisseur constante, $\frac{1}{2}$ millimètre, par exemple, et les blancs compris entre eux auront un millimètre. Vue de loin, une feuille de papier ainsi réglée paraîtra teintée. La surface des blancs sera les $\frac{2}{3}$ de la surface totale et par suite on peut admettre, en ne tenant pas compte des effets d'irradiation, que la transparence de la teinte ainsi figurée sera $\frac{2}{3}$. Il sera facile ensuite de mélanger d'eau une teinte d'encre de Chine, de telle sorte que la teinte qu'elle fournira au pinceau soit équivalente à celle que nous venons de créer au tire-ligne.

A

Mélange des teintes dans le godet. — Problème n° 3. — On a dans un premier godet un volume V de teinte de transparence t et dans un deuxième godet un volume V′ de teinte de tranparence t'. On les mélange; quelle sera la transparence t'' de la teinte ainsi formée?

Imaginons, pour fixer les idées, que la couche d'eau teintée déposée par le pinceau ait une épaisseur constante E.

Répartissons la teinte du premier godet entre n diaphragmes sans épaisseur, séparés entre eux par une distance E. Au lieu du volume V on pourra, si les diaphragmes ont pour surface l'unité, prendre la quantité nE.

$$V = nE.$$

La deuxième teinte répartie de même aura un volume V′ représenté par n'E.

La transparence de la teinte comprise entre deux diaphragmes du premier vase est T, et puisque, nous avons n diaphragmes, la transparence finale des n diaphragmes du premier vase regardés en totalité sera $T = t^n$; de même la transparence finale des n' diaphragmes du deuxième vase régardés en totalité sera :

$$T_2 = t'^{n'}$$

Si nous plaçons les deux vases au bout l'un de l'autre la transparence totale sera :

$$T_3 = T \times T_2 = t^n t'^{n'}$$

Mais il est évident qu'il reviendrait au même de mêler d'abord ces deux teintes et de les diviser en $n + n'$ diaphragmes, ou de faire ce que nous venons d'indiquer. D'ailleurs, il est facile de vérifier par expérience que si dans une cuve transparente on place deux teintes d'inégale intensité, séparées par une lame de verre, la transparence totale sera la même, si on laisse cette lame sans mêler les teintes ou si on a enlevé la lame en les mêlant.

Soit t'' la transparence de la teinte résultante, d'épaisseur E comprise alors entre deux diaphragmes, on aura :

$$T_3 = t''^{(n + n')}$$

d'où l'on déduit : $t'^{\,n + n'} = t^n t'^{n'}$,

ou : $t''^{(v + v')} = t^v t'^{v'}$,

et $t'' = \sqrt[v+v']{t^v t'^{v'}}$

Cette formule donnerait le moyen de créer par des mélanges convenables une teinte de transparence déterminée, une fois constituée comme ci-dessus, une autre teinte de transparence connue.

Si l'on veut opérer par des additions d'eau, l'eau ayant une transparence $t = 1$, on fera dans la formule $t = 1$. Si, de plus, on prend pour unité le volume de la teinte à modifier, la formule précédente se simplifiera en faisant $v' = 1$.

Exemple. — Quel volume d'eau faut-il ajouter à un volume égal à l'unité de teinte $\frac{2}{3}$ pour obtenir la teinte $\frac{4}{5}$.

La formule générale est $T''^{(v + v')} = T^v \times t'^{v'}$

On fera : $t = 1 \quad v' = 1 \quad t = \frac{2}{3} \quad t'' = \frac{4}{5}$

Il viendra $t''^{(v + 1)} = t'$

et $(v + 1) \log t'' = \log t'$

$$V = \frac{\log t' - \log t''}{\log t''} = \frac{\log \frac{2}{3} - \log \frac{4}{5}}{\log \frac{4}{5}}$$

$$= \frac{007918}{009681} = 0.82$$

Pour faire un godet de teinte $\frac{4}{5}$ avec un godet $\frac{2}{3}$, il faudra l'additionner des 0.82 de son volume d'eau pure.

Dans la pratique, on ne s'inquiète jamais de faire rigoureusement ces mélanges, ce n'est qu'après avoir exécuté de nombreux exercices de lavis que l'on arrive à la juste appréciation des mélanges à faire pour avoir les teintes convenables. Il est bon d'avoir un gros pinceau qui sert de jauge et à l'aide duquel on additionne d'eau les teintes comme nous l'indiquerons plus loin.

Classification des teintes. — Nous diviserons ces teintes en quatre séries * :

1° La teinte d'ébauche (teinte n° 0). C'est une teinte d'encre de chine de transparence $\frac{2}{3}$ environ, que l'on place sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée;

2° Les teintes d'ombre propre et les demi-teintes au nombre de quatre (teinte 1, 2, 3, 4). Ce sont encore des teintes d'encre de chine.

La teinte n° 1 s'obtient en additionnant de 1/6 environ d'eau pure la teinte 0, et se passe entre les lignes $+ 1$ et $\overline{1}$.

La teinte n° 2 se passe entre $+ 2$ et $\overline{2}$. On l'obtient en additionnant encore la teinte 1 avec de l'eau et ainsi de suite.

3° Les teintes de couleurs au nombre de trois (teintes 5, 6 et 7).

Elles sont diversement composées, suivant la nature de l'objet et vont en augmentant de transparence. (Voir teintes conventionnelles). On les passe entre $+ 5$ et $\overline{5}$, $+ 6$ et $\overline{6}$, $+ 7$ et $\overline{7}$. Sur le modèle en chromolithographie, il n'y a pas de teinte n° 8 et l'on a laissé la zone brillante complétement blanche. Dans les dessins lavés, on passera une teinte n° 8 excessivement légère;

4° Teintes d'ombres portées (teintes n°s 9, 10, 11, 12, etc.). D'après ce qui a été dit sur l'intensité des ombres, on sait

(*) Voir pour les limites indiquées ici le *Traité des Ombres et du Lavis*, et les tracés précédents pour la sphère (pp. 78 et 112). Voir aussi les modèles de lavis (Libr. Delagrave).

qu'une zone dans l'ombre portée sera d'autant plus noire qu'elle eût été plus claire si elle n'eût pas été dans l'ombre.

Si donc certains cônes ou cylindres étaient dans l'ombre portée, la zone $+ 7$ devrait être la plus noire; viendraient ensuite les zones $+ 7$, $+ 6$, $+ 5$, etc.

On devrait donc, dans ce cas, passer une première teinte noire, plus noire que la teinte d'ébauche, sur la zone 7. Une deuxième teinte s'étendant jusqu'à la ligne $+ 6$ et recouvrant les zones $+ 7$ et $+ 6$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la ligne n° 0.

On remarquera que ces teintes doivent être plus intenses que les précédentes pour plusieurs raisons : 1° il faut qu'elles détruisent l'effet de dégradation produit par les précédentes et en sens inverse de celui que l'on veut maintenant obtenir; 2° il faut qu'elles produisent une nouvelle dégradation; 3° elles s'appliquent sur une région fortement teintée déjà et, comme on l'a vu plus haut, leur effet relatif en est diminué.

Pratique du lavis. — Pratiquement, on opérera ainsi : avec le gros pinceau servant de jauge, on mesurera dans le godet 6 forts pinceaux d'eau pure. Dans cette eau, on délayera l'encre de Chine de manière à donner naissance à une teinte $t = \frac{2}{3}$ environ. Ce sera la teinte d'ébauche n° 0 que l'on passera sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée, indistinctement. Cela fait, on y ajoutera un pinceau d'eau, ce qui donnera la teinte n° 1 passée des lignes $+ 1$ à $\bar{1}$. On ajoutera à cette teinte deux pinceaux d'eau, ce qui donnera la teinte 2, passée de $+ \bar{2}$ à $\bar{2}$. — On y ajoutera trois pinceaux d'eau ce qui donnera la teinte $+ 3$ et ainsi de suite.

Ombres portées. — On fera dans 6 pinceaux d'eau une teinte $t = 1/2$, c'est-à-dire plus forte que la teinte d'ébauche et on la passera sur les zones qui sont dans l'ombre portée et qui eussent été les plus claires sans l'existence de cette ombre. — On y ajoutera un pinceau d'eau et on la

passera à cheval sur la précédente en avançant d'une ligne de part et d'autre, et ainsi de suite jusqu'à venir se souder sur la ligne d'ombre propre n° 0.

(*A suivre.*)

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

Note du traducteur. — En publiant cette note, nous avons pour but de rappeler un certain nombre de formules connues de nos lecteurs, et en même temps de leur donner sur le triangle des formules nouvelles, que le Rev. James Booth a publiées dans un ouvrage qu'il a eu bien juste le temps de terminer, puisque la préface du second volume est datée du premier jour de l'an 1877, et que le journal anglais *the Educational Times* de mai 1878 annonçait à ses lecteurs la mort du révérend James Booth. Nous tenons à ne faire ici que traduire cet article, en conservant toute la concision des démonstrations de l'auteur; c'est pour cela que nous avons mis son nom en tête de l'article. A. M.

SUR LES CERCLES INSCRITS, EX-INSCRITS, ET CIRCONSCRITS A UN TRIANGLE.

1. Lorsqu'un triangle est donné, on peut trouver seize cercles liés à ce triangle, savoir : un cercle circonscrit, un cercle inscrit, trois cercles touchant chacun un côté et les deux autres côtés prolongés; six passant par les centres des cercles tangents et les sommets du triangle pris deux à deux; quatre par les centres des cercles inscrits et ex-inscrits, pris trois à trois; enfin un seizième cercle passant par les pieds des hauteurs; on peut l'appeler le *cercle orthocentrique*, il est circonscrit à un triangle que l'on appelle

orthocentrique (*). Il est aussi connu sous le nom de *cercle des neuf points*. Les autres cercles sont désignés par leurs définitions. Les quatre cercles tangents aux côtés peuvent se nommer *cercles de contact*, et leurs centres sont les *centres de contact*.

Soient r, r', r'', r''' les rayons des cercles inscrits et exinscrits, R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; les centres de ces cercles seront désignés par ω, Ω, Ω', Ω'', O; soit H le centre du cercle inscrit dans le triangle orthocentrique, et ρ son rayon. Le cercle inscrit touche les côtés du triangle aux points B′, A′, F, et le cercle ex-inscrit touche les mêmes côtés aux points G, M, F′, et comme BG $=$ BF′ et AM $=$ AF′, on a, en appelant a, b, c les côtés du triangle opposés aux angles A, B, C, BG $+$ AM $=$ BA $= c$. Par suite CG $+$ CM est égal au périmètre du triangle et comme CG $=$ CM, CG ou CM est égal au demi-périmètre du triangle; désignons par p ce demi-périmètre. Comme CA′ $=$ CB′, on a GA′ $=$ MB′, et puisque GA′ $=$ BF′ $+$ BF, et MB′ $=$ AF $+$ AF′, on en déduit BF′ $+$ BF $=$ AF′ $+$ AF; d'où BF $=$ AF′: donc BA $=$ GA′ $=$ MB′ $= c$. Par suite

$$BG = p - a;\ MA = p - b;\ CA' = p - c.$$

Soit Δ l'aire du triangle, on a les formules connues

$$\Delta = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}. \quad (1)$$

(*) L'auteur a précédemment défini le *triangle orthocentrique* le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs; le point de concours des hauteurs a été appelé par lui *orthocentre*.

On a aussi :

$$r' = \frac{pr}{p - a}; \quad r'' = \frac{pr}{p - b}; \quad r''' = \frac{pr}{p - c}. \qquad (2)$$

par suite $rr'r''r''' = \dfrac{p^4 r^4}{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \Delta^2 \qquad (3)$

Prenant les inverses de (2) on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}; \qquad (4)$$

d'où $\qquad r = \dfrac{r'r''r'''}{r'r'' + r'r''' + r''r'''} \qquad (5)$

Mais comme $rr'r''r''' = \Delta^2$, et $pr = \Delta$, on a

$$p^2 = r'r'' + r'r''' + r''r''' \qquad (6)$$

Puisque $\quad p - a = \dfrac{pr}{r'}; \; p - b = \dfrac{pr}{r''},$

on a $2p - a - b = c = pr\left(\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{r''}\right) = \dfrac{prr'''(r' + r'')}{r'r''r'''}$

mais $\qquad r'r''r''' = p^2 r;$

donc $\qquad c = \dfrac{r'''(r' + r'')}{p}$

et de même $\quad a = \dfrac{r'(r'' + r''')}{p}; \; b = \dfrac{r''(r' + r''')}{p} \qquad (7)$

et puisque $4R = \dfrac{abc}{pr}$, en substituant les valeurs précédentes de a, b, c, on a

$$4R = \frac{r'r''r'''(r'' + r''')(r''' + r')(r' + r'')}{p^2 r(r''r''' + r'''r' + r'r'')} \qquad (8)$$

Mais, d'après la formule (6), on a $r'r''r''' = p^2 r$;

donc $\quad 4R = \dfrac{(r' + r'')(r'' + r''')(r''' + r')}{r'r'' + r''r''' + r'''r'} \qquad (9)$

Maintenant, si l'on développe le numérateur et que l'on ajoute au premier membre r, et au second la quantité égale donnée par la formule (5), on a, tous calculs faits

$$4R + r = r' + r'' + r'''. \qquad (10)$$

Ainsi : *La somme des rayons des cercles ex-inscrits est égale à la somme du rayon du cercle inscrit et de quatre fois le rayon du cercle circonscrit.*

Puisque $\quad p - a = \dfrac{pr}{r'}$ et $p - b = \dfrac{pr}{r''}$,

on a $$(p - a)(p - b) = \frac{p^2r^2}{r'r''},$$

ou $$p^2 - (a + b)p + ab = \frac{p^2r^2r'''}{r'r''r'''}.$$

En prenant les expressions analogues pour les autres côtés, et ajoutant, on a

$$3p^2 - 4p^2 + ab + ac + bc = \frac{p^2r^2(r' + r'' + r''')}{r'r''r'''}$$

mais $$p^2r = r'r''r''';$$

par suite $$ab + ac + bc = p^2 + r(r' + r'' + r''');$$

comme $$r' + r'' + r''' = 4R + r,$$

on a $$bc + ac + ab = p^2 + 4Rr + r^2 \qquad (11)$$

et par suite $$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \qquad (12)$$

Ces théorèmes pourraient être établis plus simplement en éliminant successivement $bc + ac + ab$ et $a^2 + b^2 + c^2$ entre $2p = a + b + c$ et $pr^2 = (p - a)(p - b)(p - c)$.

2. Puisque $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{r}$ (voir la formule 4)

on a, en élevant au carré,

$$\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r'''^2} = \frac{1}{r^2} - 2\left(\frac{1}{r'r''} + \frac{1}{r'r'''} + \frac{1}{r''r'''}\right)$$

ou $$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r'''^2} = \frac{2}{r^2} - \frac{2(r' + r'' + r''')r}{r'r''r'''}$$

mais $$r' + r'' + r''' = 4R + r,$$

et $$rr'r''r''' = p^2r^2$$

donc $$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r'''^2} = \frac{2p^2 - 8Rr - 2r^2}{p^2r^2} \qquad (13)$$

Mais, en vertu de la formule (12) on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2.$$

Par suite $$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r'''^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2} \qquad (14)$$

Donc : *La somme des inverses des carrés des rayons des quatre cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle est égale à la somme des carrés des côtés du triangle, divisée par le carré de la surface de ce triangle.*

3. Soient h', h'', h''' les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur le côté opposé, alors ah', bh'',

ch''' sont égaux chacun à $2pr$, et comme on a $\frac{1}{r'} = \frac{p-a}{pr}$; $\frac{1}{r''} = \frac{p-b}{pr}$ on a aussi

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = \frac{c}{pr} = \frac{2c}{h'''c}, \text{ d'où } h'''\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) = 2;$$

de la même manière, on aura

$$h'\left(\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}\right) = 2, \text{ et } h''\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'''}\right) = 2.$$

Par suite $\frac{h' + h''}{r'''} + \frac{h'' + h'''}{r'} + \frac{h''' + h'}{r''} = 6.$ (15)

4. *La somme des carrés des côtés d'un triangle est égale au double de la somme des produits de chaque hauteur par la distance comprise entre le sommet correspondant et l'orthocentre.*

Soit h' la hauteur correspondant à l'angle A; la distance du sommet A à l'orthocentre est $2R\cos A$ et son produit par h' est $2Rh'\cos A = 4\Delta R \frac{\cos A}{a}$,

en appelant Δ la surface du triangle. On peut écrire cette expression $2\Delta R \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$.

En prenant les expressions analogues pour les autres angles, et remarquant que l'on a

$$abc = 4\Delta R,$$

il vient

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2R\,(h'\cos A + h''\cos B + h'''\cos C).$$

5. Dans un triangle plan, on a la relation

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{2p} = \frac{r}{R}. \quad (16)$$

Car si l'on désigne par q', q'', q''' les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés du triangle a, b, c, on a

$$\cos A = \frac{q'}{R};\ \cos B = \frac{q''}{R};\ \cos C = \frac{q'''}{R}. \quad (17)$$

Par suite

$$\frac{aq' + bq'' + cq'''}{2pR} = \frac{2\Delta}{2pR} = \frac{\Delta r}{Rpr} = \frac{r}{R}. \quad (18)$$

La somme des rapports de chacune des distances du centre à un côté à la hauteur correspondante à ce côté est égale à l'unité.

Car on a

$$\frac{q'}{h'} = \frac{\text{surf COB}}{\text{surf CAB}}. \text{ Donc } \frac{q'}{h'} + \frac{q''}{h''} + \frac{q'''}{h'''} = 1. \quad (19)$$

La somme des inverses des hauteurs est égale à l'inverse du rayon du cercle inscrit.

Car on a, en appelant ω le centre de ce cercle

$$\frac{r}{h'} = \frac{\text{surf B}\omega\text{C}}{\text{surf BAC}}.$$

En cherchant les expressions analogues pour les autres termes, et ajoutant, il vient

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} = \frac{1}{r}. \quad (20)$$

Si l'on revient à la figure, on voit facilement que l'on a

$$\frac{\Omega\omega}{C\omega} + \frac{\Omega'\omega}{B\omega} + \frac{\Omega''\omega}{A\omega} = 2,$$

car
$$\frac{\Omega\omega}{C\omega} = \frac{GA'}{GC} = \frac{c}{p};$$

de même
$$\frac{\Omega'\omega}{B\omega} = \frac{b}{p}; \quad \frac{\Omega''\omega}{A\omega} = \frac{c}{p}.$$

La somme de ces rapports est égale évidemment à 2.

(*A suivre*).

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1879

Composition mathématique (*Durée*, 3 heures).

Première Question. — *Calculer les angles* x, *compris entre* 0° *et* 180° *donnés par la formule*

$$\text{tg } 2x = \frac{a \sin \beta - b \sin . \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha},$$

dans laquelle on fait

$$a = 4627^{m},55; \quad b = 3994^{m},68$$
$$\alpha = 51°57'44''; \quad \beta = 63°18'27''.$$

Solution. — On divise par a sin β les deux termes du second membre et on pose

$$\text{tg } \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

La formule devient alors

$$\text{tg } 2x = \text{tg } (45 - \varphi)$$

d'où l'on tire $$2x = K\pi + (45 - \varphi)$$

et par suite $$x = \frac{K\pi}{2} + \frac{(45 - \varphi)}{2}.$$

Comme, d'après les données $45 - \varphi$ est positif, il y a deux angles répondant à la question, données en faisant $K = 0$ et $K = 1$,

on trouve $\varphi = 36°55'14'',47$

d'où $45 - \varphi = 8° \ 4'35'',53$

et $x_1 = 4° \ 2'17'',72$ $x_2 = 94° \ 2' \ 17''72$.

2e Question. — *Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont les hauteurs égales, les surfaces totales égales et les volumes égaux; la hauteur est donnée, et l'on demande de calculer le rayon des bases.*

Appelons h la hauteur commune, x le rayon de base du cylindre, y celui du cône, z l'arête de ce dernier. On a les équations $$z^2 = h^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$\pi zy + \pi y^2 = 2\pi x (h + x) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{3} \pi y^2 h = \pi x^2 h \qquad (3)$$

La troisième donne immédiatement, puisque x, y et z sont positifs $y = x\sqrt{3}$.

Portons cette valeur dans la seconde et divisons par x, ce qui supprime la solution inadmissible $x = 0$, il vient, après avoir divisé par π: $z\sqrt{3} + x = 2h$;

la seconde équation donne:

$$z^2 - 3x^2 = h^2$$

En éliminant x, on trouve l'équation

$$8z^2 - 12hz\sqrt{3} + 13h^2 = 0,$$

qui donne pour z les deux valeurs

$$z = h\left(\frac{3\sqrt{3} \pm 1}{4}\right)$$

Il faut que z soit positif et plus grand que h, pour que l'on trouve pour x et y des valeurs acceptables. Or, la première valeur $z' = h \cdot \frac{3\sqrt{3}+1}{4}$ satisfait évidemment à ces deux conditions. La seconde y satisfait aussi; car elle est d'abord évidemment positive, et de plus on a

$$3\sqrt{3} - 1 > 4,$$

Car cette condition revient à $3\sqrt{3} > 5$, ou $27 > 25$, ce qui est vrai.

On tire facilement de là les valeurs de y, et par suite de x; on trouve par exemple

$$y'^2 = z'^2 - h^2 = \frac{h^2}{16}\left(12 + 6\sqrt{3}\right)$$

et
$$y''^2 = \frac{h^2}{16}\left(12 - 6\sqrt{3}\right)$$

En extrayant les racines et dédoublant les radicaux, on trouve
$$y = \frac{h}{4}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)$$

et
$$x = \frac{h}{4}\left(\sqrt{3} \pm 1\right)$$

En portant ces valeurs dans la seconde équation, on trouve que la valeur correspondant à y'^2 convient seule au problème.

3e Question. — *Dans un triangle* ABC, *on donne les deux côtés* AB *et* AC, *et l'on sait que la base* BC *est égale à la hauteur correspondante* AD. *On demande de calculer l'angle* A. — *Discussion.*

On a d'abord $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

puis on a en égalant deux expressions de la surface

$$bc \sin A = a^2$$

Donc, l'angle A est donné par l'équation très-simple

$$bc(\sin A + 2\cos A) = b^2 + c^2$$

ou $$\sin A + 2\cos A = \frac{b^2 + c^2}{bc}.$$

En posant $\operatorname{tg}\varphi = 2$, on trouve

$$\sin(\varphi + A) = \frac{b^2 + c^2}{bc} \cdot \cos\varphi.$$

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que le carré du second membre soit inférieur à 1, ce qui donne

$$\left(\frac{b^2 + c^2}{bc}\right)^2 < 5,$$

ou $$(b^2 - c^2)^2 < b^2c^2$$

ou enfin $$b^2 - c^2 < bc$$

Car je puis toujours supposer que b est le plus grand côté donné, et par suite que, après l'extraction de la racine carrée, les deux membres sont positifs. Lorsque cette condition sera remplie, je pose

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos\varphi = \sin\lambda$$

et j'ai alors $$\varphi + A = \lambda$$

ou $$\varphi + A = \pi - \lambda.$$

Je prendrai celle de ces deux formules qui me donnera pour A un angle positif et moindre que 180°; car ici, l'angle A devant être l'angle d'un triangle, on doit faire, dans la formule générale, $K = 0$.

Si l'on a $$b^2 - c^2 = bc$$

on en tirera $$\lambda = 90^\circ,$$

et par suite comme on a

$$\varphi = 63^\circ\ 26'\ 5'',\ 82,$$

on en tire $$A = 26^\circ\ 33'\ 54'',\ 18.$$

A. M.

EPURE.

(*Durée de la séance : deux heures et demie*).

On donne deux points α et β sur la ligne de terre, distants entre eux de 175 millimètres et deux plans passant par ces points : — l'un, P'αP *dont les traces font avec la ligne de terre des angles* PαX = 36°, P'αX = 48°; *l'autre* QβQ' *qui est perpendiculaire au plan vertical de projection et qui fait un angle de 42° avec le plan horizontal. — Cela posé, on demande :*

1° *De prendre dans le plan* P'αP *un point* S *situé à 100 millimètres au-dessus du plan horizontal et à 42 millimètres en avant du plan vertical de projection;*

2° *De construire les projections d'un cône circulaire droit, ayant le point* S *pour sommet et s'appuyant par sa base sur le plan* QβQ', *le diamètre de base de ce cône étant égal à sa hauteur;*

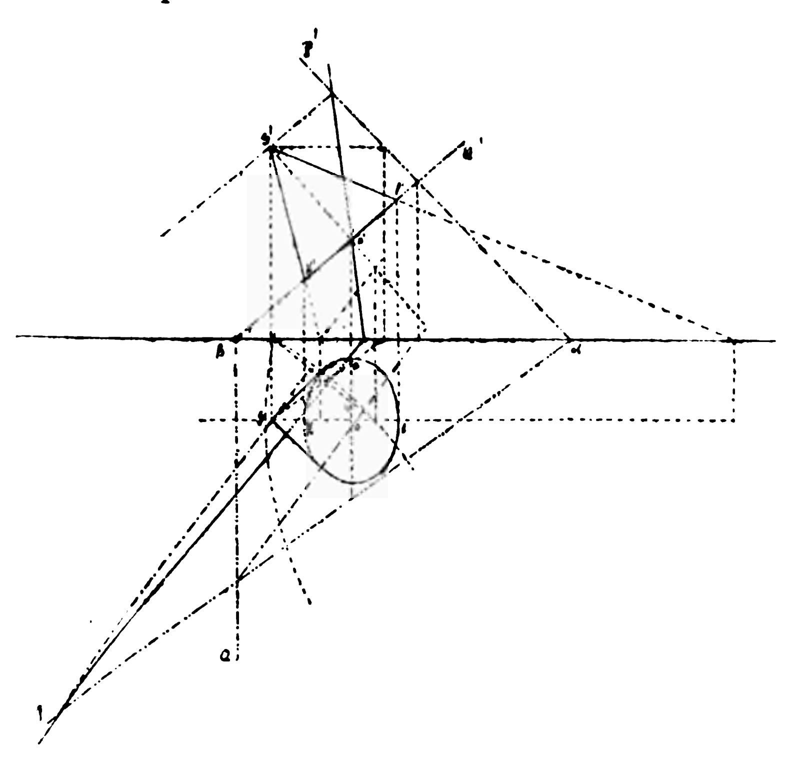
3° *De mener les plans tangents à ce cône parallèles à l'intersection des deux plans* PαP' *et* QβQ'.

Solution. — (L'épure ci-dessus est faite aux $\frac{2}{5}$ des dimensions données.)

1. *Détermination du point* S. — Il suffit de mener une droite *s'm'* dans le plan vertical parallèle à la ligne de terre, et à une distance de 100 millimètres de cette ligne; on obtient ainsi la projection verticale de la ligne de niveau du plan P'αP qui contient le point S. On prendra sur la projection horizontale le point S tel que sa distance à la ligne de terre soit de 42 millimètres, par l'intersection de la projection horizontale avec une parallèle à la ligne de terre distante de cette ligne de 42 millimètres; on en déduit facilement la projection verticale du point S.

2° *Projection du cône.* — Par le point S, je mène une perpendiculaire au plan QβQ'; cette perpendiculaire est parallèle au plan vertical, et par suite *s'o'* est la vraie grandeur de la hauteur du cône; la base se projette verticalement sur βQ' suivant

une droite ayant son milieu en o' et égale en grandeur à $s'o'$. En projection horizontale, la base se projette suivant une ellipse dont le grand axe, perpendiculaire à la ligne de terre, est égal à $s'o'$, et dont le petit axe, dirigé suivant la droite *so*, parallèle à la ligne de terre, est la projection orthogonale sur la droite *so* de la ligne K'l'. J'ai donc facilement cette ellipse, et je compléterai le contour apparent horizontal du cône en menant par le point *s* des tangentes à cette ellipse.



3° *Détermination des plans tangents parallèles à l'intersection des deux plans.* — Si l'on mène par le point S une parallèle à la droite donnée, cette parallèle est parallèle à la base du cône et, par suite, il suffira de mener à la base du cône

des tangentes parallèles à la direction donnée. Chacune de ces tangentes et la génératrice du cône passant par le point de contact détermineront un des plans tangents cherchés. On peut aussi se proposer de déterminer immédiatement les traces de ce plan, et c'est cette construction que nous allons indiquer ici. Pour cela, remarquons que la trace horizontale du cône est une ellipse dont le grand axe est sur la ligne *so*, les sommets étant les traces des génératrices de front, et le foyer s'obtenant très-facilement en cherchant l'intersection de S'K' avec la ligne de terre, menant la bissectrice de l'angle ainsi formé, et projetant sur *so* l'intersection de cette bissectrice avec *s'o'*. On aura donc facilement l'autre foyer, et si l'on remarque que le plan tangent contient la parallèle à l'intersection des deux plans menée par le point (*s*, *s'*), et que par suite sa trace passe par la trace de cette droite, on verra que la détermination de la trace horizontale du plan tangent revient à la détermination de la tangente menée par un point à une ellipse connue par ses foyers et son grand axe. C'est de cette manière que nous avons, sur l'épure, déterminé les traces des plans cherchés, que nous traçons en trait plein, en supposant que le cône est limité à sa base sur le plan Qβ*a'*.

(Sur l'épure, nous n'avons tracé qu'un seul des plans tangents, pour ne pas compliquer la figure.)

A. M.

CONCOURS ACADÉMIQUES DE 1879.

ACADÉMIE DE CAEN.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés une circonférence de rayon R et un point fixe O de cette circonférence, on imagine que deux points A et B se meuvent sur cette courbe à partir du point O dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre de telle façon que l'on ait

$$\text{arc OA} = K \text{ arc OB},$$

et l'on propose: 1° de trouver et d'étudier la courbe lieu géométrique des

foyers des paraboles qui sont tangentes à la circonférence en O, passent par le point A et ont leurs axes parallèles à OB; 2° de déterminer le quatrième point commun à la circonférence et à l'une de ces paraboles et de considérer à part le cas où l'on a K = 2.

Mathématiques élémentaires.

— On donne dans un plan vertical un cercle dont le centre est en O et un point A extérieur au cercle. Soit M un point de la circonférence, déterminer l'angle AOM de manière qu'un point pesant partant de A sans vitesse initiale et suivant AM arrive en M, dans un temps donné. Calculer la tangente de AOM lorsque le temps de la chute est maximum ou minimum et prouver qu'alors le cercle qui touche, au point A, l'horizontale AH du plan et qui passe en M est tangent au cercle donné. On admet sans démonstration que pour les différentes positions de AM le carré du temps de la chute est proportionnel à

$$\frac{AM}{\sin HAM}.$$

— On donne dans un plan la position du sommet C d'un triangle dont les côtés sont connus. Déterminer géométriquement la position des deux autres sommets A et B de manière qu'en les joignant respectivement à deux points P et Q donnés dans le plan, les droites AP et BQ soient rectangulaires.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 131.

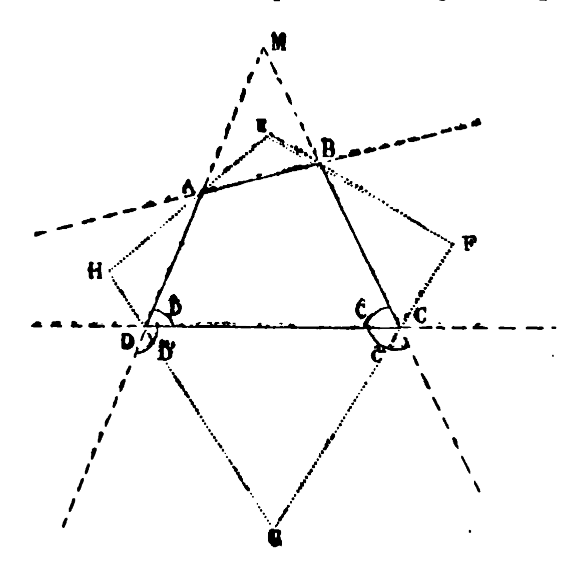
Solution par M. Deslais, élève du Lycée du Mans.

Si dans un quadrilatère quelconque on considère les quatre cercles tangents à un côté et au prolongement des deux côtés adjacents, les centres de ces cercles sont sur une même circonférence.

Considérons les quatre cercles E, F, G, H tangents chacun à un côté du quadrilatère ABCD et au prolongement des deux côtés adjacents. Les centres de ces cercles se trouvent au point de rencontre des bissectrices des suppléments de deux angles consécutifs du quadrilatère.

Mais ces centres se trouvent aussi deux à deux situés sur la bissectrice du même angle; ainsi les centres E et F se trouvent sur la bissectrice du même angle ABM. Par suite les lignes des centres passeront par les sommets du quadrilatère. Il suffit maintenant de démontrer que le quadrilatère formé par ces lignes des centres est inscriptible.

Pour cela, menons les bissectrices des angles du quadrilatère ABCD. Ces bissectrices forment un petit quadrilatère *mnpq* dont les angles opposés sont supplémentaires. On a également deux autres quadrilatères *p*DHA, *q*BFC qui



sont aussi inscriptibles, car les lignes *p*D et HD étant bissectrices de deux angles adjacents sont perpendiculaires l'une sur l'autre; il en est de même des droites *p*A et HA.

Par conséquent $H + p = 2$ droits et $F + q = 2$ droits. Comme $q + p = 2$ droits, il en résulte que $F + H = 2$ droits. Le quadrilatère EFGH ayant ses angles opposés supplémentaires est inscriptible.

Nota. — Ont résolu la même question :

MM. Johannet, à Châteauroux; Dupuy, à Grenoble; Plait, Paulme, à Passy; Bucheron, Objois, à Moulins; Marchand, à Loudun; Ailleret, à Versailles; Mirman, lycée Fontanes; Tessier, à Angers; Peyrabon, à Châteauroux; Etchats, Darodes, à Mont-de-Marsan; Vermand, à Saint-Quentin; Gélinet, à Orléans; Charaire à Bourg; Bompard, collége Stanislas; d'Ocagne, collége Chaptal.

QUESTION 131.

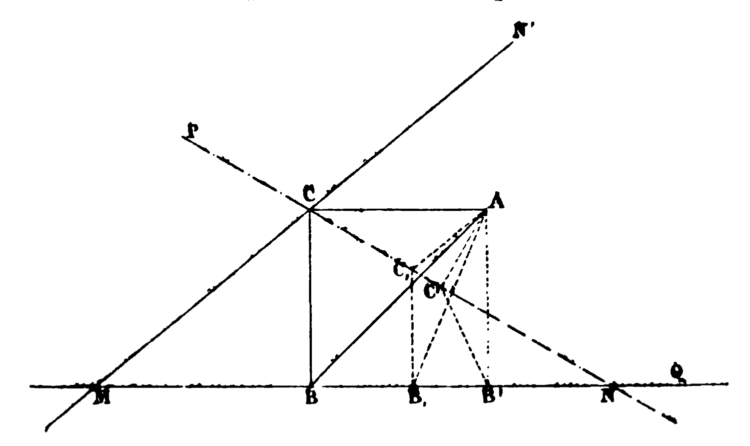
Solution par M. Chalons, élève du Lycée d'Angoulême.

Construire un triangle semblable à un triangle donné, ayant un de ses sommets en un point donné, et les deux autres sur deux droites données.

Pour résoudre ce problème, nous établirons d'abord le théorème suivant qui peut servir à la résolution de toutes les questions de ce genre.

Théorème. — Si un triangle AB_1C_1 tourne dans son plan autour de son sommet A supposé fixe et reste semblable à un triangle donné, tandis que son sommet B_1 parcourt une ligne droite donnée MN, le lieu géométrique décrit par son 3me sommet C_1 est une ligne droite.

Du point fixe A j'abaisse une perpendiculaire sur MN soit AB'; sur cette droite je construis un triangle AB'C' semblable au triangle donné. C'est un point du lieu, ainsi



que C_1 sommet de AB_1C_1 qui satisfait aux conditions énoncées. Les angles B_1AC_1, B'AC' sont égaux par construction; si on retranche de chacun d'eux B_1AC' les restes B_1AB', C_1AC' sont égaux. Par suite, les triangles AB_1B', AC_1C' ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ils sont

donc semblables et par suite équiangles. Donc $AC'C_1 = B_1B'A = 1^d$.

Le lieu est donc la perpendiculaire menée sur AC' en C'. Il est d'ailleurs à remarquer qu'il y aura 12 droites parallèles 2 à 2 qui composeront le lieu.

Cela posé, pour résoudre le problème donné il suffira de construire la droite PQ comme nous l'avons indiqué. Le point C où elle rencontre la droite donnée MN' est le second sommet du triangle demandé. Il suffira alors de faire avec AC un angle CAB = C'AB'. On aura ainsi le 3e sommet.

Remarque. — Le théorème précédent permet encore de construire un triangle semblable à un triangle donné qui ait ses sommets sur 3 parallèles données, ou bien encore sur 3 circonférences données; il n'y a qu'à exécuter la même construction.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gelinet, d'Orléans; Sery, de Pau; Zuloaga, à Liége; Dupuy, à Grenoble; Deslais, au Mans.

QUESTIONS PROPOSÉES

168. — Étant donné un trapèze isocèle, trouver par la géométrie une relation entre sa hauteur, sa surface, le rayon du cercle circonscrit et l'un des côtés non parallèles.

169. — Dans un quadrilatère ABCD, la ligne EF, qui joint les milieux des diagonales, coupe en H le côté BC. Démontrer que le triangle AHD est équivalent à la moitié du quadrilatère. (*Barrieu.*)

170. — Déterminer le rayon de la sphère à laquelle appartient une calotte sphérique de surface constante, de manière que le volume du segment à une base limité par cette calotte soit maximum.

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 9616-9.

SUR UNE LIMITE DE L'ERREUR

QUE L'ON COMMET EN REMPLAÇANT LA LONGUEUR D'UNE CIRCONFÉRENCE OU LE PÉRIMÈTRE D'UN POLYGONE RÉGULIER CIRCONSCRIT PAR CELUI DU POLYGONE INSCRIT SEMBLABLE AU PREMIER

Par M. LIONNET, ancien examinateur d'admission à l'École Navale.

I. **Théorème.** — *L'excès de la circonférence sur le périmètre d'un polygone régulier inscrit est moindre que le côté du polygone.*

Si l'on prend le rayon pour unité et qu'on désigne par n le nombre des côtés du polygone, la longueur de son côté aura pour mesure $2 \sin \frac{\pi}{n}$, et il s'agira de démontrer l'inégalité

$$2\pi - 2n \sin \frac{\pi}{n} < 2 \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{n+1} < \sin \frac{\pi}{n},$$

ou enfin

$$\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{n(n+1)} > \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n}.$$

Or on a $\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi^3}{6n^3}$, ce qui nous ramène à démontrer la relation

$$\frac{\pi^3}{6n^3} < \frac{\pi}{n(n+1)}$$

ou

$$\pi^2 < \frac{6n^2}{n+1} = \frac{6n}{1 + \frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Or l'inégalité $\pi < \frac{22}{7}$ donne $\pi^2 < \frac{484}{49} < 10$, tandis que le second membre de (1) est supérieur à 13 pour $n = 3$ et augmente avec n; donc le théorème est démontré.

REMARQUE. — Nous allons donner une démonstration géométrique du même théorème.

II. **Théorème.** — *La différence des périmètres* p *et* P *de deux polygones réguliers, d'un même nombre* n *de côtés supérieur à* 5, *l'un inscrit, et l'autre circonscrit à une même circonférence, est moindre que le côté du polygone inscrit* (*).

Soit CD un côté de P tangent à l'arc AMC en son milieu M et divisé par ce point en deux parties égales. Il s'agit de prouver que, pour $n > 5$, on a

$$CD \, . \, n - AB \, . \, n < AB \quad \text{ou} \quad CD - AB < \frac{AB}{n}$$

ou enfin $$CA < \frac{1}{n}, \qquad (1)$$

en remplaçant CD, AB par les rayons OC, OA qui leur sont proportionnels et prenant OA pour unité; mais la tangente CM, égale à $\frac{P}{2n}$, étant moyenne proportionnelle entre la sécante entière CA + 2 et le segment CA, on a

$$\frac{P^2}{4n^2} = (CA + 2) \, CA.$$

Remplaçant CA par $\frac{1}{n}$ et multipliant les deux membres par n^2, il vient $$\left(\frac{P}{2}\right)^2 < 2n + 1. \qquad (2)$$

Cette inégalité, équivalente à (1), devenant $12 < 13$ pour $n = 6$, est vérifiée par cette valeur de n. Elle l'est aussi par $n > 6$, puisque, n augmentant, P diminue et $2n + 1$ augmente; donc le théorème est démontré.

Remarque. — Pour $n < 6$, le premier membre de (2) est supérieur à 12, tandis que le second est égal ou inférieur à 11; donc alors l'inégalité a lieu en sens contraire, ce qui justifie la restriction $n > 5$ dans l'énoncé du théorème.

Corollaire. — *L'excès de la circonférence sur le périmètre d'un polygone régulier inscrit est moindre que le côté du polygone.*

L'inégalité

$$2\pi - AB \, . \, n < AB \quad \text{ou} \quad 2\pi < AB \, (n + 1)$$

qu'il s'agit de démontrer est, pour $n > 5$, une conséquence

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

immédiate du théorème (2); car on a évidemment $2\pi - p < P - p$. On la vérifie d'ailleurs très-facilement pour $n < 6$, en observant (1) qu'on a $\pi^2 < 10$ et que les valeurs de AB correspondant aux valeurs 3, 4, 5 de n sont respectivement

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

III. **Théorème.** — *On peut inscrire et circonscrire à un même cercle deux polygones réguliers d'un assez grand nombre* n *de côtés pour que la différence* d_n *de leurs périmètres soit moindre qu'une partie aliquote du côté* a_n *du polygone inscrit, aussi petite qu'on voudra.*

On sait qu'on a $d_{2n} < \frac{1}{4} d_n$, $a_n < 2a_{2n}$, $d_6 < a_6$.

Il en résulte $d_{12} < \frac{1}{4} d_6 < \frac{1}{4} a_6 < \frac{1}{2} a_{12}$.

On trouve pareillement

$$d_{24} < \frac{1}{4} d_{12} < \frac{1}{8} a_{12} < \frac{1}{4} a_{24};$$

et ainsi de suite; donc on a généralement

$$d_{6.2^k} < \frac{1}{2^k} a_{6.2^k} \text{ ou } d_n < \frac{1}{2^k} a_n,$$

en posant $6.2^k = n$. Le nombre entier k pouvant être supposé aussi grand qu'on voudra, le théorème est démontré.

Corollaire. — *On peut inscrire à un cercle un polygone régulier d'un assez grand nombre de côtés pour que l'excès de la circonférence sur le périmètre du polygone soit moindre qu'une partie aliquote de son côté, aussi petite qu'on voudra.* Car on a évidemment $2\pi - p < P - p$.

Remarque. — Dans la démonstration analytique du théorème (1) nous avons supposé la relation $a - \sin a < \frac{a^3}{6}$ démontrée (*Eléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique*, p. 178) au moyen de la formule $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$. En voici une autre démonstration, déduite de la formule plus simple $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

IV. **Théorème.** — *L'erreur que l'on commet en remplaçant un arc positif quelconque par son sinus est moindre que le sixième du cube de l'arc.*

Si dans la formule $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ on remplace $\cos \frac{a}{2}$ par $1 - 2 \sin^2 \frac{a}{4}$, on aura

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} - 4 \sin \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{4}.$$

Or on a $\sin \frac{a}{2} < \frac{a}{2}$, $\sin \frac{a}{4} < \frac{a}{4}$, $\sin^2 \frac{a}{4} < \frac{a^2}{16}$ et, par suite, $4 \sin \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{4} < \frac{a^3}{8}$; donc il vient

$$\sin a > 2 \sin \frac{a}{2} - \frac{a^3}{8}. \qquad (1)$$

Remplaçant a par $\frac{a}{2}$ dans cette inégalité, dans celle qui en résulte, et ainsi de suite, on a successivement

$$\sin \frac{a}{2} > 2 \sin \frac{a}{2^2} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^3} \qquad (2)$$

$$\sin \frac{a}{2} > 2 \sin \frac{a}{2^3} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^6} \qquad (3)$$

....

et, en général,

$$\sin \frac{a}{2^{n-1}} > 2 \sin \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^{3(n-1)}}. \qquad (n)$$

Multipliant les inégalités (1), (2), (3),..., (n) respectivement par $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, faisant la somme des inégalités résultantes et supprimant les termes communs aux deux membres, il vient

$$\sin a > 2^n \sin \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a}{\sin a} > \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} - \frac{a^2}{8} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

Cela étant, si l'on suppose que le nombre entier n croisse indéfiniment, le rapport $\sin \frac{a}{2^n} : \frac{a}{2^n}$ et la somme

$$1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}$$

auront pour limites l'unité et la fraction $\frac{4}{3}$, ce qui réduit l'inégalité précédente à

$$\frac{\sin a}{a} > 1 - \frac{a^2}{6} \quad \text{ou} \quad a - \sin a < \frac{a^3}{6}.$$

(Extrait des *Éléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique.*)

NOTE DE GÉOMÉTRIE SUR LA NORMALE A L'ELLIPSE,

Par M. Launoy, maître répétiteur au Lycée de Lille.

I.

Théorème. — *Si l'on prend sur chaque vecteur d'un point* M *d'une ellipse une longueur égale au demi-grand axe, on a deux points en ligne droite avec le centre et cette droite est parallèle à la normale en* M.

En effet, soit D le point où la normale en M coupe le grand axe on sait que :

$$\frac{FD}{F'D} = \frac{FM}{F'M},$$

d'où

$$\frac{FD}{FD + F'D} = \frac{FM}{FM + F'M}$$

ou bien

$$\frac{FD}{c} = \frac{MF}{a}.$$

Si donc FK $= a$, les deux triangles MDF et KOF sont semblables.

Fig. 1.

De la même proportion, on tire également :

$$\frac{FD + F'D}{F'D} = \frac{FM + F'M}{F'M}$$

ou
$$\frac{c}{F'D} = \frac{a}{F'M},$$
et si F'I $= a$, les triangles F'IO et F'MD sont aussi semblables ; d'où la proposition énoncée.

Cette propriété conduit à la solution du problème suivant :

Étant donnée une ellipse non tracée, construire la normale : 1° en un point de la courbe ; 2° parallèlement à une direction donnée.

1° Sur l'un quelconque des rayons vecteurs du point donné on prend une longueur égale au demi-grand axe ; on joint le point obtenu au centre de la courbe et par le point donné on mène une parallèle à cette dernière droite ;

2° Soit OK la direction donnée ; les deux cercles décrits des foyers comme centres avec a pour rayons coupent OK aux points I et K ; les lignes FK et F'I se coupent au point cherché M et la parallèle à OK menée par ce point sera la normale cherchée. La construction complétée au-dessous du grand axe donnerait un point M' symétrique du point M. On peut en déduire une construction de l'ellipse par points avec la normale.

II.

Théorème. — *La perpendiculaire au grand axe d'une ellipse menée par le pied d'une normale en un point* M *rencontre les lignes* FB *et* F'B *en deux points* C *et* E *tels que les longueurs* FC *et* F'E *représentent les rayons vecteurs du point* M.

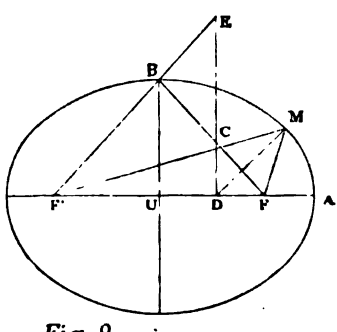


Fig. 2.

On sait que (1)
$$\frac{FM}{a} = \frac{FD}{c};$$
or, les triangles semblables CDF et BOF donnent :
$$\frac{FD}{c} = \frac{FC}{a};$$
par suite FC $=$ FM et évidemment F'E $=$ F'M.

D'où la solution du problème suivant : ***Étant donnée une ellipse non tracée, construire la normale : 1° en un point de la courbe; 2° par un point du grand axe.***

1° M étant le point donné, les cercles décrits des foyers comme centres avec les rayons FM et F'M coupent FB, F'B en C et E, d'où la droite ECD et la normale MD;

2° Par le point donné D on mène au grand axe la perpendiculaire DCE; les cercles de centres F et F' et de rayons respectifs FC et F'E se coupent en M; d'où la normale MD. Ils se coupent également en un point symétrique de M par rapport au grand axe, ce qui donne une seconde normale ce qui fait, avec les deux normales qui coïncident avec le grand axe, quatre normales issues du point D.

Cette construction donne l'ellipse par points avec la normale.

Remarque. — Le point D n'a pas sur le grand axe une position quelconque; car lorsque le point C sera tel que FC < FA, au point D, ne correspondra aucun point de l'ellipse, d'après la construction précédente; la position extrême du point D sera, à partir de F, à une distance de ce point égale à :

$$(a - c) \cos \text{OFB} = (a - c)\frac{c}{a}.$$

III.

Théorème. — *La normale en un point* M *d'une ellipse rencontrant le petit axe au point* P, *on a* $\frac{\text{MP}}{\text{PF}} = \frac{\text{a}}{\text{c}}$.

Il est facile de voir que le cercle circonscrit au triangle MFF' rencontre le petit axe au point P; le quadrilatère MFPF' est inscriptible dans un cercle, ce qui permet d'écrire la relation

$$\text{MP} \times \text{FF}' = \text{MF} \times \text{PF}' + \text{MF}' \times \text{PF};$$

or $\text{PF} = \text{PF}', \quad \text{FF}' = 2c, \quad \text{MF} + \text{MF}' = 2a,$

et par suite

$$\text{MP} \times 2c = \text{PF}\,(\text{MF} + \text{MF}') = \text{PF} \times 2a;$$

d'où la relation $\frac{\text{MP}}{a} = \frac{\text{PF}}{c}$.

REMARQUE. — *Le cercle circonscrit au triangle* MFF′ *passe par le point* T *où la tangente en* M *coupe le petit axe.*

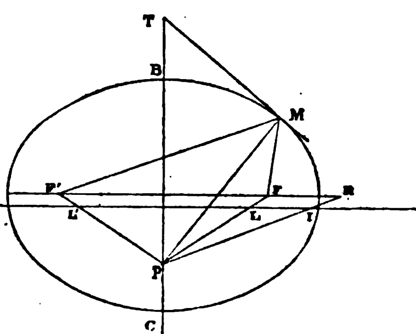


Fig. 3.

En effet, ce cercle ayant son centre sur le petit axe ne peut couper cet axe qu'en un point T tel que l'angle TMP soit droit.

Ces deux propriétés donnent la solution du problème suivant :

Mener la normale à une ellipse par un point du petit axe.

On peut considérer deux cas :

1° *L'ellipse est tracée.* — On construit le cercle circonscrit au triangle formé par les deux foyers et le point donné; ce cercle coupe l'ellipse en quatre points, et il est facile de choisir les deux points dont les normales concourent au point donné.

2° *L'ellipse n'est pas tracée.* — Soit P le point donné; on construit d'abord le cercle circonscrit au triangle PFF′; puis on joint le point P aux foyers; sur PF et PF′ on prend une longueur PL = PL′ = c; on joint L et L′. Du point P comme centre avec a pour rayon on décrit un cercle; ce cercle coupe en I et I′ la ligne LL′; les lignes PI et PI′ rencontrent le grand axe en deux points R et R′ tels que $\frac{PR}{PI} = \frac{PF}{PL}$ ou $\frac{PR}{a} = \frac{PF}{c}$

et en vertu de la propriété énoncée ci-dessus

$$PR = PM.$$

Le cercle décrit du point P comme centre avec PR pour rayon coupera le cercle circonscrit au triangle PFF′ aux points M et M′, où aboutissent les normales cherchées.

Pour le premier cas, on peut indifféremment employer l'un ou l'autre des cercles précédents.

La construction du second cas donne le point T et par suite la tangente aux deux points obtenus.

Dans les deux cas, le problème admet deux solutions, et si l'on ajoute les deux normales qui coïncident avec le petit axe, on a quatre normales issues du point P, à condition toutefois que le point P soit compris entre des limites qu'il est facile de déterminer. Pour cela, M étant un point de la courbe dont la normale est MP, soit 2α l'angle F'MF; l'angle PFF' est égal à α et

$$PF = \frac{c}{\cos \alpha};$$

par suite
$$PM = \frac{a}{c} PF = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Or, on sait que $\cos \alpha$ varie entre 1 et $\frac{b}{a}$, ce qui donne, pour les valeurs extrêmes de PM, a et $\frac{a^2}{b}$.

Alors le point M est à une des extrémités des deux axes, le point P est, ou en O, ou en un point C distant de O d'une longueur égale à $\frac{a^2}{b} - b = \frac{c^2}{b}$.

On voit donc que, lorsque le point P parcourt l'espace OC, le point M parcourt la demi-ellipse ABA' et qu'à chacune des positions du point P correspondent quatre normales à la courbe. Le point P étant en C, les points M et M' des constructions précédentes se réunissent au point B et le nombre des normales se réduit à deux; le cercle décrit du point C comme centre avec CB pour rayon a trois points communs avec l'ellipse au point B; ce cercle est dit le *cercle osculateur* de l'ellipse au point B. Pour les positions du point P au delà de C, il n'existe plus que deux normales qui coïncident avec le petit axe.

Il est évident que le point P peut occuper des positions symétriques de celles que l'on vient d'examiner, par rapport au grand axe.

Remarque I. — La relation

$$PM = \frac{a}{\cos \alpha}$$

donne également une construction simple de la longueur PM; en effet, elle indique que la parallèle menée à PF par

une des extrémités, A par exemple, du grand axe, parallèle limitée aux deux axes, est précisément égale à PM ; mais cette construction, simple au point de vue géométrique, est un peu moins commode que la précédente au point de vue graphique.

REMARQUE II. — Cette même relation indique que la projection d'une normale en un point limitée au petit axe, sur les rayons vecteurs de ce point est constante et égale au demi-grand axe.

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite*; voir page 177.)

SUR LES RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES ENTRE LES ANGLES D'UN TRIANGLE.

6. Puisque on a

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r},\ \text{et}\ \operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{p}{r'},\qquad (21)$$

en prenant les expressions analogues pour les autres angles, et ajoutant, on a

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{r}+\frac{p-b}{r}+\frac{p-c}{r}=\frac{p}{r},$$

$$\text{et}\ \operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{p}{r'}+\frac{p}{r''}+\frac{p}{r'''}.$$

En divisant ces équations par p, on retrouve

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}\qquad (22)$$

En multipliant les équations (21), on a

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}$$

et
$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{p^3}{r'r''r'''}.$$

Donc

$$\frac{p^3r}{rr'r''r'''} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pr^3} = \frac{p^2r^2}{pr^3} = \frac{p}{r}.$$

Donc
$$pr = \sqrt{rr'r''r'''}. \qquad (23)$$

Par suite : *La racine carrée du produit des quatre rayons des cercles inscrits et ex-inscrits est égale à la surface du triangle.*

On a $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

En ajoutant, on a

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}. \qquad (24)$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}. \qquad (25)$$

Si l'on élève (24) au carré, et si l'on en retranche les valeurs des carrés des sinus, on a

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin A \sin C = \frac{4p^2 - (a^2+b^2+c^2)}{8R^2}$$

mais
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

Donc

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \qquad (26)$$

On a
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Donc

$$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{r}{R}. \qquad (27)$$

On a
$$1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}.$$

En prenant les mêmes expressions pour cos B et cos C, et ajoutant, on doit avoir

$$\cos A + \cos B + \cos C$$
$$= \frac{2p^2(a + b + c) - 2p(a^2 + b^2 + c^2) - 3abc}{abc}$$

Mais $\quad a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

On trouve alors, en remplaçant

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}. \qquad (28)$$

Si q', q'', q''' représentent les distances du centre du cercle circonscrit aux côtés, on a

$$q' = R \cos A;\ q'' = R \cos B;\ q''' = R \cos C.$$

Par suite $\quad q' + q'' + q''' = R + r. \qquad (29)$

7. On a $\quad a \operatorname{cotg} A = 2q'$;

donc $a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(q' + q'' + q''')$.

Mais $\quad q' + q' + q'' = R + r$;

donc $a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(R + r)$. (30)

Si l'on fait le carré de l'équation (28) et que l'on remplace $\cos^2 A$ par sa valeur $1 - \frac{a^2}{4R^2}$, et que l'on prenne les expressions analogues pour $\cos^2 B$ et $\cos^2 C$, on a

$$2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)$$
$$= \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - 3 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2};$$

en remplaçant $a^2 + b^2 + c^2$ par sa valeur, et réduisant, on a $\quad \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$

$$= \frac{r^2 + p^2 - 4R^2}{4R^2}. \qquad (31)$$

8. Pour montrer que l'on a

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \quad (32)$$

on remarque que puisque

$$A + B + C = \pi, \text{ on a } \cos C = -\cos(A + B).$$

Donc

$$\cos^2 C = \cos^2 A \cos^2 B - 2 \cos A \cos B \sin A \sin B$$
$$+ 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 B,$$

en remplaçant $\sin^2 A$ et $\sin^2 B$ par leurs valeurs.

Donc l'expression $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ devient

$$1 + 2 \cos A \cos B (\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$
$$= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

D'après une formule que nous avons vue plus haut, on a

$$1 + \cos A = \frac{2p(p - a)}{bc};$$

on en tire

$$(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C) = \frac{p^2}{2R^2}. \quad (33)$$

En effectuant, et remplaçant $\cos A + \cos B + \cos C$
et $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$
par leur valeur (28) et (31), on trouve après réduction

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}; \quad (34)$$

on a $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}.$

Donc

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{4p \,.\, pr}{4R \,.\, pr} = \frac{p}{R}. \quad (35)$$

En comparant avec une formule déjà donnée (24), on a

$$\sin A + \sin B + \sin C$$
$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (36)$$

9. Soient a' et a'' les segments déterminés sur le côté a par la hauteur h abaissée du sommet, et π la distance de l'orthocentre au côté a. On a

$$\cot B \cot C = \frac{a'a''}{h^2} = \frac{h\pi}{h^2}.$$

Donc $\cot B \cot C = \frac{\pi}{h} = \frac{\pi a}{ha}.$

Appelons Δ l'aire du triangle total, δ, δ', δ'' les triangles composants, ayant leur sommet à l'orthocentre. On a

$$\pi a = 2\delta; \quad ha = 2\Delta.$$

Donc

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = \frac{\delta + \delta' + \delta''}{\Delta} = 1.$$

Multiplions par $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, il vient

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \quad (37)$$

puisque $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}},$

on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{r}{p}\quad(38)$$

De même, comme

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{(p-b)(p-c)}{pr},$$

on en déduit

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p},\quad(39)$$

on a

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Donc $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}.$

On en conclut

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1.\quad(40)$$

10. Puisque $ha=2\Delta$, on en déduit $h=\frac{2\Delta}{a}$, et par suite

$$h+h'+h''=2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2\Delta\frac{bc+ac+ab}{abc}$$
$$=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}.\quad(41)$$

Soient a', a'' les segments que fait sur le côté a la hauteur menée du point A, et π la distance du même côté à l'orthocentre. On a

$$\cos B\cos C=\frac{a'a''}{bc}=\frac{h\pi}{bc}=\frac{2\Delta\pi}{abc},$$

la formule (31) nous donne

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}.$$

Donc

$$\pi+\pi'+\pi''=\frac{p^2+r^2-4R^2}{2R}.\quad(42)$$

et par suite

$$h+h'+h''-(\pi+\pi'+\pi'')=2(R+r).\quad(43)$$

Mais cette quantité représente la somme des lignes qui joignent l'orthocentre aux sommets du triangle; et comme

on sait que la somme de ces distances est double de la somme des perpendiculaires q', q'', q''', abaissées du centre sur les côtés, on retrouve ainsi la formule (29)

$$q' + q'' + q''' = R + r.$$

11. *Dans un triangle, la somme des inverses des côtés des six carrés inscrits et ex-inscrits est égale au double de l'inverse du rayon du cercle inscrit.*

Soient a la base du triangle et h sa hauteur; en appelant x le côté du carré inscrit on a $x = \dfrac{ah}{a+h}$; en appelant x_1 le côté du carré ex-inscrit, on a $x_1 = \dfrac{ah}{a-h}$.

Donc $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{2}{h}$; si y, y_1, et z, z_1, sont les côtés des carrés qui s'appuient sur les deux autres côtés du triangle, on aura

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z_1}$$
$$= 2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}\right) = \frac{2}{r} \quad \ldots . \quad (44)$$

(A suivre.)

CONCOURS ACADÉMIQUES 1879

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Mathématiques élémentaires.

— Lieu des points tels que le rapport des distances à deux points fixes est égal au rapport de deux lignes données.

Quel est le lieu des points de l'espace jouissant des mêmes propriétés?

— Lieu des points tels que les distances à trois points donnés sont dans le rapport de trois lignes données. (Dans l'espace.)

Calculer toutes les lignes de la figure

$BC = 50^{mm}$ $\quad CA = 54^{mm}$ $\quad AB = 32^{mm}$

$\alpha = 30$ $\quad \beta = 24$ $\quad \gamma = 10$

— Construire un quadrilatère, connaissant trois côtés et les deux angles adjacents au quatrième côté.

— Calculer trigonométriquement les autres éléments du quadrilatère.

(*6 heures.*)

ACADÉMIE DE DOUAI

Mathématiques spéciales.

Par deux points fixes A, B pris sur une conique, on fait passer un cercle variable qui coupe cette conique en deux autres points C, D :

1° Démontrer que la droite qui joint les deux pôles de la sécante CD pris par rapport au cercle et à la conique passe toujours par un point fixe F, quel que soit le cercle choisi, et que la polaire du point F par rapport au cercle passe toujours aussi par un point fixe G, quel que soit le cercle;

2° Lieu des points de contact des tangentes menées du point F aux différents cercles;

3° Même question pour le point G.

Mathématiques élémentaires.

On considère toute la catégorie des triangles dans lesquels les trois côtés x, y, z satisfont à une relation donnée de la forme

$$ax^m y^n z^p + bx^{m'} y^{n'} z^{p'} + cx^{m''} y^{n''} z^{p''} + \ldots\ldots = o$$

où a, b, c... sont des constantes de signes divers et où tous les termes sont de même degré, en sorte qu'on ait

$$m + n + p = m' + n' + p' = m'' + n'' + p'' \ldots\ldots$$

1° On demande quelle relation existe dans tous ces triangles entre les trois hauteurs h, h', h'';

2° Déduire de ce qui précède une formule propre au triangle rectangle;

3° Trouver par suite la pente d'un plan incliné en fonction des pentes de deux droites situées dans ce plan et comprises respectivement dans deux plans verticaux perpendiculaires l'un à l'autre. (On sait que la pente d'une droite est le rapport de la différence des niveaux de deux de ses points à la distance de leurs projections sur un plan horizontal et que la pente du plan est celle d'une perpendiculaire aux horizontales du plan.)

4° Démontrer que si l'on assimile les pentes de diverses droites d'un plan (émanées d'un même point) à des forces horizontales agissant dans les plans verticaux respectifs menés suivant ces droites, la pente de la ligne de plus grande pente du plan sera pour la grandeur et pour la direction la résultante des pentes de deux autres lignes comprises dans deux plans verticaux rectangulaires quelconques.

Enseignement spécial.

1° On donne un quadrilatère gauche ABCD, c'est-à-dire le quadrilatère décrit par une droite mobile MN qui s'appuyant constamment sur deux droites fixes AD, BC non situées dans un même plan, passe de la position AB à la position CD, sans cesser jamais d'être comprise dans un plan mobile MPNQ toujours parallèle à lui-même. On demande en premier lieu quelle est la forme de la section MPNQ faite par le plan mobile dans le tétraèdre ABCD; en second lieu, comment la droite MN divise cette section, et comment la surface engendrée par MN divise le volume engendré par la surface MPNQ.

2° Un corps est limité inférieurement par un quadrilatère horizontal EFGH, latéralement par quatre faces planes verticales, enfin supérieurement par un quadrilatère gauche ABCD. On demande de quelle manière précise son volume est compris entre la somme des deux troncs de prismes trian-

gulaires EFGCAB et EHGCAD et la somme des deux troncs de prismes triangulaires HEFBDA, HGFBDC.

3° Trouver l'expression du volume de ce corps et passer de là à l'expression générale du volume analogue que comprennent entre eux deux quadrilatères gauches ABCD, A'B'C'D' ayant pour projection horizontale un même quadrilatère plan EFGH.

Descriptive.

Étant données les projections de trois points A, B, C, trouver les projections d'un point D situé à une même distance donnée de chacun des trois premiers.

Données numériques : — $a\alpha$ = 3 cent. 9 $\alpha a'$ = 3 cent. 6,
$b\beta$ = 1 cent. 5 $b'\beta$ = 10 cent. 5,
$c\gamma$ = 9 cent. 9 $c'\gamma$ = 4 cent. 8,
$\alpha\beta$ = 7 cent. 5 $\beta\gamma$ = 3 cent. 6.
DA = DB = DC = 15 centimètres.

ACADÉMIE DE LYON

Classe de mathématiques élémentaires.

Une circonférence O', de rayon donné, a son centre sur une circonférence O, qui est également déterminée. Si l'on joint l'extrémité A du diamètre OO' au point d'intersection C des deux circonférences, la ligne AC rencontrera la corde O'B en un point E par lequel on mène une tangente EG au cercle O'.

On demande :

1° Le lieu du point M, intersection de la tangente et de AB prolongé, quand le point B se meut sur la circonférence O.

2° On prouvera que les trois points D, G, B, sont en ligne droite.

Enseignement spécial.

1° En quels points de la surface d'un prisme triangulaire, oblique et homogène, peut-on suspendre par un fil ce corps, pour que, sous l'action de la pesanteur, les arêtes latérales prennent une direction d'équilibre parallèle ou perpendiculaire à celle du fil?

2° On propose de couper un parallélépipède donné parallèlement à l'une des diagonales de la base, de manière que la section soit un rectangle ou un losange; on supposera dans l'épure que les deux diagonales de la base sont dans le rapport de 3 à 4, qu'elles font entre elles un angle de 30° et que les arêtes latérales du parallélépipède font avec la base un angle de 60°

ACADÉMIE DE PARIS

Mathématiques élémentaires.

On donne deux circonférences O et O' tangentes extérieurement ou intérieurement. Par le point A, on mène dans la première une corde quelconque AB, et dans la deuxième une corde AC perpendiculaire à AB. On joint BC. Cela posé, on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du point A sur l'hypoténuse BC lorsque le triangle variable tourne autour du point A;
2° Le lieu du milieu de l'hypoténuse BC;
3° Le lieu décrit par le centre de gravité du triangle ABC.
Examiner si tous les points de chacune des lignes trouvées conviennent dans tous les cas à la question.

— On donne une droite OA, de longueur connue a. Du point O comme centre, on décrit une sphère de rayon variable et l'on considère sur cette sphère la calotte sphérique vue du point A, et le segment à une base compris entre cette calotte et sa base. On demande quel doit être le rayon de la sphère:
1° Pour que l'aire de la calotte soit maximum;
2° Pour que le volume du segment soit maximum.

ACADÉMIE DE POITIERS

Classe de Mathématiques élémentaires.

Sur le diamètre AB d'un cercle donné on prend AC = AB et on mène en C une perpendiculaire à CAB. On joint un point quelconque P de cette perpendiculaire au point A; la droite PA rencontre la circonférence en H. La droite BH rencontre CP en Q. On mène par P une parallèle à CAB qui rencontre Q A en R, et par le point Q une parallèle à CAB qui rencontre PA en M. Démontrer :
1° Que $PC \times CQ = \text{constante}$
2° Que $\frac{PA}{PM} = \frac{HA}{HM}$;
3° Que les points P, K, B sont en ligne droite;
4° Que les points M, B, R, sont en ligne droite;
5° Que la droite MK passe par un point fixe;
6° Que la droite HK passe par un point fixe;
7° Trouver les lieux géométriques des points M et R.

ACADÉMIE DE RENNES

Mathématiques élémentaires.

1re *Question*. — Montrer que, pour savoir combien de fois le nombre premier P est facteur dans le produit $1 . 2 . 3 .... m$ de tous les nombres jusqu'à m, on peut, après avoir écrit ce nombre m dans le système de numération dont la base est P, diviser par $p - 1$ l'excès de ce nombre m sur la somme de ses chiffres.
En conclure que p sera facteur dans le nombre

$$\frac{m(m-1)(m-2) - (m-n+1)}{1 . 2 . 3 .... n}$$

autant de fois que, dans la soustraction de m et de n écrits dans le système de base P, il faudra ajouter P aux chiffres du plus grand nombre pour rendre la soustraction possible dans chaque colonne.

2me *Question*. — Un triangle ABC étant donné, dont les côtés sont parcourus dans le même sens, on mène par les sommets des rayons faisant un même angle V avec le côté respectivement opposé. On détermine ainsi un triangle A'B'C' semblable au proposé. Trouver le rapport de similitude soit géométriquement, soit par le calcul et à quelles valeurs de *v* correspondent le plus petit, le plus grand des triangles A'B'C'? Ce triangle peut-il être égal à ABC? *v* variant, quel sera le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit à A'B'C', de celui du cercle inscrit et du centre de gravité

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Mathématiques élémentaires.

Trois points OAB étant situés en ligne droite, on mène par le point O une droite variable OT, et par les points A et B, un cercle tangent à la droite OT.

Déterminer la position de la droite OT de telle manière que ce cercle ABC ait un rayon donné R.

On désire obtenir une solution géométrique, et aussi une relation algébrique entre les quantités OA, OB, R et les lignes trigonométriques de l'angle O.

On déduira de chaque méthode la discussion des résultats.

Enseignement spécial.

PREMIÈRE QUESTION. — Projections horizontale et verticale d'un cube dont le côté est donné, et de position telle que l'un de ses sommets soit sur la ligne de terre, que les deux côtés aboutissant à ce sommet fassent avec la ligne de terre des angles égaux à 45°, et que l'inclinaison du plan formé par ces deux côtés sur le plan horizontal de projections soit égale à 45°.

2e QUESTION. — Soient trois arbres parallèles A_1, A_2, A_3 : le premier arbre portant une roue dentée C_1 dont le nombre des dents est N_1. Cette roue est fixée invariablement sur cet arbre et engrène avec une petite roue O_2 dont le nombre de dents est n_2. Cette petite roue O_2 est invariablement fixée sur le second arbe A_2, arbre sur lequel on a fixé une grande roue C_2 dont le nombre de dents est N_2 n'engrenant pas avec la petite O_2. Au contraire cette grande roue C_2 engrène avec un petite roue dentée O_3 dont le nombre de dents est n_3, fixée invariablement sur le troisième arbre A_3. Cette machine étant en mouvement, dans quel rapport sont les vitesses de rotation ω_1 et ω_3 des roues extrêmes C_1 et O_3?

$$N_1 = 45 \qquad N_2 = 48$$
$$n_2 = 6$$

Quelle valeur faut-il attribuer à n_3 pour que, l'aiguille *a* fixée sur l'arbre A_1 marquant la minute, l'aiguille *b* fixée sur l'arbre A_3 marque la seconde?

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite*; voir page 151.)

Principe des distances. — Lorsqu'un objet s'éloigne de nous, deux effets se produisent.

1° La lumière qu'il nous envoie, et, par suite, l'éclat total qu'il possède pour nous décroît en raison inverse du carré de la distance; cet effet est absolument nul pour notre œil, et s'il existait seul, les objets paraîtraient aussi éclatants de loin que de près. En effet, plus un objet est loin, moins il nous envoie de lumière, c'est vrai, mais plus il paraît petit dans notre œil; de telle sorte que celui-ci recevant moins de lumière mais la condensant sur un espace plus petit, l'éclat par unité de surface de cet espace de la rétine reste constamment le même, et l'objet doit paraître aussi éclatant de loin que de près. Dans les pays où l'atmosphère est très-pure, en Égypte notamment, les distances ne modifient que la grandeur apparente des objets, mais presque pas l'intensité de leur coloration;

2° Lorsqu'un objet s'éloigne, il s'interpose entre lui et nous une sorte de brouillard formé par l'air; ce brouillard est d'autant plus intense que l'air est moins pur. Il agit:

a. Par réflexion, en recevant de la lumière et nous la renvoyant, ce qui diminue d'autant l'éclat relatif des objets situés derrière;

b. Par transparence, en colorant de sa couleur, qui est bleue, les objets devant lesquels il s'interpose.

Des différents plans en peinture. — En peinture, on classe les objets suivant leur distance à l'œil, par les places qu'ils occupent.

Les objets placés très-près sont dits au premier plan; on admet que sur eux l'effet de l'air est nul; donc les objets en premier plan posséderont leur couleur absolue.

Placés un peu plus loin, les objets sont dits en deuxième plan ; les objets jaunes paraîtront dans ce cas moins jaunes et un peu bleuis, ou mieux un peu neutralisés comme couleur.

Les objets rouges paraîtront moins rouges et un peu bleuis, c'est-à-dire un peu violets.

Les objets bleus paraîtront moins bleus s'ils sont bleu foncé et, au contraire, un peu plus bleus s'ils sont bleu très-clair.

Encore plus loin, les objets sont en troisième plan ; tous les effets indiqués ci-dessus devront être accentués.

Enfin, tout à fait au loin, les objets sont dits dans le lointain ; la couleur bleue augmente, et l'on peut dire que toutes les couleurs viennent se fondre dans le bleu.

Le jaune devient bleu jaune, c'est-à-dire un peu verdâtre.

Le rouge devient rouge bleu, c'est-à-dire un peu violacé.

Le bleu devient moins foncé s'il était d'abord foncé, et plus foncé au contraire s'il était très-clair ; en tout cas, jamais ce bleu de lointain ne peut devenir intense ; il ne doit évidemment pas dépasser le bleu de ciel qui est le bleu clair à son maximum de densité.

Manière de rendre en camaïeu, à l'encre de Chine, les effets de la distance. — Les effets de distance se rendront à l'encre de Chine de manières différentes suivant l'intensité des tons. En effet, un objet est-il foncé ? En s'éloignant, il doit : 1° perdre de sa coloration, c'est-à-dire s'éclaircir ; 2° prendre le ton de l'air, c'est-à-dire se foncer.

Suivant que l'un ou l'autre de ces deux effets l'emportera, on devra diminuer ou augmenter la teinte du premier plan.

Exemples :

1° Un objet jaune en lumière se rendra en premier plan par une teinte d'encre de Chine pour ainsi dire nulle ; s'il s'éloigne, c'est l'effet d'assombrissement de l'air qui l'emportera ; on rendra l'éloignement en ajoutant de légères teintes d'encre de Chine qui, cependant, ne devront jamais, même pour les lointains, dépasser la teinte que l'on jugera devoir représenter le bleu de ciel ;

2° Un objet jaune dans l'ombre, et, plus généralement, tout objet dans l'ombre se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine en général assez intense; en éloignant l'objet, c'est l'effet d'éclaircissement qui l'emportera et on devra diminuer les teintes;

3° Pour un objet rouge en lumière, le rouge étant un ton demi-sombre, la teinte d'encre de Chine qui le rendra ne sera ni claire ni foncée et à peu près celle qui conviendrait comme bleu de lointain; il pourra donc se faire que l'éloignement conduise à ne modifier que très-peu la teinte rendant le rouge. Cependant, comme il ne faut jamais en dessin rester dans l'indécision, on devra franchement adopter un rouge clair ou un rouge foncé; s'il est clair, on en rendra les effets comme on a fait pour du jaune; s'il est foncé, on agira comme il va être dit pour le bleu;

4° Un objet bleu dans la lumière, le bleu étant une couleur sombre, se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine un peu accentuée; en s'éloignant, cette teinte devra diminuer, tandis que l'air viendra pour la foncer; le premier effet l'emportera; par conséquent, pour les bleus, surtout les bleus sombres (ceci ne s'appliquerait pas aux bleus clairs), la distance se rendra en diminuant le ton du premier plan.

Règle générale. — Veut-on savoir, en faisant un lavis, si tel ton d'ombre ou de lumière doit être rabattu ou éclairci en s'éloignant, on commencera par établir le ton qui conviendrait aux lointains, et qui sera très-voisin de celui qui figurera le ciel; les tons plus clairs que celui-là s'assombriront en s'éloignant, mais sans jamais dépasser comme intensité celle des lointains; les tons plus foncés que celui des lointains devront s'éclaircir en s'éloignant, mais sans jamais devenir plus clairs que le ton des lointains.

En résumé, tous les tons, en s'éloignant, tendront à se rapprocher d'un ton unique, qui est celui des lointains.

Effets de contraste et d'irradiation. — Ces effets sont physiologiques et se produisent sur les nerfs de la rétine. Leur influence est considérable sur l'aspect apparent

des objets; le dessinateur doit les connaître, afin de les produire dans son lavis en les exagérant. Il augmentera ainsi l'illusion produite par eux sur le spectateur. Voici les principaux effets de contraste et d'irradiation :

1° Si deux surfaces placées à côté l'une de l'autre sont l'une noire et l'autre blanche, leur différence d'éclat s'exagère par le seul fait de leur juxtaposition;

2° Une même surface légèrement grise paraîtra presque noire si on la fait se détacher sur un fond très-blanc ou très-lumineux, et presque blanche si on la met sur un fond noir;

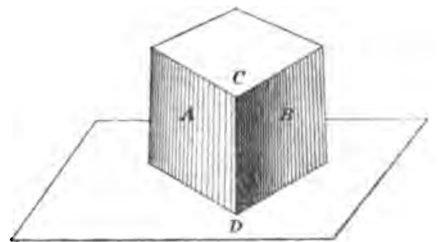
3° Un cercle très-blanc placé sur un fond moins blanc semblera entouré d'une auréole dégradée grise. Au contraire, un cercle très-noir placé sur un fond presque blanc semblera entouré d'une auréole plus blanche que le fond et se dégradant vers le blanc du fond en s'éloignant du cercle;

4° Une surface d'une certaine couleur, verte, par exemple, se détachant sur un fond vert un peu différent d'elle, paraît moins verte que si on la place sur un fond d'une couleur complémentaire, rouge par conséquent. Autrement dit : deux tons de couleurs analogues s'atténuent réciproquement, et deux tons de couleurs opposées, c'est-à-dire complémentaires, s'exaltent l'un par l'autre ;

5° Un rond d'une certaine couleur placé sur un fond blanc paraît entouré d'une auréole dégradée, teintée de la couleur complémentaire.

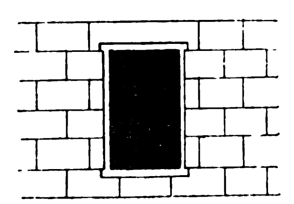
6° *Effet d'irradiation.* — Deux surfaces égales, l'une noire et l'autre blanche, placées à côté l'une de l'autre, ne paraissent pas égales, et la surface blanche paraît plus grande. C'est par un effet analogue que le croissant de la lune, alors que la lumière cendrée est visible, semble déborder sur la partie obscure du disque. Un fil fin, obscur, visible sur un fond gris, disparaît si le fond devient plus éclairé. Les plombs des vitraux d'église paraissent beaucoup plus minces qu'ils le sont en réalité. Dans certains cas, c'est à peine si on les voit. En résumé, il y a empiètement du clair sur l'obscur.

Conséquences. — (*a*) Si deux plans A et B se coupent suivant une arête vive CD; si l'un d'eux est éclairé, et si l'autre est dans l'ombre, la face dans l'ombre paraît plus noire aux environs de l'arête CD et la face éclairée plus blanche.



Le dessinateur devra donc dans son lavis accuser cet effet en l'exagérant.

(*b*) En architecture, les fenêtres qui se détachent sur les murs qui, même dans l'ombre, sont beaucoup plus éclairés que l'intérieur des pièces auxquelles appartiennent ces fenêtres, paraissent très-noires et plus foncées en haut qu'en bas. Ce dernier effet tient à ce que, dans les appartements, les parties basses des parois intérieures sont plus éclairées que les parties hautes.

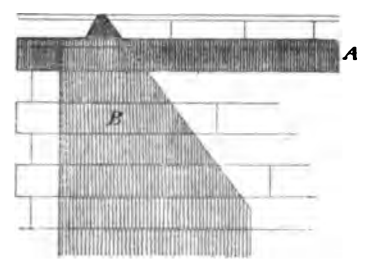


(*c*) Dans un édifice, les toits paraissent presque toujours sombres; à moins qu'ils se fassent miroirs et réfléchissent la lumière. Cela tient à ce qu'ils se détachent sur le ciel, qui est presque toujours très-brillant. Les ombres dans les toits paraissent toujours très-noires.

(*d*) Le ciel étant bleu, les objets qui se détachent sur lui doivent paraître plus *orangés* qu'ils ne sont. Ce fait est surtout sensible pour les édifices en pierres jaunes. Aussi, les architectes ont-ils l'habitude, dans leurs lavis, lorsqu'ils veulent rendre l'effet d'un édifice en pierre rouge ou jaune, de passer la teinte plus intense à la partie supérieure.

Plus généralement, à cause du contraste puissant dû au ciel très-clair, tous les tons, que ce soient des tons d'ombre ou des tons de couleur, doivent être plus intenses à la partie supérieure des édifices qu'à la partie inférieure. On donnera plus loin une seconde cause de cet effet, due aux reflets du sol.

(*e*) En architecture, les ombres fines portées par les moulures de faible saillie se détachent ordinairement sur un mur blanc à grande surface éclairée, et paraissent plus fines et plus noires qu'elles ne sont en réalité. Au contraire, les grandes ombres portées par des corps de bâtiment en saillie, paraissent plus claires et plus transparentes que les précédentes. Dans un dessin, on devra exagérer ces effets comme l'indique le croquis ci-contre.



(A suivre.)

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Session de novembre 1878.

5 novembre. — 1° Deux joints A et B sont distants l'un de l'autre de d kilomètres. La tonne de charbon prise en A coûte a francs; la tonne de charbon prise en B coûte b francs; le transport de la tonne coûte c franc par kilomètre. Trouver entre A et B le point où la tonne de charbon coûte le même prix, qu'elle vienne de a ou de b et vérifier que les prix sont égaux?

Appl.: $d = 800$ kil. $a = 37$ fr. 50. $b = 46$ fr. 75. $c = 0$ fr. 018.

2° Par un point o situé dans l'espace à une hauteur h au-dessus du plan horizontal, on mène des plans faisant tous le même angle α avec le plan horizontal. Démontrer que leurs intersections avec ce plan sont toutes tangentes à une circonférence de cercle. Indiquer le point du plan où est situé le centre de cette circonférence, et calculer le rayon.

7 novembre. — 1° Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse a, sachant que le volume engendré par le triangle en tournant autour de l'un des côtés égale m fois celui engendré quand il tourne autour du deuxième côté. Cas de $m = 1$.

2° Démontrer que si les projections d'une droite sur les deux plans de projection sont perpendiculaires aux traces d'un plan, la droite est perpendiculaire à ce plan.

Session d'avril 1879.

31 mars. — 1° Deux circonférences de rayon r et r' se coupent, la distance de leurs centres est d. Calculer les angles sous lesquels la corde d'intersection MN est vue des centres o et o'.

Application $r = 10^m$. $r' = 13^m$. $d = 15^m$.

2° Résoudre $(x + 1)(2y + 1) = 5x + 9y + 1$.

$(x + 2)(3y + 1) = 9x + 13y + 2$.

Vérifier les valeurs.

2 *avril.*— 1° Sur une droite de longueur a on a décrit un segment capable d'un angle donné A. Calculer le rayon du cercle et l'arc du segment où est inscrit l'angle A.

Application: $a = 436$. $A = 58°32'$.

2° Résoudre :

$$\log (7x - 9)^2 + \log (3x - 4)^2 = 2.$$

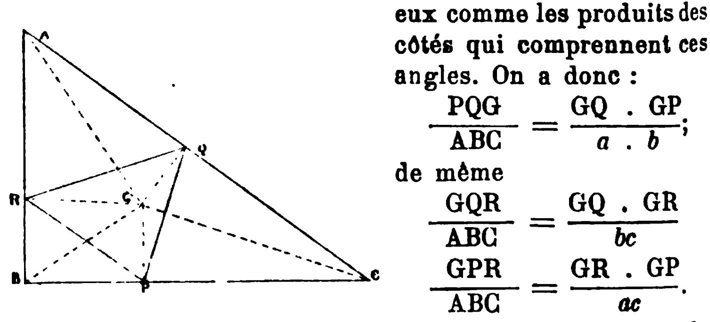
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 129.

Solution par M. Lannes, élève du Lycée de Tarbes.

Soient P, Q, R *les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de gravité d'un triangle* ABC *sur les côtés de celui-ci,* T *l'aire du triangle* ABC *et* a, b, c *ses côtés. Démontrer que l'aire du triangle* PQR *est égale à* $\frac{4}{9} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2} T^3$.

Le triangle ABC ayant un angle C supplémentaire de l'angle PGQ du triangle PGQ, ces deux triangles sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent ces angles. On a donc :



$$\frac{PQG}{ABC} = \frac{GQ \cdot GP}{a \cdot b};$$

de même

$$\frac{GQR}{ABC} = \frac{GQ \cdot GR}{bc}$$

$$\frac{GPR}{ABC} = \frac{GR \cdot GP}{ac}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et remplaçant GQ, GP, GR par leurs valeurs $\frac{2T}{3b}$, $\frac{2T}{3a}$, $\frac{2T}{3c}$ on aura :

$$\frac{\mathrm{PQR}}{\mathrm{T}} = \frac{4\mathrm{T}^2}{9}\left[\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right]$$

d'où

$$\mathrm{PQR} = \frac{4}{9}\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}\,\mathrm{T}^2.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Hoc, de Longwy; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Lacroix, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne; Vazou, collége Rollin; Landre, de La Flèche; Longueville, à Charleville.

QUESTION 133.

Solution par M. Bompard, élève du Collége Stanislas.

ABCD et AB′C′D′ sont deux carrés tels que BAB′ DAD′ soient en ligne droite. B′C coupe AD en E et CD coupe AB′ en F. Prouver que AE et AF sont des lignes égales.

Les triangles semblables DD′C′ et DAF donnent

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{D'C'}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DD'}}.$$

De même les triangles AEB′, BB′C donnent également

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB'}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BB'}}.$$

Or, $\mathrm{D'C'} = \mathrm{AB'}$,

$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$,

$\mathrm{DD'} = \mathrm{BB'}$

Donc

$\mathrm{AE} = \mathrm{AF}$.

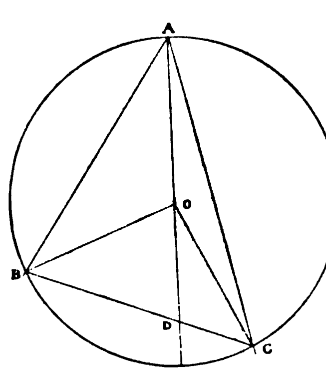
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Huet, Gelinet, d'Orléans; Tessier, d'Angers; Rollet, de Saint-Quentin; Landre, de la Flèche; Dupuy, de Grenoble; Zuloaga, de Liége; d'Ocagne, collège Chaptal; Chareyre, de Bourg; Plet, Paulme, école de Passy; Peyrabon, Johannet de Châteauroux; Vermand, de Saint-Quentin; Lenormand, de Rouen; Pecquery, du Havre; Detchenique, de Mont-de-Marsan; Objois, de Moulins; Gondy, de Pontarlier; Ailleret, de Versailles; Foissey, de Dijon; Pombard, Jacquier, à l'école normale de Charleville; Longueville, à Charleville.

QUESTION 135.

Solution par M. Landre, élève du Prytanée militaire, La Flèche.

Prouver que la portion du diamètre du cercle circonscrit à un triangle ABC, *comprise entre le sommet* A *et le côté opposé* BC *est égale à* $\dfrac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2B + \sin 2C}$.

En effet, $AD = AO + OD$ et les angles BOC, AOC, AOB, sont respectivement doubles des angles A, B, C.



Considérant successivement les triangles AOB et AOC, on a

$$\frac{AO}{\sin(90 - C)} = \frac{c}{\sin 2C}$$

$$\frac{AO}{\sin(90 - B)} = \frac{b}{\sin 2B}$$

dès lors

$$AO = \frac{c \cos C}{\sin 2C} = \frac{b \cos B}{\sin 2B}$$

d'où

$$AO = \frac{c \cos C + b \cos B}{\sin 2C + \sin 2B}$$

Si l'on considère les triangles BOD et DOC, on a

$$OB = \frac{BD \cos A}{\sin 2C} = \frac{DC \cos A}{\sin 2B},$$

d'où
$$OD = \frac{a \cos A}{\sin 2B + \sin 2C}.$$

Dès lors

$$AO + OD = AD = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2B + \sin 2C}.$$

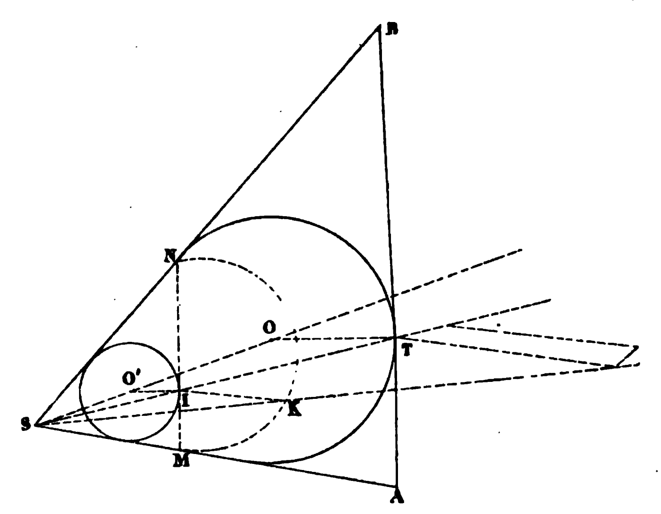
Nota. — Ont résolu la même question: MM. Zuloaga, de Liége; Hugot, école Ozanam, Lyon; Hoc, de Longwy; Peyrabon, de Châteauroux; Élie, collége Stanislas.

QUESTION 136.

Solution par M. Cordeau, élève de l'École Lavoisier.

Mener un cercle tangent à deux droites données de position de telle sorte que si l'on mène une tangente parallèle à une direction donnée et terminée aux deux lignes, le rectangle des segments déterminés par le point de contact soit égal à un carré donné.

Soit O le cercle cherché et ATB la tangente. Construisons le cercle O' tangent aux deux droites données et joignons le point S centre de similitude des deux cercles O et O' au point



T; cette droite coupe le cercle O' en I et la tangente MN en ce point est parallèle à AB. Il en résulte que les triangles SIM, STA sont semblables ainsi que les triangles SIN et STB. Donc

$$\frac{AT \cdot TB}{MI \cdot IN} = \frac{\overline{ST}^2}{\overline{SI}^2},$$

et comme

$$AT \cdot TB = m^2$$

et

$$MI \cdot NI = n^2 = \overline{IK}^2$$

on a

$$\frac{m^2}{\overline{IK}^2} = \frac{\overline{ST}^2}{\overline{SI}^2}$$

ou $$\frac{m}{IK} = \frac{ST}{SI}$$

et $$ST = \frac{m}{IK} . SI$$

Pour construire cette quatrième proportionnelle, joignons le point S au point K et le problème revient à mener une droite de longueur donnée m parallèle à IK et s'appuyant sur deux droites données ST, SK.

Le point T étant déterminé menant OT parallèle à O'I. Le point O est le centre du cercle cherché.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Manceau, d'Orléans; Fain, école Bossuet, lycée Louis-le-Grand; Hoc, de Longwy; Lachesnais, de Versailles; Dupuy, à Grenoble; Vermand, à Saint-Quentin; Blessel, à Paris.

QUESTION 140.

Solution par M Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées, Paris.

Prouver que dans un triangle on a:

$$\frac{r}{R} = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c}$$

Cette égalité revient à la suivante :

(1) $aR \cos A + bR \cos B + cR \cos C = r(a + b + c)$.

Or O étant le centre du cercle circonscrit au triangle, H, K, L, les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les côtés du triangle, on a $R \cos A = OH$, par suite $aR \cos A = 2$ surf BOC. De même $bR \cos B = 2$ surf AOC, $cR \cos C = 2$ surf AOB. Le premier membre de l'égalité (1) n'est autre chose que le double de la surface du triangle ABC. Il en est de même du second. Donc l'égalité proposée est démontrée.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Moles, d'Angoulême; Zuloaga, à Liége; Hugot, de Lyon; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Hoc, de Longwy; Elie, à Stanislas; Landre, à la Flèche.

QUESTIONS PROPOSÉES

171. — Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, A étant l'angle moyen, on a :

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3};\ \operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=2\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

(*Burnier.*)

172. — Le produit des trois côtés d'un triangle rectangle évalués en nombres entiers est toujours divisible par 60.

(*Dufrenoy.*)

173. — Si dans un triangle, les bissectrices des angles à la base rencontrent les côtés opposés sur une parallèle à la base, le triangle est isoscèle. (*Dufrenoy.*)

174. — Étant donné un parallélogramme, on construit sur les diagonales des rectangles tels que les côtés opposés aux diagonales se coupent sur l'un des côtés du parallélogramme. Démontrer que la somme des deux rectangles est équivalente au parallélogramme. (*Dufrenoy.*)

175. — On donne un cercle et une tangente fixe à ce cercle en un point I. Sur cette tangente on prend deux points mobiles A et B tels que le produit $AI \times BI$ soit constant. Par les points A et B on mène des tangentes qui se coupent en un point C dont on demande le lieu géométrique. (*de Longchamps.*)

176. — Par un point pris sur le prolongement d'un des côtés d'un triangle, mener une droite qui coupe les deux autres côtés, et qui soit telle que la projection sur le premier de la partie interceptée entre les deux autres côtés soit égale à une longueur donnée.

177. — Soit un triangle ABC; aux points milieux A', B', C des côtés on élève des perpendiculaires à ces côtés, sur lesquelles on prend $A'D = \frac{1}{2}$ BC; $B'E = \frac{1}{2}$ AC; C'F

$= \frac{1}{2}$ AB. (A′ est le milieu de BC, etc., et les perpendiculaires sont menées extérieurement au triangle.) Démontrer : 1° que les droites telles que EF et AD sont égales ; 2° qu'elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre ; 3° que les trois droites AD, AE, CF se coupent en un même point.

(*Nomy.*)

178. — Étant donné un parallélogramme ABCD, on mène par le point C une sécante PCQ qui coupe en P et Q respectivement les côtés AB et AD. Par A et P, on fait passer une circonférence tangente à AD au point A ; par A et Q, on fait passer une autre circonférence tangente à AB au point A. Ces deux circonférences se coupent en un point M dont on demande le lieu géométrique lorsque la sécante PCQ tourne autour du point C.

179. — Construire géométriquement un triangle connaissant un côté, le pied de la hauteur correspondante, et sachant que les bissectrices d'un des angles adjacents à ce côté sont égales. (*Mignot.*)

180. — Sur les trois arêtes d'un trièdre, on prend trois longueurs égales à l'unité OA, OB, OC. Démontrer que si l'on appelle V le volume du tétraèdre OABC, a, b, c les faces en O, on a :

$$3V = \sqrt{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

(*Thual.*)

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 11580-9.

THÉORIE DES CENTRES
DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. **Kœhler**.

Quoiqu'elle ne figure pas explicitement dans les programmes officiels, la théorie de la proportion harmonique est entrée dans l'enseignement; je ne me propose pas de l'exposer dans tous ses détails, ni de développer les nombreuses applications qu'elle comporte et qui se trouvent dans la plupart des traités de géométrie. Le but de cet article est de montrer comment la notion de la proportion harmonique est susceptible de généralisation, en s'appliquant à un nombre quelconque de points situés ou non sur la même droite.

Maclaurin est, je crois, le plus ancien auteur qui ait considéré le centre des moyennes harmoniques d'un système de points (*Introduction au traité des courbes du troisième ordre*). Poncelet a étendu et généralisé la conception de Maclaurin dans un long mémoire qui fait partie du *Traité des propriétés projectives*.

MM. de Joncquières, Crémona, etc., ont publié des travaux sur le même sujet; la théorie des centres harmoniques de divers ordres sert de point de départ à M. Crémona pour la démonstration d'un grand nombre de propriétés des courbes.

Les résultats obtenus par ces géomètres sont pour la plupart assez simples pour entrer dans le cadre de ce journal.

1. Je rappellerai d'abord quelques principes sur l'emploi des signes en géométrie.

Lorsqu'un segment est compté sur une droite à partir d'une certaine origine, on l'affecte du signe + ou du signe —, suivant le sens dans lequel il est porté; dans la désignation du segment, la première lettre indique toujours

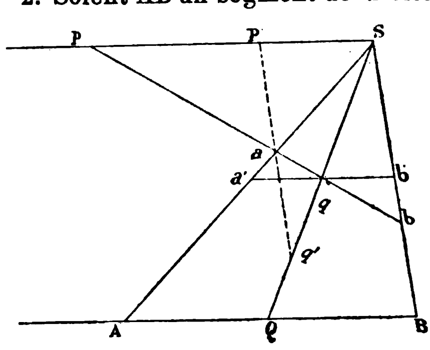
l'origine choisie. De là résulte l'identité $AB = -BA$, si l'on convient de regarder comme positifs les segments comptés de A vers B.

Si l'on a trois points A, B, C sur une même droite, on a *toujours* l'identité $AB + BC + CA = o$. Il est aisé de la vérifier en examinant les trois positions que C peut occuper par rapport aux points A et B, le segment AB étant regardé comme positif. Si, par exemple, C est entre A et B, on a $AC + CB = AB$, ou bien (puisque $AC = -CA$, et $CB = -BC$) $AB = -CA - BC$, et $AB + BC + CA = o$. De même pour les autres positions du point C.

Cette identité fondamentale permet de rapporter un segment AB à une origine quelconque O prise sur la même droite. On a identiquement $AB + BO + OA = o$, et par suite $AB = -BO - OA$ ou bien $AB = OB - OA$.

Rappel des propriétés de la proportion et du faisceau harmonique.

2. Soient AB un segment de droite et Q son milieu ; si par un point S on mène une parallèle Sp à AB, les quatre droites Sp, SA, SQ, SB forment un faisceau harmonique. La propriété caractéristique d'un pareil faisceau, c'est qu'une transversale quelconque *paqb* coupe les rayons en quatre points liés par la relation $\frac{pa}{pb} = \frac{aq}{qb}$.



Menons $a'qb'$ parallèle à AB. On aura, par les triangles semblables $\frac{pa}{aq} = \frac{pS}{a'q}$ et $\frac{pb}{qb} = \frac{pS}{qb'}$; comme $a'q = qb'$ il en résulte $\frac{pa}{aq} = \frac{pb}{qb}$ ou bien $\frac{pa}{pb} = \frac{aq}{qb}$.

C'est la forme sous laquelle se présente la proportion harmonique dans le théorème classique sur les bissectrices

intérieure et extérieure de l'angle d'un triangle. Les côtés de l'angle et les deux bissectrices forment un faisceau harmonique dans lequel deux rayons sont perpendiculaires; la proportion harmonique a lieu entre les segments déterminés par les extrémités de la base et les pieds des bissectrices.

Le faisceau harmonique, défini comme nous venons de le faire, est tel qu'une parallèle à l'un quelconque des quatre rayons est divisée en deux parties égales par les trois autres. En effet menons par exemple $p'aq'$ parallèle à Sb; on aura $\frac{p'a}{Sb} = \frac{pa}{pb}$, $\frac{aq'}{Sb} = \frac{aq}{qb}$, et en vertu de l'égalité des seconds membres, $p'a = aq'$.

Il résulte de ce qui précède que la proportion harmonique est projective : si d'un point S on mène des rayons à quatre points déterminant sur une droite des segments harmoniques, toute transversale est coupée par les rayons en quatre points jouissant de la même propriété. Les points p, q sont conjugués l'un de l'autre par rapport aux points a, b; de même a et b sont conjugués par rapport à p et q. Lorsque la transversale devient parallèle à l'un des rayons, le point correspondant à ce rayon passe à l'infini, et son conjugué est au milieu de la distance des deux autres points.

L'égalité fondamentale (1) qui sert ordinairement de définition à la proportion harmonique peut être transformée de plusieurs manières. On peut l'écrire $\frac{pa}{pb} + \frac{qa}{qb} = 0$ ou bien $\frac{pa}{qa} + \frac{pb}{qb} = 0$ (2) ou enfin $\frac{pa}{qa} : \frac{pb}{qb} = -1$. Sous cette forme elle exprime qu'un des rapports anharmoniques des quatre points est égal à -1.

Rapportons tous les segments au point p pris pour origine; on aura, au lieu de l'égalité (2),

$$\frac{pa}{pa - pq} + \frac{pb}{pb - pq} = 0 \text{ ou } 2pa \,.\, pb = pq\,(pa + pb),$$

ou enfin $\frac{2}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb}$. (3)

Si l'on prend successivement pour origine chacun des

autres points, on trouvera de la même manière, en appliquant toujours la relation type AB = OB — OA rappelée au commencement de cet article :

$$\frac{2}{qp} = \frac{1}{qa} + \frac{1}{qb} \quad (3') \qquad \frac{2}{ab} = \frac{1}{ap} + \frac{1}{aq} \quad (3'')$$

$$\frac{2}{ba} = \frac{1}{bp} + \frac{1}{bq} \quad (3''')$$

Ces quatre dernières égalités (3), (3'), (3''), (3''') font ressortir la réciprocité qui existe entre les points p et q d'une part, a et b de l'autre ; elles se prêtent, ainsi que l'égalité (2), à la généralisation indiquée en commençant.

Si l'on prend pour origine le milieu o de ab, on aura

$$\frac{oa - op}{oa - oq} + \frac{ob - op}{ob - oq} = 0,$$

et en réduisant

$$2oa \,.\, ob + 2op \,.\, oq - oa \,.\, oq - ob \,.\, op - oa \,.\, op - ob \,.\, oq = 0.$$

Mais $ob = -oa$. Donc les quatre derniers termes disparaissent, et il reste $oa \,.\, ob + op \,.\, oq = 0$ ou bien $op \,.\, oq = \overline{oa}^2$. De même, si o' est le milieu de pq, on a $o'a \,.\, o'b = \overline{o'p}^2$. Ces deux relations sont souvent employées.

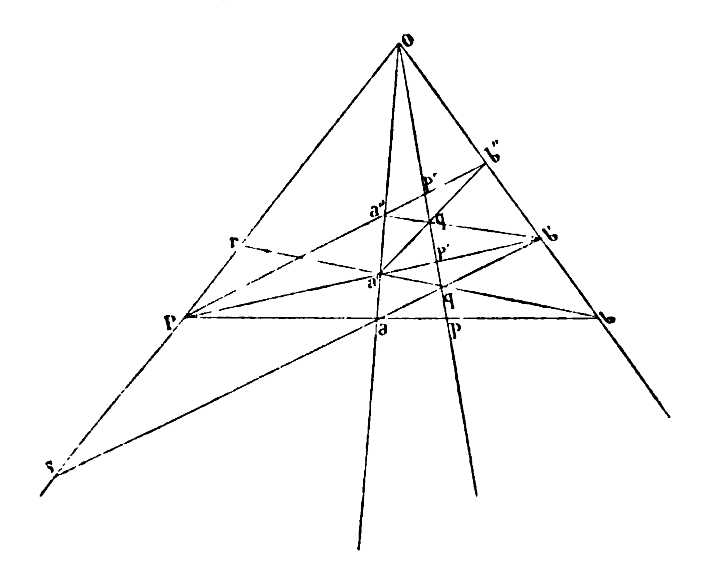
Quand on a sur une droite des couples de points (a, b), (a', b'), (a'', b''), etc., tels que $oa \,.\, ob = oa' \,.\, ob' = oa'' \,.\, ob'' = \ldots = \overline{op}^2$, on sait qu'ils forment une involution quadratique, dont o est le point central, p et q les points doubles qui divisent harmoniquement tous les segments tels que (ab).

Polaire d'un point par rapport à un système de deux droites.

3. Soient oa, ob deux droites, p un point de leur plan ; menons les transversales Pab, P$a'b'$, P$a''b''$ . . . ; le lieu des conjugués harmoniques de P par rapport aux couples (a, b), (a', b'), (a'', b'')... est une droite passant par le point o, et les points de concours q, q'... des diagonales de tous les quadrilatères $abb'a'$, $a'b'b''a''$... sont sur cette droite.

La première partie du théorème est évidente ; car si l'on prend le conjugué harmonique de P sur une quelconque des transversales, les rayons oP, oa, op, ob forment un faisceau

harmonique, et si l'on considère ensuite une autre transversale P*a'b'*, le conjugué *p'* de P par rapport à *a'*, *b'* sera sur *op*. Pour démontrer la seconde partie, je remarque que les droites *q*P, *qa*, *qp*, *qb* forment un faisceau harmonique dans lequel *qp* est le conjugué de *q*P ; de même, dans le faisceau *q*P, *qa*, *qp'*, *qb*, le rayon *qp'* est le conjugué de *q*P ; donc il se confond avec *qp*, et le point *q* est sur la droite *pp'o*.



On conclut de ce théorème que dans un quadrilatère complet chaque diagonale est coupée harmoniquement par les deux autres. Soit le quadrilatère *abb'a'* dont les côtés opposés se coupent en O et P ; le conjugué *r* de *q* par rapport aux points *b*, *a'* est sur la troisième diagonale OP. De même le conjugué *s* de *q* par rapport à *b'* et *a* est sur OP. Enfin, comme le faisceau *q*P, *qa*, *q*O, *qb'* est harmonique, les quatre points O, *r*, P, *s* déterminent une proportion harmonique.

(A suivre.)

NOTE D'ALGÈBRE

Recherche du maximum et du minimum de la fraction

$$z = \frac{ax^2 + 2\,bxy + cy^2}{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}.$$

Posons $\frac{x}{y} = X$. La fonction proposée devient

$$z = \frac{a\,X^2 + 2b\,X + c}{a'\,X^2 + 2b'X + c'} \qquad (1)$$

ou $\quad (a - a'z)\,X^2 + 2\,(b - b'z)\,X + c - c'z = 0$

et en résolvant

$$(a - a'z)X + b - b'z = \pm\sqrt{(b - b'z)^2 - (a - a'z)\,(c - c'z)}. \quad (2)$$

Nous distinguerons trois cas selon que les racines de l'équation

$$(b'^2 - a'c')\,z^2 - (ac' + ca' - 2\,bb')\,z + b^2 - ac = 0 \quad (3)$$

obtenue en égalant à o la quantité sous le radical seront réelles et inégales; réelles et égales; imaginaires.

1[er] cas. — Les racines sont réelles et inégales. Supposons que α et β soient ces racines et que l'on ait $\beta > \alpha$.

Si $b'^2 - a'c' > 0$, on a

$$(a - a'z)\,X + b - b'z = \pm\sqrt{(b'^2 - a'c')\,(z - \alpha)\,(z - \beta)}.$$

Si z est inférieur ou égal à α, X est réel; mais si z est plus grand que α et plus petit que β, X devient imaginaire.

Donc la plus petite racine α est la valeur maximum de z. De la même manière on peut facilement voir que la plus grande racine β est un minimum.

Si $a' = 0$ ou si $c' = 0$ le radical devient $b'\sqrt{(z - \alpha)\,(z - \beta)}$ et comme précédemment la plus grande racine est le minimum et la plus petite le maximum de la valeur de Z.

Dans ce qui précède, nous avons supposé réelles les racines du dénominateur. Si elles étaient imaginaires, c'est-à-dire si $b'^2 - a'c' < 0$, on aurait

$$(a - a'z)\,X + b - b'z = \pm\sqrt{(a'c' - b'^2)\,(z - \alpha)\,(\beta - z)};$$

on voit aisément que X est imaginaire pour toutes le valeurs de z excepté pour celles comprises entre α et β.

En conséquence la plus grande racine est un maximum et la plus petite un minimum de z.

Si $\alpha = \beta$ l'expression sous le radical est positive pour toutes les valeurs de z, et par suite z n'admet ni maximum ni minimum.

Si α et β sont imaginaires, l'expression sous le radical est positive, et dans ce cas z n'admet encore ni maximum ni minimum.

De ce qui précède il suit que la valeur de X correspondant à un maximum ou à un minimum de z, doit satisfaire à l'équation

$$(a - a'z) X + b - b'z = 0$$

Remplaçons z dans (1) par sa valeur tirée de cette équation on a

$$\begin{vmatrix} 1 & -X & X^2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

ou $(ab' - ba') X^2 + (ac' - ca') X + bc' - cb' = 0.$ (4)

Cette équation détermine les valeurs de X qui correspondent au maximum et minimum de z.

On peut facilement voir que si les racines de l'équation (3) sont réelles, il en est de même de celles de l'équation (4) et réciproquement.

Ce qui précède nous permet de trouver élémentairement le maximum et le minimum de la fonction

$$Z = a \cos^2 x + 2b \cos x \cos y + c \cos^2 y \qquad (1)$$

cos x et cos y étant liés par la relation

$$(1 + p^2) \cos^2 x + 2pq \cos x \cos y + (1 + q^2) \cos^2 y = 1 \quad (2)$$

a, b, c, p, q étant indépendantes de x et de y.

(Lacroix, *Calcul différentiel.*)

Multiplions et divisons le second membre de (1) et de (2) par $\cos^2 y$ il vient

$$Z = \left(a \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + 2b \frac{\cos x}{\cos y} + c\right) \cos^2 y$$

$$\left[(1 + p^2) \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + 2pq \frac{\cos x}{\cos y} + (1 + q^2)\right] \cos^2 y = 1$$

d'où $\cos^2 y = \dfrac{1}{(1 + p^2)\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + 2pq\dfrac{\cos x}{\cos y} + (1 + q^2)}$

Remplaçons dans (1) $\cos^2 y$ par cette valeur et posons

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} = X^2$$

on a $Z = \dfrac{aX^2 + 2bX + c}{(1 + p^2)X^2 + 2pqX + (1 + q^2)}$.

Le maximum et le minimum de cette fonction sont, d'après ce qui précède, donnés par l'équation

$$(1 + p^2 + q^2)Z^2 - [(1 + q^2)a - 2pqb + (1 + p^2)c]Z$$
$$+ ac - b^2 = 0$$

et les valeurs correspondantes de X sont données par

$$[(1 + p^2)b - apq]X^2 + [(1 + p^2)c - (1 + q^2)a]X$$
$$+ pqc - (1 + q^2)b = 0.$$

Remarque. — L'équation (4) permet de résoudre simplement la question suivante : *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients des deux fractions* $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + bx' + c'}$ *et* $\dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'}$ *pour que ces deux fonctions aient des maximum et minimum correspondants aux mêmes valeurs de* x.

Les équations qui déterminent les valeurs maximum et minimum de chacune de ces fonctions sont d'après ce qui précède :

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0$$
$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')x^2 + 2(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')x + (\beta\gamma' - \gamma\beta') = 0.$$

Ces deux équations devant avoir les mêmes racines, on doit avoir

$$\frac{ab' - ba'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} + \frac{ac' - ca'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'} = \frac{bc' - cb'}{\beta\gamma' - \gamma\beta'};$$

telle est la relation cherchée.

C. C.

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite*; voir page 202.)

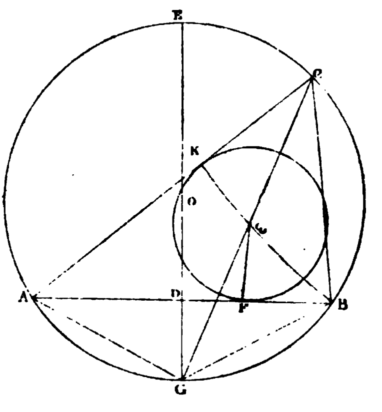
SUR LES TRIANGLES INSCRITS DANS UN CERCLE ET CIRCONSCRITS A UN AUTRE CERCLE.

12. Soit le triangle ABC, inscrit au cercle AEBG, et circonscrit au cercle $F\omega K$; nous allons chercher une expression de la distance des centres O et ω de ces cercles. Soit D cette distance; appelons R et r les rayons des cercles; on voit facilement que l'on a

$$(R+D)(R-D) = C\omega \,.\, G\omega,$$

ou

$$D^2 = R^2 - C\omega \,.\, G\omega.$$



Par le point G, menons le diamètre GOE; joignons le point A aux points G, E. La similitude des triangles $CK\omega$, AGE nous donne

$$GE \,.\, \omega K = C\omega \,.\, GA;$$

mais $GE = 2R$; $\omega K = r$; $GA = GB = G\omega$.

Donc $$2Rr = C\omega \,.\, G\omega.$$

Par suite $$D^2 = R^2 - 2Rr \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (45)$$

Cette valeur de D est indépendante des côtés du triangle et, par suite, si l'on décrit deux cercles de rayon R et r, tels que la distance de leurs centres soit égale à $\sqrt{R^2 - 2Rr}$, tout triangle inscrit à l'un est circonscrit à l'autre.

13. Soit r' le rayon de l'un des cercles de contact; alors, en faisant quelques transformations, on arriverait à la formule $$D'^2 = R^2 + 2Rr' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (46)$$

Si l'on prend les expressions analogues pour les autres côtés, et que l'on ajoute toutes ces expressions, on trouve

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 4R^2 + 2R(r' + r'' + r''' - r) \ldots .$$

Mais on a vu (form. 10) que l'on a $r' + r'' + r''' - r = 4R$; donc

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2 \ldots . \quad (47)$$

Donc *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit aux centres des quatre cercles de contact est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

On peut voir facilement que G, milieu de l'arc AB, est le centre du cercle qui passe par les extrémités du côté AB, et par les centres ω et Ω du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit.

14. *Si un triangle est inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle, ces deux cercles ont en commun un pôle et sa polaire.*

Soit d la distance du centre O du cercle circonscrit à la polaire commune, δ la distance entre le centre du cercle inscrit et le pôle commun, et, comme précédemment D la distance entre les centres de ces deux cercles; on a, en appelant R et r les rayons des cercles

$$(D + \delta)d = R^2; \quad (d - D)\delta = r^2.$$

En éliminant δ, on trouve

$$d = \frac{(R^2 - r^2) + R(R - 2r) \pm r\sqrt{4Rr + r^2}}{D}.$$

SUR LE TRIANGLE ORTHOCENTRIQUE.

15. Le triangle *orthocentrique* a été défini le triangle formé par les pieds des hauteurs d'un triangle donné, et ces perpendiculaires se coupent en un point appelé *orthocentre*. Le cercle qui est circonscrit à ce triangle peut être appelé le cercle *orthocentrique*. Poncelet l'appelle aussi le *cercle des neuf points*, par suite d'une propriété qui sera établie plus loin.

Soient A, B, C les angles du triangle donné, a, b, c les côtés opposés, et R le rayon du cercle circonscrit. Les côtés du triangle orthocentrique sont $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$. En effet, soient A', B', C' les sommets du triangle ortho-

centrique respectivement opposés aux sommets A, B, C du triangle donné; alors, les côtés du triangle A'BC' sont $a \cos B$, $c \cos B$, et A'C'. On a donc

$$A'C'^2 = a^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 B - 2ac \cos^3 B$$

ou $$A'C'^2 = \cos^2 B(a^2 + c^2 - 2ac \cos B).$$

Mais la quantité entre parenthèses n'est autre chose que AC^2 ou b^2.

Donc $$b' = b \cos B \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

On a aussi, d'après un théorème connu : $a = 2R \sin A$.

Mais les côtés du triangle orthocentrique sont, d'après ce que nous venons de voir, $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$; de plus, si A', B', C' sont les angles de ce triangle, on a

$$A' + 2A = \pi;$$

d'où $$\sin A' = \sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

Enfin, si R' est le rayon du cercle circonscrit au triangle orthocentrique, on a

$$2R' = \frac{a \cos A}{\sin 2A} = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Donc, $R = 2R'$ (49); c'est-à-dire que le rayon du cercle circonscrit au premier triangle est double du rayon du cercle orthocentrique.

16. En général, l'aire d'un triangle est donnée par l'équation $$abc = 4R\Delta.$$

En appelant Δ' l'aire du triangle orthocentrique, dont les côtés sont $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$, on a

$$abc \cos A \cos B \cos C = 4R'\Delta'.$$

Mais $abc = 4R\Delta$, et $R = 2R'$. Donc on a

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 2 \cos A \cos B \cos C. \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

Si des perpendiculaires sont abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés de son triangle orthocentrique, elles passent par le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

Comme les hauteurs du triangle sont les bissectrices du triangle orthocentrique, les perpendiculaires abaissées de deux sommets, A et B, par exemple, du triangle donné sur les côtés du triangle orthocentrique, font des angles égaux avec le côté C. Donc ces lignes se coupent en un même point,

Si l'on [illegible] sont égales, elles se coupent au côtés, e[illegible] Ainsi, de même que, en abaissant des D² + [illegible] triangle des perpendiculaires sur les côtés Mai[illegible] termine l'orthocentre par l'intersection de ces do[illegible] de même en abaissant des mêmes sommets [illegible]diculaires sur les côtés du triangle orthocentrique, on détermine le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

17. Puisque les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre H sur les côtés du triangle primitif sont les bissectrices des angles du triangle orthocentrique, il en résulte que H est le centre du cercle inscrit au triangle orthocentrique.

Trouver la valeur du rayon ρ du cercle inscrit au triangle orthocentrique.

Soit p' le demi-périmètre du triangle orthocentrique, et Δ' sa surface. On a alors $\Delta' = p'\rho$. Mais on a (form. 48)

$$2p' = a\cos A + b\cos B + c\cos C$$

donc

$$2p' = \frac{1}{R}(aq' + bq'' + cq''') \qquad (51)$$

en appelant q', q'' et q''' les perpendiculaires abaissées du centre O sur les côtés du triangle donné;

mais

$$aq' + bq'' + cq''' = 2\Delta.$$

Donc on a

$$p'\rho = \Delta', \text{ et } \Delta = p'R \qquad (52)$$

Donc $\rho = \dfrac{R\Delta'}{\Delta}$.

Mais, d'après la formule (50), on a

$$\rho = 2R\cos A\cos B\cos C \qquad (53)$$

On a aussi

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad (54)$$

On en déduit les propositions suivantes : *La surface du triangle orthocentrique et celle du triangle donné sont proportionnelles au rayon du cercle inscrit dans le premier triangle et au rayon du cercle circonscrit au second.*

La surface d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle orthocentrique.

On obtient ainsi un nouveau théorème simple pour trouver l'expression de la surface du triangle.

18. La surface du triangle donné est la somme du triangle orthocentrique et des trois triangles formés avec les segments de ces côtés; le double de la surface de l'un de ces triangles est $bc \cos^2 A \sin A$. Donc

$$bc \cos^2 A \sin A + ca \cos^2 B \sin B + ab \cos^2 C \sin C + 2\Delta' = 2\Delta$$

ce que l'on peut écrire

$$bc \sin A + ac \sin B + ab \sin C - abc\left(\frac{\sin^3 A}{a} + \frac{\sin^3 B}{b} + \frac{\sin^3 C}{c}\right) = 2\Delta - 2\Delta'.$$

Mais $\qquad bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C = 2\Delta$

donc $4\Delta + 2\Delta' = 4R\Delta\left(\frac{\sin^3 A}{a} + \frac{\sin^3 B}{b} + \frac{\sin^3 C}{c}\right)$

et comme $R\Delta' = \Delta\rho$, on a, en multipliant par R

$$2R + \rho = 2R^2\left(\frac{\sin^3 A}{a} + \frac{\sin^3 B}{b} + \frac{\sin^3 C}{c}\right) \qquad (55)$$

19. *Déterminer une expression pour le carré de la distance entre le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre, ou une expression de* OH^2.

Si l'on prend le triangle dont les sommets sont O, H et un des sommets, A par exemple, du triangle donné, les côtés de ce triangle sont OH, R et $2R \cos A$, et l'angle en A est égal à $C - B$. Donc on a

$$OH^2 = R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 4R^2 \cos A \cos (C - B) \qquad (56)$$

Mais $A = \pi - (C + B)$; donc

$$OH^2 = R^2[1 - 4 \cos A \{ \cos (C + B) + \cos (C - B)]$$

ou $\qquad OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C); \qquad (57)$

et, en vertu de la formule (53), on a

$$OH^2 = R^2 - 4R\rho \qquad (58)$$

En appliquant la formule (50), on trouve aussi

$$OH^2 = R^2\left(1 - \frac{4\Delta'}{\Delta}\right). \qquad (59)$$

Enfin, en appliquant d'abord la formule (34), puis au résultat la formule (12), on trouve

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad (60)$$

20. *La somme des carrés des distances des sommets d'un triangle à l'orthocentre, diminuée de la distance de ce point au*

centre du cercle circonscrit, est égale à trois fois le carré du rayon.

En effet, on a $AH^2 = 4R^2 \cos^2 A$; donc

$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$.

Mais $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$ et, en vertu de l'égalité (57), on a, par soustraction

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 - OH^2 = 3R^2. \qquad (61)$$

Le rayon ρ du cercle inscrit dans le triangle orthocentrique est égal à $2R \cos A \cos B \cos C$; donc

$$OH^2 = R(R - 4\rho).$$

Ajoutant le double de cette expression à la précédente, on trouve

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 + OH^2 = 5R^2 - 8R\rho. \quad (62)$$

21. *Trouver les rayons des cercles inscrit et ex-inscrit au triangle orthocentrique.*

Nous avons vu que l'on a $\rho = 2R \cos A \cos B \cos C$ et $2 \cos A \cos B \cos C = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 R + \cos^2 C)$, on en tire $\rho = R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2)$.

Mais $$\sin^2 A = \frac{a^2}{4R^2}.$$

En substituant on trouve en posant $2P^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\rho = \frac{P^2 - 4R^2}{2R} \qquad (63)$$

De même, on a $$\rho' = \frac{bc \sin A \cos A}{a}$$

ou $\rho' = 2\Delta \dfrac{\cos A}{a}$; mais $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

Donc $$\rho' = \frac{\Delta}{4R\Delta}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{P^2 - a^2}{2R} \quad (64)$$

On a des formules analogues pour ρ'' et ρ'''.

Si l'on ajoute ces expressions, on trouve

$$\rho + \rho' + \rho'' + \rho''' = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4R^2}{2R} = \frac{P^2 - 2R^2}{R} \qquad (65)$$

Puisque l'on a

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$,

et que le rayon du cercle inscrit au triangle orthocentri-

que est égal à 2R cos A cos B cos C, comme on a aussi, en appelant q', q'', q''' les distances du centre du cercle circonscrit aux côtés, $\cos^2 A = \frac{q^2}{R^2}$, on en déduit

$$q'^2 + q''^2 + q'''^2 = R(R-\rho) \qquad (66)$$

(A suivre.)

SOMMATION DIRECTE ET ÉLÉMENTAIRE

DES CARRÉS, DES CUBES, DES QUATRIÈMES ET DES CINQUIÈMES PUISSANCES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS AINSI QUE DES n PREMIERS NOMBRES IMPAIRS,

Par Georges **Dostor.**

I. — Somme des carrés des n premiers nombres entiers.

Nous avons les identités

$$(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1,$$
$$(n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

Nous en tirons, en retranchant membre à membre,

$$(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1) = 6n.$$

Si nous multiplions les deux membres par $\frac{n}{6}$, et que nous posions, en général,

$$A_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (1)$$

nous pourrons écrire

$$n^2 = A_n - A_{n-1}, \qquad (2)$$

attendu que $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

se réduit de A_n ou de (1), en y remplaçant n par $n-1$.

Dans la formule (2), remplaçons n successivement par tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à n; nous obtenons la suite des égalités

$$1^2 = A_1,$$
$$2^2 = A_2 - A_1,$$
$$3^2 = A_3 - A_2.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1)^2 = A_{n-1} - A_{n-2},$$
$$n^2 = A_n - A_{n-1}.$$

Ajoutons membres à membres, et, dans le second membre de l'égalité résultante, supprimons les termes égaux et de signes contraires qui sont en évidence et qui s'entre-détruisent. Nous trouvons ainsi que la somme des carrés des n premiers nombres entiers est

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = A_n.$$

Si nous désignons cette somme par Σn^2 et que nous nous reportions à la notation (1), nous obtiendrons la formule

$$\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \text{(I)}$$

Corollaire I. — Représentons par Σn la somme des n premiers nombres entiers, de sorte que

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si nous divisons, par cette égalité, l'expression (I), il nous viendra

$$\frac{\Sigma n^2}{\Sigma n} = \frac{2n+1}{3} = \frac{n+(n+1)}{3}. \qquad \text{(II)}$$

Ce résultat prouve que

La somme des carrés des n *premiers nombres entiers, divisée par la somme de ces mêmes nombres, égale le tiers de la somme du dernier* n *de ces nombres et du nombre suivant* n + 1.

Corrollaire II. — Si le dernier nombre n égale un multiple de 3 plus 1, le nombre suivant $n + 1$ sera un multiple de 3 plus 2 ; par suite leur somme sera divisible par 3. Donc

La somme des carrés des n *premiers nombres entiers est divisible par la somme de ces mêmes nombres, chaque fois que le dernier nombre considéré* n *égale un multiple de* 3 *plus* 1.

Corrollaire III. — Si l'on veut avoir la somme des carrés des n nombres entiers, qui suivent le nombre n,

il suffira d'abord de remplacer n par $2n$ dans la formule (I). On aura ainsi

$$\Sigma\,(2n)^2 = \frac{2n\,(2n+1)\,(4n+1)}{6}.$$

Si de cette somme on retranche la somme des carrés des n premiers nombres entiers, ou l'expression (I), on obtiendra la somme des carrés des n nombres entiers qui viennent après le nombre n. Cette somme sera donc

$$\Sigma(2n)^2 - \Sigma n^2 = \frac{2n(2n+1)\,(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

ou bien

$$\Sigma(2n)^2 - \Sigma n^2 = \frac{n(2n+1)}{6}\,[8n+2-n-1],$$

c'est-à-dire

$$\Sigma(2n)^2 - \Sigma n^2 = \frac{n(2n+1)\,(7n+1)}{6}. \quad \text{(III)}$$

II. — Somme des carrés des n premiers nombres impairs.

Le n^{me} nombre impair étant $2n-1$, la somme des carrés $2n-1$ premiers nombres entiers s'obtiendra en remplaçant, dans la formule (I), n par $2n-1$; cette somme sera ainsi

$$\Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)\,(4n-1)}{3}.$$

Or les $n-1$ nombres pairs, qui précèdent le n^{me} nombre impair $2n-1$, sont

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ (2n-4),\ (2n-2),$$

ou $\quad 2.1,\ 2.2,\ 2.3,\ \ldots,\ 2(n-2),\ 2(n-1).$

La somme des carrés de ces $n-1$ nombres pairs sera par conséquent

$$2^2\,[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2],$$

ou, en vertu de la formule (I),

$$\frac{2^2\,(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{2n\,(n-1)\,(2n-1)}{3}.$$

La somme S_2 des carrés des n premiers nombres impairs est donc exprimée par la différence

$$S_2 = \frac{n(2n-1)(4n-1)}{3} - \frac{2n(n-1)(2n-1)}{3}$$

$$= \frac{n(2n-1)}{3}\Big[(4n-1) - 2(n-1)\Big],$$

ou par

$$S_2 = \frac{(2n-1)\,2n\,(2n+1)}{6} = \frac{n(4n^2-1)}{3}. \quad \text{(IV)}$$

III. — Somme des cubes des n premiers nombres entiers.

Il est aisé de voir que

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n;$$

multipliant par $\frac{n^2}{4}$, on obtient l'identité

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2n^2}{4} = n^3,$$

qui peut s'écrire $\qquad n^3 = B_n - B_{n-1}, \qquad (3)$

en posant $\qquad Bn = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (4)$

Dans l'égalité (3), remplaçons n successivement par tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à n; nous aurons la suite des identités

$$1^3 = B_1,$$
$$2^3 = B_2 - B_1,$$
$$3^3 = B_3 - B_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1)^3 = B_{n-1} - B_{n-2},$$
$$n^3 = B_n - B_{n-1}$$

Ajoutons membres à membres, il nous viendra, après suppression des termes égaux deux à deux et de signes contraires,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = B_n,$$

ou, en ayant égard à la notation (4),

$$\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad \text{(V)}$$

Ainsi *la somme des cubes des* n *premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces mêmes* n *premiers nombres entiers.*

Corollaire. — Élevons au carré les deux membres de la formule (I), nous aurons :

$$(\Sigma n^2)^2 = \frac{n^2 (n + 1)^2 (2n + 1)^2}{36}.$$

Divisons cette égalité membre à membre par la formule (V), nous obtiendrons la relation

$$\frac{(\Sigma n^2)^2}{\Sigma n^3} = \frac{(2n + 1)^2}{9} = \left[\frac{n + (n + 1)}{3}\right]^2. \quad \text{(VI)}$$

Elle prouve que

Le carré de la somme des carrés des n *premiers nombres entiers, divisé par la somme des cubes des mêmes nombres, égale le carré du tiers de la somme du dernier nombre* n *et du nombre suivant* n + 1.

Si le dernier nombre n est un multiple de 3 plus 1, $(\Sigma n^2)^2$ sera divisible par Σn^3.

IV. — Somme des cubes des n premiers nombres impairs.

La somme des cubes des $2n - 1$ premiers nombres entiers s'obtient en mettant $2n - 1$ à la place de n dans la formule (V), ce qui donne

$$\Sigma(2n - 1)^3 = n^2(2n - 1)^2$$

mais la somme des cubes des $n - 1$ nombres pairs, qui précèdent le nombre $2n - 1$, est

$$2^3[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n - 2)^3 + (n - 1)^3]$$

ou $$8\Sigma\,(n - 1)^3 = \frac{8(n - 1)^2 n^2}{4} = 2n^2(n - 1)^2.$$

Donc la somme S_3 des cubes des n premiers nombres impairs sera

$$S_3 = n^2(2n - 1)^2 - 2n^2(n - 1)^2 =$$
$$n^2[(4n^2 - 4n + 1) - (2n^2 - 4n + 2)],$$

ou (VII) $$S_3 = n^2(2n^2 - 1)$$

(A suivre.)

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 212.)

Des reflets dans le dessin de machines et dans le dessin d'architecture. — Dans le dessin de machines, on ne cherche pas à réaliser un effet artistique. Le lavis a surtout pour but de rendre la forme des objets; on ne fait sentir la position relative des objets que par les ombres qu'ils portent les uns sur les autres, et par les différences d'intensité des tons qui les recouvrent. Dans bien des cas, on ne trace même pas les ombres portées, et on rend chaque objet comme s'il était isolé dans l'espace. On trace donc sa ligne d'ombre propre et on fait le lavis soit par teintes fondues, soit par teintes plates, à l'aide des lignes d'égales teintes en ne tenant compte que du rayon atmosphérique principal.

En architecture, les édifices reposant sur le sol, qui est fortement éclairé, et souvent de couleur claire, les reflets atmosphériques doivent être combinés avec les reflets émanant du sol. Ces derniers sont même les plus intenses.

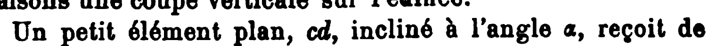
Cherchons à nous rendre compte de la direction suivant laquelle ils ont le plus d'intensité.

Cette direction combinée avec celle du rayon atmosphérique principal nous donnera celle des rayons de reflets totaux.

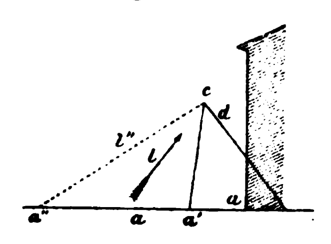
Rayon terrestre principal. — Soit en projection horizontale A un édifice rectangulaire, reposant sur un sol mat, éclairé et renvoyant de la lumière par diffusion et non par réflexion, comme pourrait le faire une nappe d'eau. Il est évident que si nous plaçons un petit élément plan vertical *cd*, dans une position inclinée sur la face *mn* de l'édifice, il ne recevra de reflets que des points du sol situés dans

l'angle *pcq* et sera d'autant moins éclairé qu'il sera plus loin d'être parallèle à la face *mn*. On peut donc dire que le rayon terrestre principal doit être dans un plan vertical, *xy*, perpendiculaire sur la face *mn* de l'édifice.

Quel angle, avec le plan horizontal, fait-il dans ce plan? — Pour nous en rendre compte, faisons une coupe verticale sur l'édifice.



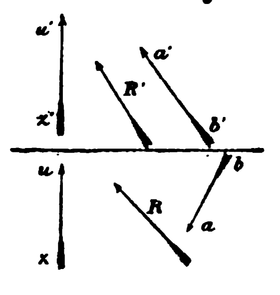
Un petit élément plan, *cd*, incliné à l'angle *a*, reçoit de la lumière d'une infinité de points, tels que *a'*, *a*, *a''* situés à des distances *l'*, *l*, *l''*, lui envoyant de la lumière dont l'intensité varie avec l'angle d'incidence. En combinant tous ces effets, il est facile de reconnaître :



1° Que l'élément *cd* sera plus éclairé quand il sera près du sol que quand il en sera loin ;

2° Qu'il sera éclairé au maximum quand il fera avec le sol un certain angle α que le calcul pourrait déterminer. Le rayon de reflet maximum dû au sol, sera pris normal au plan *cd*, dans la position précédente, répondant à cet angle *a* d'éclairement maximum.

Combinaison des reflets du sol et des rayons atmosphériques. — Rayon aéro-terrestre principal. — Combinons les reflets du sol représentés par le rayon terrestre *zu-z'u'*, situé dans un plan de profil *zu* et dirigé de bas en haut, avec le rayon atmosphérique principal représenté par *ba-b'a'* (dans l'hypothèse du rayon à 45°). Le premier est plus intense que le



second, et on pourra les réunir en un seul RR′ que nous nommerons le rayon aéro-terrestre principal; on le prend ordinairement en architecture dirigé suivant la diagonale d'un cube, mais non plus directement opposé aux rayons solaires. On prend les reflets inclinés à 45°, dirigés de droite à gauche, de bas en haut et d'arrière en avant. Les projections d'un de ces rayons seraient les droites R et R′.

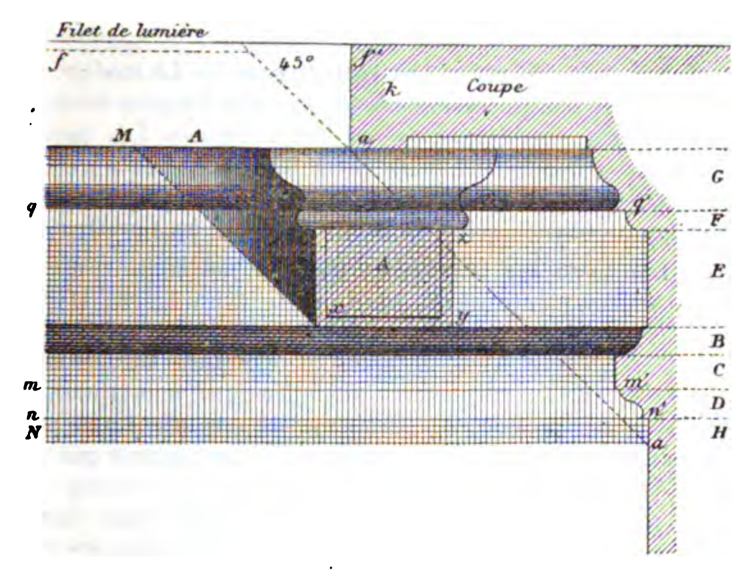
Remarque. — Il est bien entendu que ce rayon aéro-terrestre n'est que conventionnel. C'est un rayon qui, pris seul, éclairerait les ombres à peu près comme le font tous les rayons de reflets qui viennent dans toutes les directions, avec des intensités variables. Il faudra bien se garder de lui donner des propriétés ombrantes (Voir plus loin § C, Contre-ombres).

Conséquences. — (*a*) Dans un dessin d'architecture représentant la façade ou la coupe d'un édifice, toutes les ombres doivent être plus claires en bas de l'édifice qu'en haut, comme étant plus près de la source des reflets.

(*b*) Les moulures qui dans l'ombre sont tournées du côté du sol doivent être moins noires que celles qui sont tournées du côté du ciel. Plus généralement, le point le plus clair d'une moulure placée dans l'ombre est celui pour lequel le rayon aéro-terrestre lui est normal.

Contre-ombres. — (*c*) Les reflets du sol sont quelquefois assez intenses pour produire des ombres dans les ombres. On nomme ces dernières des contre-ombres. On ne les trace que dans les ombres portées, en les supposant produites par le rayon aéro-terrestre principal, tel que nous l'avons défini. Seulement, il ne convient pas de donner à ces contre-ombres des contours aussi définis qu'aux ombres directes, ni de les prolonger aussi loin. En effet, les reflets qui viennent de tous les points du sol produisent des pénombres très-considérables qui font que les contre-ombres disparaissent à très-petite distance des objets qui les portent et que leurs contours s'estompent très-rapidement. On fait ordinairement les contre-ombres à l'aide de teintes très-rapidement adoucies ou fondues.

Application. — Soit à faire le lavis de la portion de corniche indiquée sur le croquis ci-après. Un larmier K est soutenu par un talon G accompagné d'une banquette F. — Un bandeau C est surmonté d'un cavet renversé B et



soutenu par un talon D. Enfin, une console A est placée sous le larmier. Le tout est dans l'ombre N*a*, portée par le larmier sur la frise; on opérera comme il suit :

1° On commence par passer une teinte générale donnant le ton de pierre, et composée, si cette dernière est jaune, d'ocre jaune et de terre de Sienne brûlée. On la dégrade de haut en bas, on la tient donc plus intense à la partie supérieure qu'à la partie inférieure. On a soin de ménager en blanc les filets de lumière sur les arêtes éclairées telles que *ff'*. Ces filets se trouvent en haut et à gauche.

2° **On passe ensuite la teinte d'ébauche.** — Elle est composée d'encre de Chine soit pure soit un peu violacée par de la laque carminée, et une pointe de bleu de cobalt. Cette teinte est placée sur tout ce qui est occupé par les ombres propres ou portées. On doit la passer d'un seul coup

et sans faire de réserves. Cette teinte assez peu intense doit posséder le ton que l'on veut attribuer dans les ombres aux parties les plus en reflet. Ces parties sont le dessous des talons G ou D ou bien encore la partie inférieure de la baguette F. Cette teinte d'ébauche est dégradée de haut en bas.

3° **On fait tourner les moulures**. — Le modèle des moulures se rendra soit à teintes plates soit à teintes fondues, mais en les considérant comme corps dépolis. Les parties les plus noires sont celles pour lesquelles les normales seraient dirigées vers le ciel et non vers le sol. Dans les dessins à petite échelle on fait ces teintes au tire-ligne.

4° **On lave les surfaces planes**. — Nous trouvons des surfaces planes en E, en H, en C et en A, sur la face antérieure de la console. On est fixé sur l'intensité de la teinte qui répond à ces surfaces en regardant sur les moulures contiguës dont le lavis est fait et qui sont situées au même plan qu'elles, les éléments de ces moulures pour lesquelles le plan tangent est parallèle aux plans que l'on veut laver. On placera donc sur ces plans les teintes voulues pour qu'il y ait concordance d'intensité. Ces teintes sont placées en *réserve*, c'est-à-dire en ménageant les *filets de reflets* sur les arêtes qui regardent le rayon *aéro-terrestre*.

Nous trouvons ces filets en *nn'*, *mm'*, *qq'* et sur la console *xy* et *yz*, c'est-à-dire en bas et à droite sur la face A de la console qui est en avancement sur le plan E, on passera une teinte légère qui la rendra plus noire et la fera avancer.

5° **On fait les contre-ombres**. — On passera une teinte de contre-ombre sur le cavet qui regarde le ciel et échappe aux rayons de reflets.

Cette teinte sera modelée si le cavet est grand, elle sera plate si le cavet est de petite dimension.

Nous aurons également la contre-ombre portée par la console A. Nous la tiendrons assez noire aux environs de cette console et nous la dégraderons rapidement de bas en haut et de droite à gauche.

6° **Les retouches**. — Le lavis général une fois fini, il

est utile pour augmenter l'effet produit de revenir avec de la teinte de couleur ou avec de la teinte d'ombre sur certaines parties soit pour les faire tourner, soit pour les faire avancer ou reculer. On fait avancer les parties en lumière, en y plaçant quelques tons plus chauds, c'est-à-dire plus jaunes, ou plus rouges, et les parties dans l'ombre en forçant et même en colorant au bistre les teintes d'ombre. On fait reculer les plans en y passant des teintes bleuâtres, ou neutres très-légères.

On fait également avancer une partie de l'édifice, en la *faisant* davantage, c'est-à-dire en y plaçant plus de détails et rendant avec plus de recherche l'effet de ces détails, on la fait reculer en la laissant dans le vague, et comme dessin et comme lavis.

QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(1878).

Algèbre.

— Démontrer que l'inégalité

$$3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2$$

a lieu pour toutes les valeurs de a.

— Résoudre $$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} > 1.$$

— Résoudre $$\sqrt[3]{A + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{x}} = B.$$

— Résoudre $$x + y = a;\quad x^4 + y^4 = b^4.$$

— Trouver la somme

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Limite de A_n pour $n = \infty$.

— Résoudre l'inégalité

$$\frac{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x} - 2)}{x^2 + 4x + 3} > 0.$$

— Volume maximum du cône de révolution dont la surface est constante.

— Calculer la somme

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Géométrie.

— La hauteur d'un triangle rectangle inscrit dans une parabole et dont l'hypoténuse est perpendiculaire à l'axe de cette courbe est constante et égale à $2p$.

— Construire $$x = \sqrt[4]{\frac{1}{b}}.$$

— On donne trois droites a, b et u; cette dernière est prise pour unité : construire $$x = \frac{a - b^3}{1 + ab}.$$

— Conditions pour que les hauteurs d'un tétraèdre se coupent au même point.

— Lieu des points également éloignés de trois droites qui se coupent au même point.

— Dans un trièdre, les plans qui passent par une arête et la bissectrice de la face opposée se coupent suivant une même droite.

— Dans un trièdre, les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

— Par le centre de similitude de deux cercles, on mène une sécante qui coupe le premier au point A, le second au point B; les tangentes en ces points se coupent en un point dont on demande le lieu géométrique.

— Construire un triangle connaissant les trois médianes.

— Dans une ellipse, une tangente mobile TT′ rencontre en T et T′ les tangentes aux extrémités du grand axe. — Démontrer que $AT \times AT'$ est constante.

Trigonométrie.

Un arc a pour sinus $\frac{1}{2}$, un autre $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ calculer le sinus de la somme.

— Démontrer les formules :
$$2\,S = R\,(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$
$$8\,S^2 = abc\,(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$
dans lesquelles les lettres ont les significations ordinaires.

— Calculer la somme
$$\sin^2 a + \sin^2 (a + h) + \sin^2 (a + 2\,h) + \ldots + \sin^2 (a + nh).$$

— Vérifier la formule
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x;$$
en déduire une formule donnant la somme
$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

— Résoudre un triangle connaissant le périmètre et la hauteur.

— Dans un triangle on a :
$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C.$$
Quelle particularité présente le triangle?

— Dans un triangle on a :
$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$
Quelle particularité présente le triangle?

— Résoudre l'équation : $\frac{\sin x}{\sin(\theta - x)} = m$.

— Trouver la somme

$$\cos^2 a + \cos^2(a+h) + \ldots + \cos^2(a+nh).$$

— Vraie valeur de $x \cot x$ pour $x = 0$.

— Résoudre un triangle connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit.

— Vraie valeur pour $x = 45°$ de

$$\frac{\cos(45 + x)}{1 - \operatorname{tg} x}$$

— Une fonction rationnelle de $\sin \varphi$ et de $\cos \varphi$ peut toujours se mettre sous la forme $P + Q \cos \varphi$

P et Q étant des fonctions rationnelles de $\sin \varphi$. Démontrer que cette décomposition n'est possible que d'une seule façon.

— Calculer $\operatorname{tg} \frac{1}{4} a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Thual**, du Lycée de Lorient.

Transformation d'un radical double en une somme de deux radicaux simples.

Résolvons le système

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Ajoutons et retranchons successivement ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}}{2} = \sqrt{x}$$
$$\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}}}{2} = \sqrt{y}$$

Élevons les deux membres de ces deux égalités au carré, il vient :

$$\frac{2a + 2\sqrt{a^2 - b}}{4} = x \qquad \text{ou } x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

$$\frac{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}{4} = y \qquad \text{ou } y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

Pour que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient rationnels, il faut et il suffit, comme on sait, que $a^2 - b$ soit carré parfait, alors

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1879

Arithmétique et Géométrie.

1. La surface d'un cercle $\pi r^2 = 400$ mètres carrés. Démontrer que pour obtenir r à un décimètre près, il suffit de remplacer π par 3,1, valeur qui n'est pas inférieure de $\frac{1}{20}$ à la vraie valeur 3,1415... En effet, l'inégalité $r - r' = 20\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi'}}\right) < \frac{1}{10}$ est satisfaite si l'on prend $\pi' - \pi < \frac{1}{20}$. On trouvera $r = 11{,}3$ par défaut et l'on vérifiera que $3{,}1 \times (11{,}3)^2$ diffère peu de 400.

Nota. — *Nous avons copié cet énoncé tel qu'il a été donné aux élèves, tout en étant fort surpris de voir que, dans une composition à une école, on donne aux candidats la solution en même temps que l'énoncé. — Nous ferons remarquer aussi que π' étant inférieur à π, et par suite r' étant supérieur à r, il faudrait partout changer les signes.*

2. D'un point P, on mène une tangente à un cercle de rayon r, et on joint le point de contact M aux extrémités du diamètre parallèle à la tangente. Démontrer qu'on obtient ainsi deux cordes égales, équidistantes du point P, et que le cercle décrit du point P comme centre, avec le rayon $R = \frac{PM}{\sqrt{2}}$, est tangent à ces deux cordes. Si le point P est placé de manière que $R = 2r$, les deux cercles sont tangents.

Géométrie descriptive.

Un point A est situé dans la partie antérieure du plan horizontal, à $0^m{,}05$ de la ligne de terre. Un second point B, placé dans le premier dièdre à la droite du point A, est distant de $0^m{,}02$ du plan horizontal, de $0^m{,}03$ du plan vertical, et de $0^m{,}04$ du point A. On demande de construire les projections du cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne BA, dont le centre est au point B, et qui a $0^m{,}03$ de rayon.

Algèbre.

— Etant donnée l'équation du second degré

$$Ay^2 + Bxy + \frac{B^2 - \delta^2}{4A} x^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

la résoudre par rapport à y, et déterminer ensuite :

1° La limite c du rapport $\frac{y}{x}$ quand x augmente indéfiniment;

2° La limite de la différence $y - cx$ pour cette même valeur infinie de x.

Trigonométrie.

— On donne dans un triangle

$$a = 2597^m,845$$
$$b = 3084^m,327$$
$$c = 2136^m,737$$

Déterminer les trois angles et la surface.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

COMPOSITIONS DONNÉES EN 1878 AUX CANDIDATS QUI, EMPÊCHÉS A L'ÉPOQUE ORDINAIRE, N'ONT PU PRENDRE PART AUX COMPOSITIONS.

Mathématiques.

1. — Calculer les angles compris entre 0 et 180° satisfaisant à l'équation

$$5 \sin^2 x + 3 \sin x - 3 = 0.$$

2. — On donne l'angle O et le point A sur l'un des côtés, et l'on demande de trouver sur l'autre côté un point M tel que la distance AM soit moyenne proportionnelle entre OA et OM. Discussion sommaire.

3. — On donne le triangle BAC rectangle en A et l'on demande de déterminer sur BC un point M tel que, si l'on mène MN et MP respectivement perpendiculaires à AC et AB, et qu'on fasse tourner la figure autour de BC, le volume engendré par le rectangle ainsi formé soit égal à la somme des volumes engendrés par les triangles BMP et CMN.

Épure.

On donne deux sphères O et O′ tangentes l'une et l'autre aux deux plans de projection dans le premier dièdre. La sphère O a un rayon R = 45 millimètres, la sphère O′ un rayon R′ = 32 millimètres; la distance des centres OO′ = 60 millimètres. Ceci posé, on demande :

1° De construire les projections des deux sphères;

2° De construire les projections de la courbe intersection des deux solides;

3° De mener un plan tangent commun aux deux sphères coupant la verticale du centre de la sphère O à 50 millimètres au-dessous du plan horizontal de projection.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR 1879

— Étant donné un demi-cercle AB, mener par le point A une corde AM telle que, si par le point M on mène une tangente qui coupe le diamètre prolongé en C, on ait AM = MC.

— Dans un triangle équilatéral, on prend le milieu P de AB, et on propose de trouver sur BC un point M tel que, en menant la droite PM et abaissant MK perpendiculaire sur AC, on ait PM = MK.

— Dans un triangle, le point de concours des hauteurs est au quart de la hauteur AH, à partir de la base. Trouver une relation entre les angles B et C.

— On donne un triangle ABC rectangle en A; mener par le point A une droite AX, extérieure au triangle, et telle que, en abaissant les perpendiculaires BB′, CC′ sur AX, la somme des triangles ABB′, ACC′ soit égale à une surface donnée K^2. — Examiner le cas où cette surface est celle du triangle ABC.

— Dans un triangle, on connaît b et c, et l'on sait que $\cos B + \cos C = 1$. On demande de calculer a.

— On donne deux parallèles, un point P sur l'une d'elles, et un point Q en dehors. Par le point Q, on demande de mener une droite QNM rencontrant la parallèle PN en N et l'autre en M, de telle manière que MN = PN.

— On donne un cercle et un point P extérieur au cercle. On demande de trouver sur la circonférence un point M tel que, en joignant les points M, O, P, l'angle en O soit double de l'angle en P.

— On donne deux droites parallèles XY et AB : sur la seconde, on prend les points A, B, C, tels que 2AB = BC. Trouver sur XY un point D d'où l'on voie les segments AB et BC sous le même angle.

— Vraie valeur, pour $a = b$, de l'expression

$$\frac{a^m - b^m}{a^n - b^n}$$

— Rapport des volumes d'un trapèze qui tourne successivement autour de ses deux bases.

— On donne deux droites parallèles AB, CD, et leur plus courte distance BD. Sur le prolongement de cette plus courte distance, on prend un point P, et on demande de mener par le point P une sécante PMN rencontrant CD en N et AB en M, de telle manière que MN soit la moyenne arithmétique des lignes BM et DN.

— Maximum de $\sin x + \sqrt{3} \cos x$.

— Construire un triangle connaissant deux côtés et la bissectrice.

— Inscrire dans un demi-cercle un rectangle de périmètre donné.

— Dans un triangle on donne A, et l'on sait que la médiane AM est égale au produit des deux côtés b et c. Trouver les angles du triangle.

— Maximum de $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$, quand x varie de 0 à 90°.

— Par le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, mener deux droites également inclinées sur l'hypoténuse, et telles que leur produit soit égal à la surface du triangle.

— On donne le triangle ABC, et le point O, milieu de BC. On demande de mener la parallèle ED à BC, de façon que, en joignant le point O au point D, le trapèze BEDO ait une surface donnée.

— Dans un demi-cercle, on propose de mener AC de telle manière que, en menant le rayon OC, et la droite CD faisant avec OC un angle égal à ACO, et rencontrant le diamètre AB en D, on ait $CD = l$.

— Valeurs qu'il faut attribuer à m et n pour que le trinôme $x^3 + mx + n$ soit divisible par $(x - a)(x - b)$.

— Dans un secteur on donne l'angle au sommet, et les longueurs des cordes de deux arcs dans lesquels on partage l'arc du secteur. Trouver le rayon.

— Minimum de $\sin^2 x + a \cos x$.

— On donne le secteur OAB. On demande de mener une droite perpendiculaire au rayon OA, rencontrant ce rayon en K, l'arc en M et le rayon OB prolongé en N, de façon que le produit

$$KM \cdot MN$$

soit maximum.

— Dans un trapèze on demande de prendre E sur le côté BC, de telle manière que, en menant la droite AE qui rencontre la base CD prolongée en F, le triangle AEB soit le tiers du triangle ECF.

— Résoudre $\sin^2 x + \sin^2 2x = a$.

— Dans un triangle on donne les trois angles; on mène la bissectrice et la médiane, et on demande de calculer l'angle de ces deux droites.

— Résoudre $\mathrm{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = m$.

— On a deux nombres différents terminés par 5; trouver la condition pour que leur produit soit terminé par 25.

— Résoudre

$$\cos x + \cos y = 1.$$

$$\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = m.$$

(*A suivre.*)

CONCOURS ACADÉMIQUES 1879

ACADÉMIE DE CLERMONT

Mathématiques élémentaires.

— Par un point fixe O d'une circonférence de rayon donné R, on mène deux cordes OA et OB dont la première est fixe et la seconde mobile. Étudier comment varie la longueur de la diagonale issue de O du parallélogramme construit sur OA et OB. Trouver les valeurs maxima et minima de cette diagonale ainsi que les positions correspondantes de OB.

ACADÉMIE DE POITIERS

Enseignement spécial.

— Une lame BAC, rectangle en A, repose en équilibre par les côtés de l'angle droit, sur deux disques fixes de même épaisseur que la lame, placés avec elle dans le même plan vertical, et ayant leurs centres O et O' sur

une même horizontale. Si l'on suppose que, dans cette position d'équilibre, la verticale du centre de gravité de la surface ABC passe par le sommet de l'angle droit A et de plus que ce sommet est sur la ligne des centres, on demande d'exprimer au moyen des côtés a et b du triangle : 1° le rapport des rayons R et R′ des disques; 2° le rapport des segments AO, AO′ de la ligne des centres; 3° le rapport des charges supportées par les deux disques.

Si l'on a $b = 0,60$; $c = 0,80$; $R = 0,27$, épaisseur 0,05; densité $= 7$, on calculera le poids de la lame, la distance MN des points de contact, et on construira exactement la figure relative à ces données à l'échelle de 1/10.

ACADÉMIE DE LYON

Mathématiques spéciales.

On considère les coniques tangentes à deux droites rectangulaires OA, OB en deux points variables, et à une troisième droite AB en un point C. On demande 1° le lieu géométrique du point de contact des tangentes à ces coniques menées par un point donné P. Construire ce lieu dans le cas où le point P se trouve au sommet du rectangle construit sur OA, OB; 2° quel est le lieu des foyers de ces coniques? Construire le lieu dans le cas particulier où C est au milieu de AB, et examiner ce que devient ce lieu lorsque C étant au milieu de AB, on a OA = OB.

Mathématiques élémentaires.

On donne une circonférence O′ dont le centre est situé sur une circonférence O donnée. On mène une corde quelconque OB, et on joint l'extrémité A du diamètre O′OA au point B. On joint ensuite le point A à l'un des points d'intersection C des deux cercles; on détermine ainsi le point E, intersection de AC et de O′B, et par ce point E on mène une tangente EG au cercle O.

1° Lieu géométrique du point M, intersection de cette tangente avec AB;

2° Démontrer que la droite BC passe par le second point D d'intersection des deux circonférences.

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 13444-9.

THÉORIE DES CENTRES

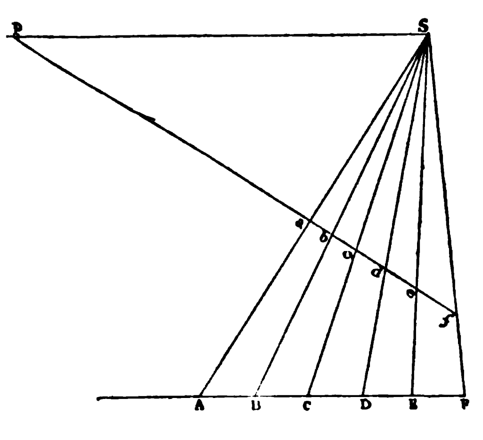
DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. Kœhler.

(*Suite*, voir page 225.)

Progression ou échelle harmonique.

4. Soit AF une droite divisée en parties égales aux points B, C, D, E; menons par un point S une parallèle à AF et coupons le faisceau S (p, A, B,... F) par une transversale quelconque $pabcdef$. Chacun des points de division à partir du second est conjugué harmonique de p par rapport au précédent et au suivant.



On a donc

$$\frac{2}{pb} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pc}, \quad \frac{1}{2pc} = \frac{1}{pb} + \frac{1}{pd}, \quad \frac{1}{pd} = \frac{1}{pc} + \frac{1}{pe},$$

etc.... ou bien

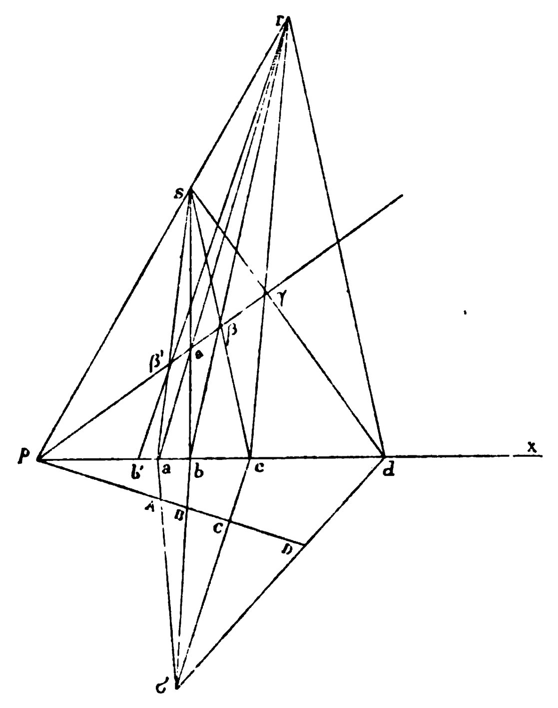
$$\frac{1}{pa} - \frac{1}{pb} = \frac{1}{pb} - \frac{1}{pc} = \frac{1}{pc} - \frac{1}{pd} = \frac{1}{pd} - \frac{1}{pe} = \dots$$

Les inverses des segments comptés à partir de p forment ainsi une progression arithmétique la division marquée par le faisceau sur la transversale est une *progression* ou *échelle harmonique* par rapport au point p.

Construction d'une échelle harmonique.

On donne une droite pX, et il s'agit de construire sur cette droite une échelle harmonique par rapport au point p, échelle

dont *ab* soit le premier segment. Je mène par le point *p* deux droites arbitraires je prends sur l'une d'elles un point α; je joins α*a*, α*b* qui coupent la seconde droite en *r* et *s*. Je joins *rb*, puis *s*β qui donne le troisième point *c* de l'échelle; de même *rc* donne le point γ, et *s*γ le quatrième point *d*. Ainsi



de suite. On voit en effet, en considérant le quadrilatère *sbcr*, que la transversale *p*αβγ passe par le point de concours β des diagonales; donc β est conjugué de *p* par rapport à α et γ. Donc le faisceau *r*(*p*, *a*, *b*, *c*) est harmonique.

On peut prolonger l'échelle vers la gauche en joignant S*b*, puis *r*β' qui donne le point *b'*, etc...

Pour diviser une longueur donnée AD en un nombre donné de parties formant une échelle harmonique par rapport au point *p*, on déterminera d'abord sur une droite *p*X une échelle arbitraire comme tout à l'heure; puis si

l'on veut partager AD en trois parties par exemple, on joindra Aa, Dd qui se coupent en σ; les rayons σb, σc couperont AD aux points cherchés b, c.

La construction que nous venons de donner d'après Poncelet s'applique en perspective. Le problème général de la perspective consiste à représenter l'intersection par un plan, appelé plan du tableau, de tous les rayons menés de l'œil aux points d'une figure donnée. Les relations géométriques entre les parties de cette figure se transforment sur sa perspective, et la connaissance de ces transformations permet souvent de simplifier les constructions. Supposons qu'on veuille faire sur un plan la perspective d'une droite AF divisée en parties égales, l'œil étant en S; on devra mener le plan SAF, chercher son intersection avec le plan donné et marquer sur la droite ainsi obtenue $pab...f$ (fig. 3) les traces des rayons SA, SB...; on aura évidemment une échelle harmonique par rapport au point p où le plan du tableau est rencontré par la parallèle à la droite donnée; ce point p, perspective du point à l'infini sur cette droite, est appelé *point de fuite*.

Centre des moyennes harmoniques d'un système de points en ligne droite.

5. Le centre des moyennes distances de n points en ligne droite a, b, c... (rapportés à une origine quelconque o) est un point q tel que l'on a $oq = \dfrac{oa + ob + oc + \ldots}{n}$.

Sa position est indépendante de l'origine; car si l'on prend une autre origine o', on aura

$$o'q - oo' = \frac{o'a + o'b + o'c + \ldots - n \cdot oo'}{n}$$

et, le terme $-oo'$ disparaissant des deux membres, il reste

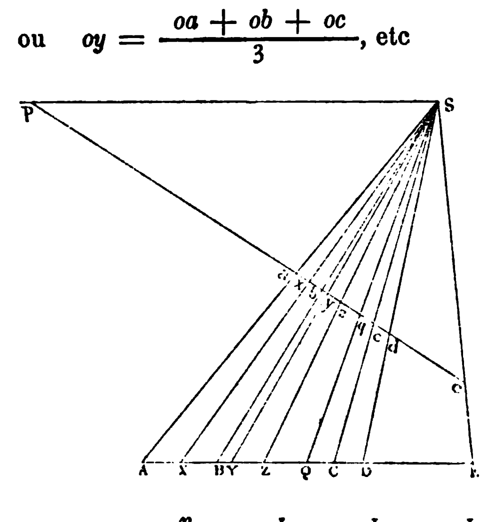
$$o'q = \frac{o'a + o'b + o'c + \ldots}{n}.$$

Pour construire le centre des moyennes distances, on prendra d'abord le milieu x de ab, puis le point y au tiers de la distance xc, le point z au quart de la distance yd, et ainsi de suite.

En effet, on a $ox = \dfrac{oa + ob}{2}$,

puis $oy = ox + \dfrac{oc - ox}{3} = \dfrac{2}{3}\, ox + \dfrac{oc}{3}$

ou $oy = \dfrac{oa + ob + oc}{3}$, etc

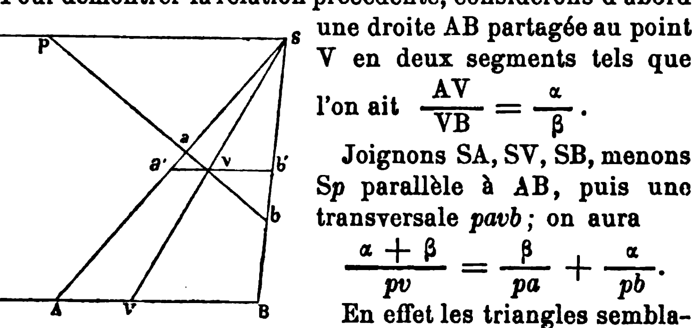


Théorème. — *Si l'on joint un point* S *aux* n *points* A, B, C... *et à leur centre des moyennes distances* Q, *et si l'on mène* Sp *parallèle à la droite* ABC..., *une transversale quelconque coupe le faisceau* S (A, B, C... Q) *en* p, a, b, c...q *et l'on a toujours la relation*

$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \ldots$$

q est le *centre des moyennes harmoniques* de p par rapport aux n points $a, b, c\ldots$ et Sq est l'*axe des moyennes harmoniques* du rayon Sp par rapport aux rayons Sa, Sb...

Pour démontrer la relation précédente, considérons d'abord une droite AB partagée au point V en deux segments tels que l'on ait $\dfrac{AV}{VB} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.



Joignons SA, SV, SB, menons Sp parallèle à AB, puis une transversale *pavb*; on aura

$$\frac{\alpha + \beta}{pv} = \frac{\beta}{pa} + \frac{\alpha}{pb}.$$

En effet les triangles semblables déterminés par la parallèle $a'vb'$ à AB donnent

$$\frac{av}{pa} = \frac{a'v}{ps}$$

et $$\frac{vb}{pb} = \frac{vb'}{ps} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\,a'v}{ps}.$$

On conclut de là $\frac{av}{pa} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{vb}{pb}$

ou bien $$\beta\,\frac{va}{pa} + \alpha\,\frac{vb}{pb} = 0$$

Cette égalité devient, en prenant le point p pour origine des quatre segments

$$\frac{\beta(pa - pv)}{pa} + \frac{\alpha(pb - pv)}{pb} = 0$$

ou bien $$\frac{\alpha + \beta}{pv} = \frac{\beta}{pa} + \frac{\alpha}{pb} \qquad (4)$$

L'équation fondamentale du rapport harmonique est un cas particulier de celle-ci ; il suffit de faire $\alpha = \beta = 1$.

Si AV est la m^e partie de AB, on a

$$\frac{m}{pv} = \frac{m - 1}{pa} + \frac{1}{pb}.$$

Cela posé, je reviens à la figure 5 et je considère les points x, y, z... q où la transversale coupe les rayons SX, SY, SZ... SQ menés aux points qui servent à construire de proche en proche le centre des moyennes distances Q de A, B, C...

On aura successivement

$$\frac{2}{px} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb},$$

puis $$\frac{3}{py} = \frac{2}{px} + \frac{1}{pc},$$

(puisque $XV = \frac{1}{3}$ XC),

ou bien $$\frac{3}{py} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc},$$

$$\frac{4}{pz} = \frac{3}{py} + \frac{1}{pd} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd}, \text{ etc.}$$

et enfin $$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \ldots \qquad (5)$$

On peut énoncer le théorème réciproque : *Étant donné sur une transversale nn point* q *tel que l'on ait*

$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \dots,$$

si on forme le faisceau S (p, a, b, ... q) *et si on le coupe par une parallèle à* Sp, *la droite* Sq *passera par le centre des moyennes distances des points* A, B, C ... Mais cela n'a lieu que pour une parallèle à S*p*, et non pour une parallèle à un rayon quelconque, comme dans le cas du faisceau harmonique de quatre rayons.

Transformation de la relation (5).

Cette relation qui est projective, d'après ce qui précède, peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{pa} - \frac{1}{pq}\right) + \left(\frac{1}{pb} - \frac{1}{pq}\right) + \left(\frac{1}{pc} - \frac{1}{pq}\right) + \dots = 0,$$

ou bien

$$\frac{pq - pa}{pa \cdot pq} + \frac{pq - pb}{pb \cdot pq} + \frac{pq - pc}{pc \cdot pq} + \dots = 0,$$

et, en multipliant par pq et changeant tous les signes

$$\frac{qa}{pa} + \frac{qb}{pb} + \frac{qc}{pc} + \dots = 0 \qquad (6)$$

Cette forme se prête à une autre démonstration de la propriété projective du centre des moyennes harmoniques. Il s'agit de faire voir que si l'on coupe le faisceau S (p, a, b, . . . q) par une autre transversale $p'a'b'$... o aura encore $\frac{q'a'}{p'a'} + \frac{q'b'}{p'b'} + \dots = 0.$

On a $\frac{qa}{Sa} = \frac{\sin qSa}{\sin aqS}$, $\frac{q'a'}{Sa'} = \frac{\sin q'Sa'}{\sin a'q'S}$,

et en divisant, $\frac{qa}{Sa} : \frac{q'a'}{Sa'} = \frac{\sin a'q'S}{\sin aqS}$.

De même $\frac{pa}{Sa} : \frac{p'a'}{Sa'} = \frac{\sin a'p'S}{\sin apS}$,

et par suite $\frac{qa}{pa} : \frac{q'a'}{p'a'} = \frac{\sin a'q'S}{\sin aqS} : \frac{\sin a'p'S}{\sin apS}$.

Le second membre de cette égalité reste invariable quand

on remplace les points a, a' par b, b', par c, c', etc. Car, en abaissant les perpendiculaires Sh, Sh' sur les deux transversales, on a $\sin a'q'S = \frac{Sh'}{Sq}$, $\sin aqS = \frac{Sh}{Sq}$, etc., et le quotient des rapports des sinus devient

$$\frac{Sh' \, . \, Sq}{Sh \, . \, Sq'} : \frac{Sh' \, . \, Sp}{Sh \, . \, Sp'} = \frac{Sq \, . \, Sp'}{Sq' \, . \, Sp} = \text{const} = \lambda.$$

On a donc

$$\frac{qa}{pa} = \lambda \frac{q'a'}{p'a'}, \quad \frac{qb}{pb} = \lambda \frac{q'b'}{p'b'}, \text{ etc.}$$

Si la somme des premiers rapports est nulle, il en est de même de la somme des seconds, *c. q. f. d.*

(A suivre.)

SOMMATION DIRECTE ET ÉLÉMENTAIRE

DES CARRÉS, DES CUBES, DES QUATRIÈMES ET DES CINQUIÈMES PUISSANCES DES *n* PREMIERS NOMBRES ENTIERS AINSI QUE DES *n* PREMIERS NOMBRES IMPAIRS

Par **Georges Dostor**.

(*Suite*, voir page 239.)

V. — Somme des quatrièmes puissances des *n* premiers nombres entiers.

Puisque $n(n+1)(2n+1) = 2n^3 + 3n + 1$,

nous avons

$$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n.$$

Posons

$$(5) \quad C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\frac{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}{4} = y \qquad \text{ou } y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

Pour que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient rationnels, il faut et il suffit, comme on sait, que $a^2 - b$ soit carré parfait, alors

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1879

Arithmétique et Géométrie.

1. La surface d'un cercle $\pi r^2 = 400$ mètres carrés. Démontrer que pour obtenir r à un décimètre près, il suffit de remplacer π par 3,1, valeur qui n'est pas inférieure de $\frac{1}{20}$ à la vraie valeur 3,1415... En effet, l'inégalité $r - r' = 20\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi'}}\right) < \frac{1}{10}$ est satisfaite si l'on prend $\pi' - \pi < \frac{1}{20}$. On trouvera $r = 11,3$ par défaut et l'on vérifiera que $3,1 \times (11,3)^2$ diffère peu de 400.

Nota. — *Nous avons copié cet énoncé tel qu'il a été donné aux élèves, tout en étant fort surpris de voir que, dans une composition à une école, on donne aux candidats la solution en même temps que l'énoncé. — Nous ferons remarquer aussi que π' étant inférieur à π, et par suite r' étant supérieur à r, il faudrait partout changer les signes.*

2. D'un point P, on mène une tangente à un cercle de rayon r, et on joint le point de contact M aux extrémités du diamètre parallèle à la tangente. Démontrer qu'on obtient ainsi deux cordes égales, équidistantes du point P, et que le cercle décrit du point P comme centre, avec le rayon $R = \frac{PM}{\sqrt{2}}$, est tangent à ces deux cordes. Si le point P est placé de manière que $R = 2r$, les deux cercles sont tangents.

Géométrie descriptive.

Un point A est situé dans la partie antérieure du plan horizontal, à $0^m,05$ de la ligne de terre. Un second point B, placé dans le premier dièdre à la droite du point A, est distant de $0^m,02$ du plan horizontal, de $0^m,03$ du plan vertical, et de $0^m,04$ du point A. On demande de construire les projections du cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne BA, dont le centre est au point B, et qui a $0^m,03$ de rayon.

Algèbre.

— Etant donnée l'équation du second degré

$$Ay^2 + Bxy + \frac{B^2 - \delta^2}{4A} x^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

la résoudre par rapport à y, et déterminer ensuite :

1° La limite c du rapport $\frac{y}{x}$ quand x augmente indéfiniment;

2° La limite de la différence $y - cx$ pour cette même valeur infinie de x.

Trigonométrie.

— On donne dans un triangle

$$a = 2597^m,845$$
$$b = 3084^m,327$$
$$c = 2136^m,737$$

Déterminer les trois angles et la surface.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

COMPOSITIONS DONNÉES EN 1878 AUX CANDIDATS QUI, EMPÊCHÉS A L'ÉPOQUE ORDINAIRE, N'ONT PU PRENDRE PART AUX COMPOSITIONS.

Mathématiques.

1. — Calculer les angles compris entre 0 et 180° satisfaisant à l'équation

$$5 \sin^2 x + 3 \sin x - 3 = 0.$$

2. — On donne l'angle O et le point A sur l'un des côtés, et l'on demande de trouver sur l'autre côté un point M tel que la distance AM soit moyenne proportionnelle entre OA et OM. Discussion sommaire.

3. — On donne le triangle BAC rectangle en A et l'on demande de déterminer sur BC un point M tel que, si l'on mène MN et MP respectivement perpendiculaires à AC et AB, et qu'on fasse tourner la figure autour de BC, le volume engendré par le rectangle ainsi formé soit égal à la somme des volumes engendrés par les triangles BMP et CMN.

Épure.

On donne deux sphères O et O' tangentes l'une et l'autre aux deux plans de projection dans le premier dièdre. La sphère O a un rayon R = 45 millimètres, la sphère O' un rayon R' = 32 millimètres; la distance des centres OO' = 60 millimètres. Ceci posé, on demande :

1° De construire les projections des deux sphères;

2° De construire les projections de la courbe intersection des deux solides;

3° De mener un plan tangent commun aux deux sphères coupant la verticale du centre de la sphère O à 50 millimètres au-dessous du plan horizontal de projection.

$$\frac{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}{4} = y \qquad \text{ou } y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

Pour que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient rationnels, il faut et il suffit, comme on sait, que $a^2 - b$ soit carré parfait, alors

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1879

Arithmétique et Géométrie.

1. La surface d'un cercle $\pi r^2 = 400$ mètres carrés. Démontrer que pour obtenir r à un décimètre près, il suffit de remplacer π par 3,1, valeur qui n'est pas inférieure de $\frac{1}{20}$ à la vraie valeur 3,1415... En effet, l'inégalité $r - r' = 20\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi'}}\right) < \frac{1}{10}$ est satisfaite si l'on prend $\pi' - \pi < \frac{1}{20}$. On trouvera $r = 11,3$ par défaut et l'on vérifiera que $3,1 \times (11,3)^2$ diffère peu de 400.

Nota. — *Nous avons copié cet énoncé tel qu'il a été donné aux élèves, tout en étant fort surpris de voir que, dans une composition à une école, on donne aux candidats la solution en même temps que l'énoncé. — Nous ferons remarquer aussi que* π' *étant inférieur à* π, *et par suite* r' *étant supérieur à* r, *il faudrait partout changer les signes.*

2. D'un point P, on mène une tangente à un cercle de rayon r, et on joint le point de contact M aux extrémités du diamètre parallèle à la tangente. Démontrer qu'on obtient ainsi deux cordes égales, équidistantes du point P, et que le cercle décrit du point P comme centre, avec le rayon $R = \frac{PM}{\sqrt{2}}$, est tangent à ces deux cordes. Si le point P est placé de manière que $R = 2r$, les deux cercles sont tangents.

Géométrie descriptive.

Un point A est situé dans la partie antérieure du plan horizontal, à $0^m,05$ de la ligne de terre. Un second point B, placé dans le premier dièdre à la droite du point A, est distant de $0^m,02$ du plan horizontal, de $0^m,03$ du plan vertical, et de $0^m,04$ du point A. On demande de construire les projections du cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne BA, dont le centre est au point B, et qui a $0^m,03$ de rayon.

Algèbre.

— Etant donnée l'équation du second degré

$$Ay^2 + Bxy + \frac{B^2 - \delta^2}{4A} x^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

la résoudre par rapport à y, et déterminer ensuite :

1° La limite c du rapport $\frac{y}{x}$ quand x augmente indéfiniment;

2° La limite de la différence $y - cx$ pour cette même valeur infinie de x.

Trigonométrie.

— On donne dans un triangle

$$a = 2597^m,845$$
$$b = 3084^m,327$$
$$c = 2136^m,737$$

Déterminer les trois angles et la surface.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

COMPOSITIONS DONNÉES EN 1878 AUX CANDIDATS QUI, EMPÊCHÉS A L'ÉPOQUE ORDINAIRE, N'ONT PU PRENDRE PART AUX COMPOSITIONS.

Mathématiques.

1. — Calculer les angles compris entre 0 et 180° satisfaisant à l'équation

$$5 \sin^2 x + 3 \sin x - 3 = 0.$$

2. — On donne l'angle O et le point A sur l'un des côtés, et l'on demande de trouver sur l'autre côté un point M tel que la distance AM soit moyenne proportionnelle entre OA et OM. Discussion sommaire.

3. — On donne le triangle BAC rectangle en A et l'on demande de déterminer sur BC un point M tel que, si l'on mène MN et MP respectivement perpendiculaires à AC et AB, et qu'on fasse tourner la figure autour de BC, le volume engendré par le rectangle ainsi formé soit égal à la somme des volumes engendrés par les triangles BMP et CMN.

Épure.

On donne deux sphères O et O′ tangentes l'une et l'autre aux deux plans de projection dans le premier dièdre. La sphère O a un rayon $R = 45$ millimètres, la sphère O′ un rayon $R' = 32$ millimètres; la distance des centres $OO' = 60$ millimètres. Ceci posé, on demande :

1° De construire les projections des deux sphères;

2° De construire les projections de la courbe intersection des deux solides;

3° De mener un plan tangent commun aux deux sphères coupant la verticale du centre de la sphère O à 50 millimètres au-dessous du plan horizontal de projection.

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite*, voir page 233.)

22. *Trois fois la somme des carrés des distances des centres des quatre cercles de contact au centre du cercle circonscrit, donne un résultat égal à quatre fois la somme des carrés des côtés augmenté de quatre fois le carré de la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit.*

Nous avons vu (form. 47) que l'on avait

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2$$

et aussi (form. 60)

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

En remplaçant R^2 par sa valeur tirée de cette équation, on retrouve évidemment

$$3(D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 4OH^2 \tag{67}$$

23. *La somme des carrés des côtés, augmentée de la somme des carrés des rayons des quatre cercles de contact, est égale à seize fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

On a (form. 6)

$$(a + b + c)^2 = 4p^2 = 4(r'r'' + r'r''' + r''r''')$$

et (form. 11)

$$bc + ca + ab = r'r''' + r''r''' + r'''r' + r\,(4R + r)$$

Mais $\qquad 4R + r = r' + r'' + r'''.$

Donc, en retranchant de la première le double de la seconde, on trouve

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(r'r'' + r''r''' + r'''r') - 2r(r' + r'' + r''')$$

et comme $4R = r' + r'' + r''' - r$, on a, en élevant au carré et retranchant la précédente

$$16R^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + a^2 + b^2 + c^2 \tag{68}$$

24. *La somme des carrés des côtés d'un triangle est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit diminué de quatre fois la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés.*

Car $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$,
donc $a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2 - 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$
ou $a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2 - 4(q'^2 + q''^2 + q'''^2)$ (69)

25. *Dans tout triangle on a, en conservant aux lettres leur signification habituelle :*

$$\left(\frac{a}{r'} + \frac{b}{r''} + \frac{c}{r'''}\right)\left(\frac{a+b+c}{r'+r''+r'''}\right) = 4 \quad (70)$$

Puisque l'on a $\frac{a}{r'} = \frac{a(p-a)}{pr}$, le premier facteur

devient $$\frac{2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{pr}.$$

Mais on a (form. 12)

$$2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2r(4R + r).$$

et on sait aussi que $r' + r'' + r''' = 4R + r$, et $a + b + c = 2p$.

En substituant ces valeurs, on trouve la formule indiquée.

26. *Déterminer une expression pour* Hω, *distance entre les centres des cercles inscrits dans le triangle donné et dans le triangle orthocentrique.*

Ces centres et le sommet A du triangle primitif forment les sommets d'un triangle dont les côtés sont

$$r \operatorname{coséc} \frac{A}{2},\ 2R\cos A,\ H\omega,$$

et l'angle au sommet $\frac{1}{2}(C - B)$.

Donc

$$H\omega^2 = 4R^2\cos^2 A + r^2 \operatorname{coséc}^2 \frac{A}{2} - \frac{4Rr\cos A \cos\frac{1}{2}(C-B)}{\sin\frac{A}{2}} \quad (71)$$

Mais $$\frac{\cos \frac{1}{2}(C - B)}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{c + b}{a}$$

et $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

En substituant ces valeurs dans l'équation primitive, on trouve (*)

$$H\omega^2 = 4R^2 - 8Rr + ab + ac + bc - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (72)$$

Mais on sait, d'après les équations (11) et (12), que l'on a

$$bc + ab + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$$

et $$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2p^2 - 8Rr.$$

Donc $$H\omega^2 = 4Rr + 4R^2 + 3r^2 - p^2 \quad (73)$$

Si Ω, Ω', Ω'' désignent les centres des cercles ex-inscrits, on trouvera de même, en faisant les modifications nécessaires, les expressions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} H\Omega^2 &= 4R^2 + 8Rr' + bc - ac - ab - (a^2 + b^2 + c^2) \\ H\Omega'^2 &= 4R^2 + 8Rr'' - bc + ac - ab - (a^2 + b^2 + c^2) \\ H\Omega''^2 &= 4R^2 + 8Rr''' - bc - ac + ab - (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

En ajoutant ces expressions à l'égalité (72), et remarquant que $r' + r'' + r''' - r = 4R$, on trouve

$$H\omega^2 + H\Omega^2 + H\Omega'^2 + H\Omega''^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2) \quad (75)$$

Soient AH, BH, CH les distances de l'orthocentre aux sommets du triangle; on a

$$AH^2 = 4R^2 - a^2;\ BH^2 = 4R^2 - b^2;\ CH^2 = 4R^2 - c^2.$$

(*) Pour faire cette réduction, il faut écrire d'abord le second membre de l'équation (71) sous la forme suivante :

$$4R^2 - 4R^2(1 - \cos^2 A) + r^2 \operatorname{coséc}^2 \frac{A}{2} - 4Rr \cdot \frac{\cos \frac{C - B}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cos A$$

puis remarquer que l'on a

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{4\Delta^2}{b^2c^2},\ r^2 \operatorname{coséc}^2 \frac{A}{2} = \frac{bc(p - a)}{p},$$

et enfin remplacer $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ par $\dfrac{(b + c)^2 - a^2 - 2bc}{bc}$

On arrivera alors à l'équation (72).

(*Note du Traducteur.*)

Donc, en substituant, on a

$$H\omega^2 + H\Omega^2 + H\Omega'^2 + H\Omega''^2 = 4(AH^2 + BH^2 + CH^2 \qquad (76)$$

Puisque l'on a (form. 60)

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

et (form. 47)

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2.$$

On en déduit

$$H\omega^2 + H\Omega^2 + H\Omega'^2 + H\Omega''^2 = D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 + 4OH^2 \qquad (77)$$

Donc : *la somme des carrés des distances de l'orthocentre aux quatre centres des cercles de contact est égale à la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit aux quatre centres des cercles de contact, augmentée de quatre fois le carré de la distance du centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.*

27. *On abaisse d'un sommet d'un triangle une perpendiculaire sur le côté opposé; on mène la bissectrice de l'angle du triangle jusqu'à la rencontre avec la base, et on inscrit un cercle dans ce triangle. Les distances du milieu de la base au pied de la hauteur, au point de contact du cercle inscrit et au pied de la bissectrice sont en progression géométrique.*

Car il est facile de voir que ces distances sont respectivement $\frac{c^2 - b^2}{2a}$, $\frac{c - b}{2}$, $\frac{a}{2}\,\frac{c - b}{c + b}$.

Lorsque l'on prend les cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle, chaque côté a, par exemple, est touché en quatre points, deux à l'intérieur de l'angle A, et deux à l'extérieur. Le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit qui touchent a à l'intérieur de l'angle sont de part et d'autre de ce côté, et la distance de leurs points de contact est $c - b$; donc chacun d'eux est à une distance $\frac{1}{2}(c - b)$ du milieu M de a. Les deux autres cercles touchent le côté a d'un même côté en deux points L et N, extérieurs à l'angle A, et distants des points B et C de la quantité $p - a$; donc leur distance est $2(p - a) + a = b + c$; et la distance de l'un de ces points au milieu de a est $\frac{1}{2}(b + c)$.

28. *Relations entre les médianes* α, β, γ, *et les côtés* a, b, c *d'un triangle.*

On a, par un théorème bien connu

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4\alpha^2.$$

En prenant les relations analogues pour β^2 et γ^2, on a, en ajoutant $\quad 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (78)$

Faisons le carré de la première, et des formules analogues, et ajoutons, il vient

$$16(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4) \qquad (79)$$

Enfin, faisons le carré de l'égalité (78) et retranchons-en l'égalité (79), il vient

$$16(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) = 9(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \quad (80)$$

29. *Si par les points de contact* A′ B′ C′ *du cercle inscrit dans un triangle donné, on mène à chaque côté une perpendiculaire rencontrant la médiane correspondante aux points* l, m, n, *on a*

$$\frac{1}{A'l} + \frac{1}{B'm} + \frac{1}{C'n} = \frac{2}{r}.$$

La distance du milieu de la base au pied de la hauteur issue du point A est $\frac{c^2 - b^2}{2a}$; la distance de ce même milieu au point de contact est $\frac{c - b}{2}$; et ces distances sont proportionnelles à h et $A'l$. On a donc

$$\frac{A'l}{h} = \frac{a}{c + b}.$$

D'où $$\frac{1}{A'l} = \frac{c + b}{ah} = \frac{c + b}{2\Delta}.$$

Par conséquent, en prenant les autres formules analogues et ajoutant, on a

$$\frac{1}{A'l} + \frac{1}{B'm} + \frac{1}{C'n} = \frac{4p}{2\Delta} = \frac{2}{r} \qquad (81)$$

30. *Déterminer la distance entre le centre de gravité* K *et le centre* ω *du cercle inscrit.*

Considérons le triangle dont les sommets sont A, K, ω. Les côtés de ce triangle sont ωK, $\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, et $\frac{2\alpha}{3}$, α étant la médiane issue du point A.

Soit θ l'angle que fait la médiane α avec le côté c, par exemple.

Alors, comme la médiane divise en deux parties égales le triangle ABC, on a

$c \sin \theta = b \sin (A - \theta)$, ou, puisque $2\alpha = \dfrac{c + b \cos A}{\cos \theta}$,

$$\sin \theta = \frac{b \sin A}{2\alpha}, \text{ et } \cos \theta = \frac{c + b \cos A}{2\alpha} \quad (82)$$

soit ε l'angle que fait la médiane α avec la bissectrice de l'angle A; on a

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2} A - \theta\right), \text{ et } \quad 2\alpha \cos \varepsilon = (b + c) \cos \frac{A}{2}.$$

Donc

$$OK^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{4}{9} \alpha^2 - \frac{4}{3} \alpha \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cos \varepsilon$$

$$= \frac{bc + ab + ac}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} - 4Rr \quad (83)^*$$

Mais nous avons trouvé (form. 11 et 12)

$$2p^2 - 2r^2 - 8Rr = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$2p^2 + 2r^2 + 8Rr = 2(bc + ab + ac).$$

Donc

$$4Rr = \frac{bc + ab + ac}{2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - r^2 \quad (84)$$

Substituant cette valeur dans l'expression précédente, on trouve

$$\omega K^2 = \frac{5}{36} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{6} (bc + ac + ab) + r^2 \quad (85)$$

---

* Pour obtenir ces transformations, on remarque que l'on a

$$\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{bc(p - a)}{p}}$$

On a par suite

$$\overline{\omega K}^2 = \frac{bc(p - a)}{p} + \frac{4}{9} \alpha^2 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{bc(p - a)}{p}} (b + c) \cos \frac{A}{2}, \text{ et}$$

en remplaçant $4\alpha^2$ par sa valeur (v. n° 28, la formule qui précède 78), on a

$$\omega K^2 = bc - \frac{abc}{p} + \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2) - \frac{1}{3} (b + c) (b + c - a)$$

Si l'on remplace abc par $4pRr$, on a la formule (83).

De même, en faisant les substitutions nécessaires, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}\Omega K^2 &= \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{6}(ca+ab-bc)+r'^2\\ \Omega' K^2 &= \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{6}(ab+bc-ac)+r''^2\\ \Omega'' K^2 &= \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{6}(bc+ca+ab)+r'''^2\end{aligned}\right\} \quad (86)$$

En ajoutant ces expressions, on trouve

$$\omega K^2 + \Omega K^2 + \Omega' K^2 + \Omega'' K^2 = \frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2) + r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 \quad (87)$$

Mais nous avons vu (form. 68) que

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 16R^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

Donc, en éliminant les rayons, on trouve

$$\omega K^2 + \Omega K^2 + \Omega' K^2 + \Omega'' K^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2) \quad (88)$$

31. *Trouver une expression pour la distance du centre de gravité au centre du cercle circonscrit.*

Prenons le triangle dont les sommets sont O, K et le milieu de la base; les côtés de ce triangle sont OK, R cos A, $\frac{\alpha}{3}$, et le cosinus de l'angle opposé à OK est $\frac{h}{\alpha}$. Donc on a

$$OK^2 = \frac{\alpha^2}{9} + R^2\cos^2 A - \frac{2}{3}\alpha R\cos A \cdot \frac{h}{a} \quad (89)$$

En remplaçant α^2 par sa valeur, et $\cos^2 A$ par $1 - \sin^2 A$, puis $2Rh$ par bc, et enfin cos A par sa valeur, on trouve

$$OK^2 = R^2 - \frac{(a^2+b^2+c^2)}{9} \quad (90)$$

En comparant avec la valeur de OH trouvée précédemment (form. 60), on trouve le résultat connu

$$OH = 3OK \quad (91)$$

(A suivre.)

NOTE SUR LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS

Par M. Maurice d'Ocagne.

On peut souvent, en arithmétique, à l'aide de petits artifices, apparemment de peu d'importance, apporter de notables simplifications dans les calculs. En voici un exemple assez curieux:

Soit à effectuer la soustraction de deux fractions ayant des termes assez considérables, mais tels que la différence des termes de chacune des fractions soit relativement petite. On obtient le dénominateur par la règle connue. Quant au numérateur, si on veut l'obtenir par la règle ordinaire on sera conduit à des calculs longs et pénibles, car on aura à multiplier le numérateur de chaque fraction par le dénominateur de l'autre, nombres assez grands par hypothèse.

Mais soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, les fractions considérées ; on a pour la différence: $\Delta = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

ajoutons et retranchons ac au numérateur, il vient:

$$\Delta = \frac{ad - ac - bc + ac}{bd} = \frac{a(d - c) - c(b - a)}{bd}$$

d'où la règle: *Étant proposé de soustraire une fraction d'une autre fraction, pour trouver le numérateur du reste, on multipliera le numérateur de la première fraction par la différence des deux termes de la seconde; le numérateur de la seconde, par la différence des deux termes de la première, et la différence de ces deux produits sera le numérateur cherché.*

Les calculs sont ainsi notablement simplifiés : car, par hypothèse, les différences $d - c$ et $b - a$ sont peu considérables. L'énoncé de cette règle a été donné par M. Bardel dans les *Comptes rendus* (t. I, 1835, p. 44).

Dans le cas particulier où les deux fractions sont telles que les différences $b - a$, $d - c$ soient toutes deux égales à l'unité, on est conduit à ce théorème assez remarquable :

Dans la soustraction de deux fractions, telles que chaque dénominateur surpasse le numérateur correspondant d'une unité, le numérateur de la différence est égal à la différence des numérateurs.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Examens oraux 1879.

Étant donnée une demi-circonférence dont AB est le diamètre, on mène le rayon OC perpendiculaire à AB et par le point A une corde AMN qui rencontre la circonférence en M et la droite AC en N ; on demande de déterminer AMN de façon que l'on ait :

1° AM = MN; 2° AM = NO.

— On donne un quadrant OAB; on mène la droite MN perpendiculaire à OA, aux deux tiers de OA à partir de O. Trouver le rapport des deux surfaces dans lesquelles MN partage le quadrant.

— Résoudre l'équation $\sin 2x = 3 \cos 3x$.

— Inscrire dans un cercle un triangle isocèle connaissant la somme de la base et de la hauteur.

— Résoudre l'équation $\text{tg}(x + \alpha) = 2\ \text{tg}(x - \alpha)$

— Si N est pair, $N(N^2 - 4)$ est divisible par 48.

— Calculer à un millième près le rapport des deux surfaces dans lesquelles la corde du quadrant divise la surface d'un cercle.

— On donne un demi-cercle; on le divise en trois arcs dont les deux premiers sont égaux; on connaît les cordes, et on demande le rayon.

— Condition de divisibilité de $x^m + a^m$ par $x^3 + a^3$.

— On a l'équation $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = \sqrt{b}$, dans laquelle les signes sont mis en évidence. La résoudre et vérifier les racines.

— Dans un carré, on sait que la somme du côté et de la diagonale est de 100 mètres; calculer le côté à un centimètre près.

— Résoudre l'équation $\frac{a^2}{x^2 - a^2} + \frac{b^2}{x^2 - b^2} = 1$.

— On a le nombre 3,125; on veut savoir par quel nombre il suffit de le multiplier pour que le produit soit entier.

— Le rayon d'un cercle est 50ᵐ. Calculer la surface à un décimètre carré près.

— Un mobile partant d'un point A d'une circonférence, parcourt la circonférence en 12 heures; un autre partant du même point la parcourt en sens contraire en 13 heures. Au bout de combien de temps leur distance sera-t-elle de 120°?

— On donne un triangle ABC. Trouver sur AB un point M tel que si l'on mène la transversale MN, parallèle à BC, la ligne MN soit moyenne proportionnelle entre MA et MB.

— Si l'on veut trouver tg $\frac{a}{4}$ en fonctions de cos a, combien trouvera-t-on de solutions? Former l'équation qui donnera tg $\frac{a}{4}$ en fonctions de cos a.

— Résoudre l'équation $\cos 2x + 2 \sin x = m$.

— Résoudre $\frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = n + 1$.
Démontrer que les racines sont toujours réelles.

— Calculer à 0,001 l'expression $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{8}$

— Expliquer pourquoi on ne trouve qu'une valeur pour la tangente de la somme des deux arcs en fonction des tangentes de ces deux arcs, tandis qu'on trouve deux valeurs pour le cosinus de la somme en fonction des cosinus des deux arcs.

— On donne une demi-circonférence et une perpendiculaire CD au diamètre AB, extérieure à la circonférence. On demande de trouver sur la courbe un point M qui soit également distant du point A et de la droite CD.

— On a deux fractions dont les dénominateurs sont premiers entre eux; démontrer que si les deux fractions sont irréductibles, leur somme est irréductible.

— On donne un triangle ABC ; on inscrit un carré MNPO dans ce triangle, en appuyant la base sur BC; puis un carré dans le triangle AMN, et ainsi de suite. Trouver la limite de la somme de tous ces carrés.

— Reste de la division d'un nombre par 99.

— Calculer à 0,01 l'expression

$$(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{27})^2.$$

— On donne deux parallèles AD, BC, et un point P sur leur plus courte distance AB. Mener par le point P la droite PCD, qui rencontre BC en C et AD en D, de telle manière que CD soit moyen proportionnel entre AD et BC.

— Combien trouvera-t-on de valeurs pour sin $4a$ en fonction de sin a?

— On donne un triangle ABC. Trouver sur AB un point M tel que si l'on mène la transversale MN parallèle à BC, puis NP parallèle à AB, le parallélogramme inscrit BMNP ait une surface donnée.

— On donne une demi-circonférence AB; on mène un rayon OM, incliné de 60° sur OB, qui rencontre en T la tangente BT. On demande de trouver la surface du triangle mixtiligne BMT.

— Dans le problème précédent, on suppose l'angle on O égal à α; calculer le rayon du cercle inscrit dans le triangle mixtiligne BMT.

— Calculer à 0,01 l'expression

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}.$$

— Le diamètre apparent du soleil est de 32' Calculer la distance de la terre au soleil en prenant pour unité le rayon du soleil.

— Si $\frac{A}{B}$ est irréductible, la somme $\frac{A}{B} + \frac{A^2}{B^2}$ ne peut pas être un nombre entier. — Examiner ce qui arriverait pour la somme des termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment, dont le premier terme serait $\frac{A}{B}$, et la raison $\frac{A}{B}$.

— On donne une demi-circonférence AB; on mène une corde AC faisant l'angle x avec le diamètre AB, et le rayon OD parallèle à AC. Déterminer l'angle x de façon que le trapèze ACDO ait un périmètre maximum.

— L'angle MAN est droit; déterminer la sécante MPN, passant par un point P donné, de façon que la surface MAN soit donnée. Même question si l'angle A a une valeur donnée α, moindre que 90°.

— Deux nombres différents sont terminés par 6; quelle est la condition pour que leur produit soit terminé par 36.

— Résoudre le système: $x^2 + y^2 = m^2$
$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = a^2b^2$$

— Reste de la division par 9 de 43^{20}.

— Les deux progressions:
$$1 : 1{,}01 : (1{,}01)^2 : (1{,}01)^3 \ldots\ldots$$
$$0.\ 0{,}01.\ 0{,}02.\ 0{,}03 \ldots\ldots$$
définissent un système de logarithmes. Trouver la base de ce système.

— On donne une demi-circonférence et un point M sur le diamètre AB; AM $= d$; on mène MP perpendiculaire à AB; mener par le point A une sécante telle que la portion comprise entre MP et la circonférence soit égale à l.

— Calculer à 0,001 l'expression
$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{2} + \sqrt{8}}\right)^2.$$

— On donne un angle yox, et un point P à l'intérieur. Mener par le point P deux droites rectangulaires rencontrant Ox en M et Oy en N, et telles que PM = PN. On prendra l'angle OPM comme inconnu.

— Dans un quadrilatère inscrit on donne les quatre côtés; on prolonge deux côtés opposés; trouver les longueurs des lignes ainsi prolongées.

— Résoudre l'équation
$$x^2 - 4x \sin\alpha + 3 \cos\alpha = 0.$$

— Calculer à 0,001 près l'expression
$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{8}}$$

— On connait $\sin x = 0{,}754$. Calculer avec toute l'approximation possible tg x. — Si l'on avait une table de logarithmes, comment trouverait-on une limite de l'erreur commise dans le calcul de l'angle.

— On a un rectangle ABCD. Trouver sur le côté CD un point M tel que
$$\frac{AM^2}{CM^2 + DM^2} = K^2.$$

— Éliminer x entre
$$\sin x + \cos x = m$$
$$\sin^3 x + \cos^3 x = n$$

— Combien de valeurs peut avoir $\cos \frac{a}{4}$ en fonction de $\sin a$?

— On a un cercle et un point P extérieur au cercle; on mène PMN faisant un angle α avec OP. 1° Trouver l'équation qui donne PM et PN. 2° Si on abaisse MQ et NQ' perpendiculaires sur OP, trouver l'équation qui donne MQ et NQ'; 3° Déterminer l'angle α de façon que MQ + NQ' soit égal à une quantité K. — Discuter.

— Étant donné un triangle rectangle ABC, on demande de déterminer l'angle C de façon que, si l'on mène AD perpendiculaire sur l'hypoténuse, DE perpendiculaire sur AC, EF perdendiculaire sur l'hypoténuse et ainsi de suite, la somme de toutes ces perpendiculaires soit égale au périmètre.

— Dans une racine carrée, on prend pour valeur $a + \frac{r}{2a}$; quelle est la limite de l'erreur commise?

— Condition pour que les deux équations

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

aient une racine commune.

— Dans un triangle on connaît les angles; on demande d'évaluer les angles que fait la médiane avec les côtés qui la comprennent.

— Étant données deux équations du second degré, trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients pour que les quatre racines forment une proportion.

— Minimum de $tg^2 x + 16 \cos^2 x$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1879

Mathématiques spéciales.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point dans le plan du cercle de gorge. Par ce point, on mène une droite parallèle à une génératrice de la surface. Cette droite est l'axe d'un cylindre de révolution qui passe par la génératrice de l'hyperboloïde. Trouver l'équation de la projection sur le plan des xy de l'intersection des deux surfaces. La projection a un point double dont on demande le lieu lorsque la droite varie.

Mathématiques élémentaires.

1. On considère un quadrilatère ABCD dans lequel AB = BC et CD = DA. On demande de prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles. On déforme ce quadrilatère de manière que les côtés demeurent invariables, et que les points A et B demeurent fixes. On demande le lieu des centres des cercles inscrits aux différentes positions du quadrilatère.

2. Etant données les deux équations :

$$ax + by + cz = 0$$
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

en déduire les rapports $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$ par des formules ne contenant pas de radicaux au dénominateur. Chercher dans quel cas les valeurs de ces rapports sont réelles.

Rhétorique.

— Soit AB une portion de droite de longueur donnée; on prend, entre A et B, sur la droite AB, un point C, et sur AC comme diamètre, on décrit une demi-circonférence; par le point B, on mène une tangente à cette demi-circonférence. Soit D le point de contact et soit E le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite AB par le point A.

Déterminer le point C de telle façon que si l'on fait tourner autour de la droite AB, la surface engendrée par l'arc de cercle AD et la surface engendrée par la portion de droite BE soient dans un rapport donné *m*. Indiquer la condition de possibilité; appliquer dans le cas particulier où *m* est égal à $\frac{1}{2}$, et dans ce cas, trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions BD et DE de la droite BE.

— Longitude et latitude d'un point de la surface de la terre. Manière de les déterminer. Forme du méridien terrestre.

Classe de troisième.

— On donne un cercle et une tangente en A. On mène un diamètre quelconque BC et on abaisse les perpendiculaires BB′ et CC′ sur la tangente. Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABC à l'aire du trapèze BB′CC′ est le même quel que soit le diamètre.

— Soit I le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC; on prend les points A′, B′, C′ respectivement symétriques du point I par rapport aux côtés BC, AC, AB. 1° Démontrer que les triangles ABC, A′B′C′ sont inscriptibles dans un même cercle; 2° évaluer les angles du triangle A′B′C′ en supposant connus ceux du triangle ABC; 3° les deux triangles se coupent suivant les sommets d'un hexagone; démontrer que les lignes qui joignent les sommets opposés de cet hexagone se coupent en un même point (dans chaque partie de la dernière question, on examinera séparément les cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus, et celui où l'un des angles est obtus).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION EN 1879.

Mathématiques.

— On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

et un point M sur cette conique. Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la conique et le point M on fait passer un cercle; prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par l'origine O des axes. Si autour du point O, on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points; prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment OM, et passant au milieu de ce segment. Par le point O, on peut mener, indépendamment de la normale ayant son pied en O, trois autres droites normales à la conique K. 1° Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère, et où $a = 1$, $b = -1$, montrer qu'une seule de ces normales est réelle; 2° trouver

l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds des trois normales.

Nota. — Le pied de la normale est le point de la courbe d'où part la normale.

Géométrie descriptive.

On donne un cube dont l'arête a 12 centimètres, et qui a sa base dans le plan horizontal. Le point A est sur la ligne de terre, et AB fait un angle de 30° avec la ligne de terre. On mène la verticale du centre du cube. C'est l'axe d'un hyperboloïde de révolution ayant pour génératrice la diagonale BK d'une face latérale. Le sommet E, qui se projette horizontalement en A, est le sommet d'un cône de révolution dont l'axe passe par le milieu de l'arête verticale KC. Le milieu de l'arête horizontale KH (qui se projette suivant BC), est un point de la surface. On demande: 1° de trouver la courbe d'intersection des deux surfaces; 2° de représenter l'hyperboloïde supposé plein, en enlevant la partie située à l'intérieur du cône.

ÉCOLE CENTRALE

CONCOURS DE 1879. — PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires, Ox et Oy, et un point A sur Ox, un point B sur Oy.

1° Former l'équation générale des hyperboles équilatères tangents à l'axe Ox au point B, et passant par le point A.

2° Lieu des points de rencontre des tangentes à ces hyperboles au point A, avec les parallèles aux asymptotes menées par le point O.

3° Ce lieu est une parabole; trouver l'équation de l'axe et de la tangente au sommet; construire géométriquement le paramètre de cette parabole.

4° Trouver le lieu du sommet de cette parabole lorsque le point A se déplace sur l'axe Ox.

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle, on donne les trois côtés

$$a = 3457^{m}205$$
$$b = 5819^{m}798$$
$$c = 7005^{m}002$$

trouver les trois côtés et la surface de ce triangle.

Physique et chimie.

1. — Un tube barométrique terminé par un renflement cylindrique de 0,05 de hauteur plonge dans une cuve à mercure. Il renferme de l'air raréfié qui occupe exactement le volume du renflement lorsque la différence

de niveau entre les deux surfaces de mercure est de 0,12 et lorsque la pression atmosphérique est de 0,75. On soulève verticalement ce tube jusqu'à ce que la section inférieure du renflement soit à 0,43 au-dessus du niveau supposé constant du mercure dans la cuve. Quelle est alors la différence de niveau des deux surfaces dans le tube et dans la cuve? Le rapport des rayons des deux parties du tube est de 1 à 2.

3. — Préparation et propriétés chimiques de l'acide sulfhydrique. Calculer la densité théorique de la vapeur de soufre, connaissant la composition de l'acide sulfhydrique.

Densité de l'hydrogène $d = 0,0692$
Densité de l'acide sulfhydrique $d' = 1,1912$

Géométrie descriptive.

Hyperboloïde de révolution entaillé par un cône.

L'axe (z, z') de l'hyperboloïde est vertical, à 100 millimètres du plan vertical, et au milieu de la feuille. Le cercle de gorge (c, c') dont la cote vaut $0^m,080$ à $0^m,030$ de rayon, et les génératrices rectilignes de la surface font avec l'horizon un angle de 45°.

Le cône, dont le sommet (s, s') se trouve dans le plan de profil conduit par l'axe (z, z'), à 0,050 en avant de cet axe, et à 0,040 au-dessus du cercle de gorge, a pour trace horizontale le cube ω décrit du point z comme centre avec un rayon égal à 0,070. On demande de représenter l'hyperboloïde, supposé plein, et limité d'une part au plan horizontal P', à la cote 0,190, et de l'autre au plan horizontal de projection, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des surfaces données et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0,228 du petit côté supérieur.

ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE 1879.

Composition mathématique.

On circonscrit à une sphère donnée un tronc de pyramide régulière dont les bases sont des octogones réguliers. Déterminer le volume de ce tronc en fonction du rayon de la sphère et de l'inclinaison de ses faces latérales sur la grande base et le minimum de ce volume quand on fait varier l'inclinaison.

En supposant que le carré du rayon de la sphère soit égal à 3 centiares, et que cette inclinaison soit de 75°, on déterminera ce volume à 1 millième près: 1° sans le secours des logarithmes avec le plus petit nombre de décimales possible; 2° avec le secours des tables de logarithmes.

Composition en trigonométrie.

Dans un triangle ABC, le côté AB a une longueur de 169 toises, et la bissectrice de l'angle A, prolongée jusqu'au côté BC, a une longueur de 137 toises : l'angle B, augmenté de la moitié de l'angle A, forme les $\frac{14692}{9153}$ d'un angle droit.

Calculer les angles de ce triangle à un centième de seconde près, ses côtés à un dixième de millimètre, et sa surface à un centiare près.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1879. — COMPOSITION SUPPLÉMENTAIRE

Composition mathématique.

1. — Calculer la valeur de x donnée par la formule,

$$x^3 = \frac{\pi a^3 \operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos} \varphi}{3}$$

dans laquelle on fait $a = 442^{m},375$

$$\varphi = 27^{\circ}\ 28'\ 47''$$

π est le rapport de la circonférence au diamètre.

2. — Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant le produit des trois côtés et la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

3. — Dans le demi-cercle ACDB dont AB est le diamètre, la corde CD est parallèle à AB. On donne les longueurs des cordes AC, CD, BD, et l'on demande de calculer le rayon du cercle. — Interpréter la solution négative, si l'on en trouve.

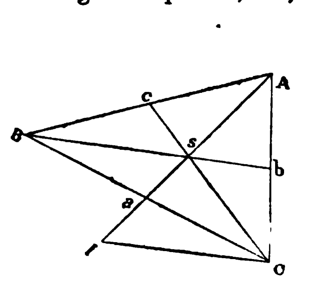
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 130.

Solution par M. Hoc, élève du Collége de Longwy.

Soient menées dans un triangle ABC *par les sommets et le centre de gravité* S, *les droites* AS, BS, CS *rencontrant les côtés opposés en* a, b, c. *Formons avec* Aa, Bb, Cc, *comme côtés, un triangle* MNP. *Les rayons* R, r, r′, r″, r‴ *des cercles circonscrits respectivement aux triangles* ABC, MNP, BCS, CAS, ABS, *satisfont à la relation* $4R^2r = 3r'r''r'''$.

Désignons par m, m', m'' les médianes Aa, Bb, Cc du triangle ABC. Dans tout triangle le rayon R du cercle circonscrit est donné par la formule $R = \frac{abc}{4S}$. Si l'on applique cette formule aux triangles de l'énoncé, on a $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{m\ m'\ m''}{4S'}$. Pour avoir



S' remarquons que, si l'on prolonge Sa d'une longueur égale aI, et que l'on joigne CI, le triangle CIS ayant pour côtés les deux tiers des médianes est semblable au triangle MNP et leur rapport de similitude est $\frac{2}{3}$. Donc surf. MNP $= \frac{9}{4}$ surf. ICS. Et comme surf. ICS = surf. BSC $= \frac{1}{3}$ surf. ABC, on a finalement

$$r = \frac{mm'm''}{3S}$$

Dès lors $$4Rr^2 = \frac{abc\ .\ m^2\ .\ m'^2m''^2}{9S^3}$$

On trouverait de même

$$r' = \frac{am'm''}{3S},\quad r'' = \frac{bmm''}{3S},\quad r''' = \frac{cmm'}{3S}.$$

Donc $$3r'r''r''' = \frac{abcm^2\ .\ m'^2\ .\ m''^2}{9S^3} = 4Rr^2.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Longueville, à Charleville, et par M. Deslais, du Mans.

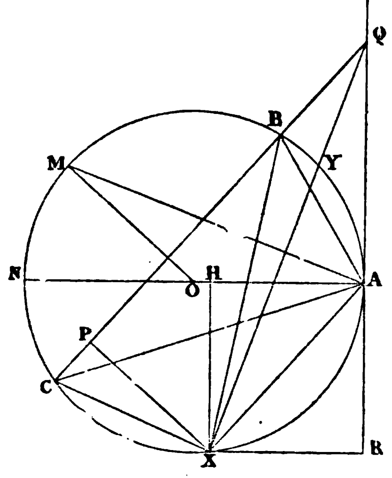
QUESTION 137.

Solution par M. Zuloaga, de Liége.

On inscrit un triangle ABC *dans un cercle; la tangente en* A *rencontre* BC *en* Q. *Par le point* Q, *on mène une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle* A, *perpendiculaire qui coupe le cercle*

en des points X *et* Y; *démontrer que la distance de l'un de ces points au point* A *est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux points* B *et* C.

Soit AM la bissectrice de l'angle A, et QX la perpendiculaire menée du point Q à cette bissectrice. Je dis en premier lieu que QX est la bissectrice de l'angle AQC. En effet, si je joins le centre O de la circonférence, aux points A et M (M étant, comme on sait, le point milieu de l'arc BC), j'ai : OAM $=$AMO. Mais OAM$=$AQX, comme ayant les côtés perpendiculaires; de même AMO $=$ XQC, donc AQX $=$ XQC. Du point X, je mène XP, hauteur du triangle BXC; si j'appelle D le diamètre du cercle, j'aurai BX . XC $=$ D . XP. De même si du point X je mène XH perpendiculaire au diamètre AN, j'aurai



$$\overline{AX}^2 = AN \cdot AH, \text{ ou bien } \overline{AX}^2 = D \cdot AH.$$

Je prolonge AQ, et par le point X, je mène XR perpendiculaire à QA; j'ai RX $=$ AH comme parallèles comprises entre parallèles, or RX $=$ XP, car le point X appartient à la droite QX bissectrice de l'angle RQC; on conclut donc de là que
$$\overline{AX}^2 = BX \cdot XC.$$

Remarque. — Généralisation de la question 137.

Si on inscrit un quadrilatère ABCD dans un cercle, et qu'on mène la bissectrice de l'angle formé par les prolongements des côtés opposés AB, DC, laquelle bissectrice coupe la circonférence en des points X et Y, on aura :

$$AX \cdot XB = XC \cdot XD.$$

En effet, si je mène la hauteur XN du triangle CXD, et que j'appelle D le diamètre du cercle, on aura

$$XC \cdot XD = D \cdot XN.$$

De même, menons la hauteur XM du triangle BXA, nous aurons AX . XB = D . XM.

Or le point X étant sur la bissectrice, on a XN = XM, donc XC . XD = AX . XB.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Hoc, de Longwy; Dumotel, élève du Lycée Saint-Louis; Deslais, au Mans.

QUESTION 138.

Solutio par M. Hoc, élève du Collège de Longwy.

Si l, m, n *sont les médianes d'un triangle, démontrer que sa surface a pour expression*

$$\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (1)$$

ou $$\frac{1}{3}\sqrt{2l^2m^2+2l^2n^2+2m^2n^2-l^4-m^4-n^4} \qquad (2)$$

Démontrons d'abord la formule (1)

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{2\,abc\,[\sin A+\sin B+\sin C]}{4(a+b+c)}$$

Or de l'égalité $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, on tire

$$2R=\frac{a+b+e}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

Portant cette valeur dans (1) on trouve $\frac{abc}{4R}$, c'est-à-dire la surface du triangle.

Quant à la démonstration de la formule (2), on y arrive facilement en remarquant que la quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$$(l+m+n)\,(l+m-n)\,(m+n-l)\,(n+l-m).$$

L'expression (2) représente donc les $\frac{4}{3}$ de la surface du triangle qui aurait pour côtés les longueurs *l*, *m*, *n*. Construisons ce triangle (PQR), ainsi que celui dont les médianes sont *l*, *m*, *n* (ABC). Dans le triangle ABC, prolongeons d'un tiers la médiane AL = *l* et joignons C au point G ainsi obte-

nu. Le triangle GOC (O étant le point de concours des médianes) a pour côtés les $\frac{2}{3}$ des médianes; il est donc semblable à PQR et sa surface est égale aux $\frac{4}{9}$ de celle de ce dernier. Or elle est aussi équivalente à surface BOC, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ ABC, par suite

$$\text{surf. ABC} = \frac{4}{3}\,\text{PQR}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\,l^2m^2 + 2\,l^2n^2 + 2\,m^2n^2 - l^4 - m^4 - n^4}$$

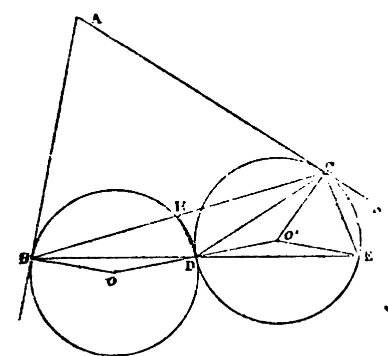
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Schmitz, de la Rochelle ; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saunier ; Gélinet, d'Orléans ; du Motet, élève du lycée Saint-Louis; Elie, collége Stanislas; Moles, d'Angoulême; Vermand, à Saint-Quentin ; Hugot, de Lyon.

QUESTION 145.

Solution, par M. Lannes, élève du Lycée de Tarbes.

On donne un point sur chacun des côtés d'un angle ; construire deux circonférences égales tangentes entre elles et touchant chacune un des côtés de l'angle au point donné.

Supposons le problème résolu : soient O et O′ les deux cercles tangents en B et C aux deux côtés de l'angle A, et D leur point de contact : tirons CD, BD que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en E avec la circonférence O′, BC, BO, CE et EO′.



Les deux triangles BOD, DO′E sont égaux : il s'ensuit que EO′ est perpendiculaire à AB ; l'angle CO′E est donc égal à l'angle A comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à A B et à AC, et l'angle

BDC, supplémentaire de l'angle CDE qui est la moitié de CO'E, a pour supplément la moitié de l'angle A : on connaît ainsi un premier lieu du point D.

Menons DH parallèle à CE : l'angle ECK étant égal à $\frac{A}{2}$, DH est parallèle à la bissectrice de l'angle A, et de plus, comme on a, $\frac{BH}{HC} = \frac{BD}{DE} = 1$, le point H est le milieu de BC.

On a ainsi un second lieu du point D.

On peut donc construire le point D : ce point connu, la construction s'achève facilement.

Nota. Ont résolu la même question : MM. Deslais, au Mans; Trehoret, au Havre; Renaud, à Bordeaux; Dupuy, à Grenoble; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Vazou, au collége Rollin; Faissey, Baudot, à Dijon.

QUESTIONS PROPOSÉES

181. — Étant données une circonférence o et deux droites concourantes xy, $x'y'$ dont le point de concours n'est pas dans les limites du dessin, mener à la circonférence une tangente passant par le point de rencontre de xy et de $x'y'$.

182. — Soit donné un cercle o, de rayon r, inscrit dans un angle; on mène les deux cercles o' et o'' tangents aux côtés de l'angle et au cercle o, puis les cercles ω, ω' tangents à l'un des côtés et en même temps tangents respectivement à o, o' et à o, o''. Démontrer que, x et y étant les rayons des cercles ω et ω', on a la relation

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}.$$

183. — Prouver que $(a - b)\sqrt{ab}$ est divisible par 24 si ab est un carré parfait et que a et b soient de même parité.

(Bernheim.)

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 15056-9.

THÉORIE DES CENTRES

DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. Kœhler.

(*Suite.* Voir page 257.)

7. **Théorème.** — *Le centre* q *des moyennes harmoniques d'un groupe de* n *points* a, b, c... *par rapport à un point ou pôle* p *est un point unique et déterminé; mais si* q *est considéré comme un centre de moyennes harmoniques des mêmes points* a, b, c... *par rapport à un pôle inconnu, il correspond à* n — 1 *pôles différents.*

Désignons par $a, b, c \ldots$ les distances $qa, qb, qc \ldots$ rapportées au point q pris pour origine, et posons $qp = x$; on aura $pa = qa - qp = a - x$, $pb = b - x$, etc. L'équation (6) devient

$$\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x} + \ldots = 0.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient évidemment une équation de degré $n - 1$ pour déterminer x, ce qui démontre le théorème (nous supposons connue cette propriété qu'une équation de degré $n - 1$ admet $n - 1$ racines).

En particulier, s'il y a trois points a, b, c on aura $x^2(a + b + c) - 2x(bc + ca + ab) + 3abc = 0$.

Si l'on suppose $a + b + c = 0$, le point origine q est le centre des moyennes distances des points a, b, c, une des valeurs de x devient infinie, ce qui devait être, puisque le centre des moyennes distances n'est autre chose que le centre des moyennes harmoniques par rapport au point à l'infini. Mais il y a un point à distance finie

$$x = \frac{3abc}{bc + ca + ab} = \frac{3ab(a+b)}{2(a^2 + b^2 + ab)}$$
$$= \frac{3ab(a^2 - b^2)}{2(a^3 - b^3)}$$

par rapport auquel l'origine est centre des moyennes harmoniques.

Centre des moyennes harmoniques déduit du centre des distances proportionnelles.

8. Supposons que les n points en ligne droite, A, B, C ... considérés dans ce qui précède, soient affectés de coefficients numériques α, β, γ ...; on sait que le centre des distances proportionnelles est un point Q qui satisfait à la relation $OQ = \frac{\alpha.OA + \beta.OB + \ldots}{\alpha + \beta + \ldots}$; O étant une origine arbitraire. On retrouve le centre des moyennes distances, lorsqu'on suppose les coefficients égaux entre eux. Si l'on construit le faisceau S (P, A, B, ... Q), et si on le coupe par une transversale pab ... q, on aura

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}{pq} = \frac{\alpha}{pa} + \frac{\beta}{pb} + \frac{\gamma}{pc} + \ldots$$

Cette relation se démontre absolument comme la relation

$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \ldots$$

à laquelle elle se ramène par l'hypothèse $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$, et le point q pourra être appelé encore centre des moyennes harmoniques de a, b, c, ... par rapport au pôle p. La droite Sq sera l'axe des moyennes harmoniques de Sp par rapport aux droites Sa, Sb, Sc, ..., affectées respectivement des coefficients α, β, γ, ...

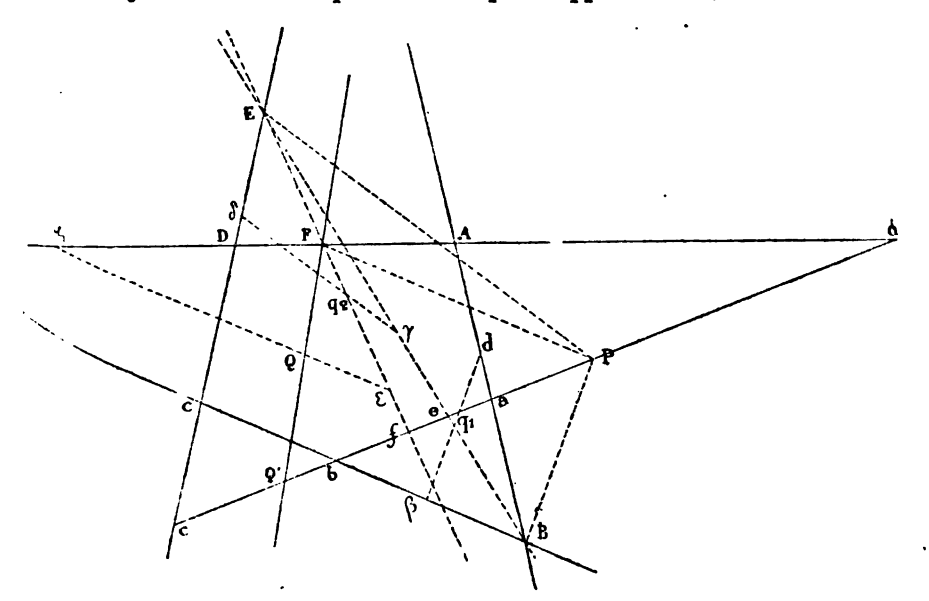
Il est aisé de voir comment on pourra construire l'axe relatif à Sp par rapport aux droites Sa et Sb dont les coefficients sont α, β. On mènera AB parallèle à Sp et on partagera cette droite en deux segments AQ, QB, tels que l'on ait $\frac{AQ}{QB} = \frac{\beta}{\alpha}$; il est évident que SQ sera l'axe cherché.

Cette remarque va nous permettre de démontrer sans difficulté le théorème suivant:

Théorème. — *Étant donné un système de* n *droites quelconques dans un plan et un pôle* P, *si l'on mène une transversale quelconque par le pôle et qu'on cherche le centre des moyennes harmoniques de* P *par rapport aux points où elle coupe les* n

droites (supposées affectées du même coefficient ou de coefficients différents), le lieu des centres sur toutes les transversales est une droite, polaire rectiligne du point P.

Soient AB, BC, CD, DA quatre droites ; je prends la polaire du point P par rapport aux deux premières, en menant $\alpha\beta$ parallèle à PB et joignant le point B au milieu q_1 de $\alpha\beta$. Bq_1 coupe la troisième droite CD en E. Je prends l'axe des moyennes harmoniques de PE par rapport à EC, EB en



regardant ces deux droites comme affectées des coefficients 1 et 2 ; pour cela je mène $\gamma\delta$ parallèle à PE et je partage le segment $\gamma\delta$ au point q_2 de telle sorte qu'on ait $\frac{\delta q_2}{q_2\gamma} = \frac{2}{1}$. Il est clair que Eq_2 sera la polaire rectiligne de AB, BC, CD ; en effet, si je mène une transversale arbitraire P*abc* ... qui rencontre Bq_1, Eq_2 aux points e, f, j'aurai $\frac{2}{Pe} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb}$, $\frac{3}{Pf} = \frac{2}{Pe} + \frac{1}{pc} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb} + \frac{1}{Pc}$.

La droite Eq_2 coupe DA en F ; je cherche l'axe des moyennes

harmoniques de Fq_1 et de AD en affectant ces lignes des coefficients 3 et 1 ; pour cela il suffit de mener $\varepsilon\zeta$ parallèle à PF et de partager $\varepsilon\zeta$ au point Q de telle sorte que $\frac{\zeta Q}{Q\varepsilon} = \frac{3}{1}$. FQ sera la polaire rectiligne des quatre droites, d'après la définition indiquée dans l'énoncé du théorème.

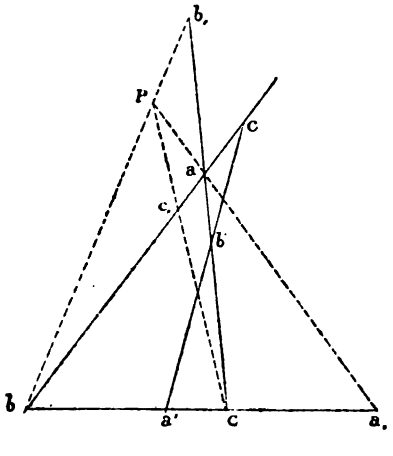
On a effectivement sur la transversale P*abc*...

$$\frac{4}{PQ'} = \frac{3}{Pf} + \frac{1}{Pd} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb} + \frac{1}{Pc} + \frac{1}{Pd}.$$

Les mêmes constructions et le même raisonnemen s'appliquent de proche en proche à un nombre quelconque de droites.

9. Ce qui précède permet d'énoncer le théorème suivant dû à M. Cayley : *Étant données* n *droites et un pôle* P, *le point où l'une de ces droites coupe la polaire rectiligne de* P *par par rapport aux* (n — 1) *autres, appartient à la polaire rectiligne de* P *par rapport aux* n *droites.*

En supposant $n = 3$, on voit que les polaires d'un point par rapport aux côtés d'un triangle pris deux à deux, coupent ces côtés en trois points qui sont en ligne droite et appartiennent à la polaire rectiligne du point par rapport aux trois côtés.



Réciproquement : *Si les trois côtés* bc, ca, ab *d'un triangle sont coupés par une transversale respectivement aux points* a', b', c', *et si* a_1, b_1, c_1 *sont les conjugués harmoniques de* a', b', c' *par rapport aux couples* (b, c), (c, a), (a, b), *les droites* aa_1, bb_1, cc_1 *se coupent en un même point* P, *pôle de la transversale* (*).

(*) Il faut bien remarquer que ce procédé de construction du pôle d'une

10. Le théorème général sur la polaire rectiligne d'un point devient presque intuitif, en invoquant le principe suivant qui résulte des premières notions de géométrie analytique :

Pour reconnaître le degré d'un lieu géométrique, il suffit de chercher le nombre des points de ce lieu situés sur une droite arbitraire ; lorsqu'il y a un seul point, le lieu est une droite. — C'est ce qui arrive dans la recherche de la polaire d'un point par rapport à n droites ou par rapport à une courbe du degré n. Sur chaque transversale issue du pôle on ne trouve évidemment qu'un centre des moyennes harmoniques.

L'application du principe que je viens de rappeler n'est pas toujours aussi facile ; elle exige parfois beaucoup d'attention. Voici un exemple très-simple : on demande le degré du lieu des milieux des cordes d'une conique passant par un point P. Au premier abord il semble qu'il n'y a qu'un point sur chaque corde ; mais le point P lui-même fai partie du lieu, car il est le milieu d'une corde parallèle au diamètre conjugué de OP (O étant le centre de la conique). Le lieu cherché étant coupé par une droite en deux points est du second degré.

(A suivre.)

---

droite donnée par rapport à un triangle n'est pas susceptible de généralisation. S'il s'agit d'un quadrilatère, il faut, pour obtenir le pôle d'une transversale chercher l'intersection de deux courbes du troisième degré qui passent déjà par les six points de concours des côtés deux à deux ; on trouve ainsi trois points. Nous ferons voir dans un autre article que, pour le cas du triangle, on peut résoudre le problème en cherchant l'intersection de deux coniques passant par les trois sommets et qui se coupent encore en un quatrième point, le pôle cherché. — En général, les pôles d'une droite par rapport à un lieu du degré n sont au nombre de $(n-1)^2 - \delta$, en désignant par δ le nombre des points doubles. Si le lieu se compose de n droites, on a $\delta = \frac{n(n-1)}{2}$ et on a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pôles.

NOTE D'ALGÈBRE

SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

La propriété fondamentale qui sert de définition à la progression arithmétique va nous permettre de calculer très-facilement certaines expressions dans lesquelles entrent des termes en progression arithmétique. Nous désignerons la progression par les termes

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, h \,.\, k \,.\, l.$$

1. On a

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{r}{ab},$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{r}{bc},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{l} = \frac{r}{kl}.$$

Ajoutant membre à membre, il vient après réduction

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{l} = r\Sigma\,\frac{1}{ab},$$

en désignant par $\Sigma\,\frac{1}{ab}$ la somme des inverses des produits obtenus en prenant deux termes consécutifs de la progression.

En particulier on aura

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{4\,.\,5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

De même on aura

$$\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} = \frac{c-a}{abc} = \frac{2r}{abc}.$$

Donc en opérant comme précédemment

$$\frac{1}{ab} - \frac{1}{kl} = 2r\Sigma\,\frac{1}{abc}.$$

On aura de même

$$\frac{1}{abc} - \frac{1}{hkl} = 3r\Sigma \frac{1}{abcd}$$

et ainsi de suite.

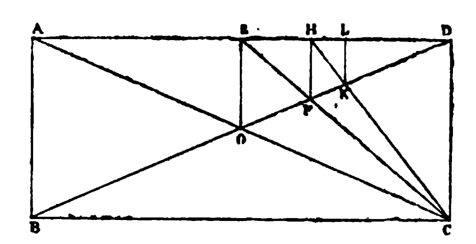
Lorsque le nombre des termes que l'on considère augmente indéfiniment on a une série ; les termes $\frac{1}{l}, \frac{1}{kl}, \frac{1}{hkl} \dots$ tendent vers zéro. On a donc immédiatement la somme des termes de certaines séries.

En particulier pour n infini, on a

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

M. Bæhr, professeur à l'École polytechnique de Delft, a donné au Congrès de l'Association française, au Havre, en 1877, une représentation géométrique de l'inverse de n nombres entiers consécutifs, et de l'inverse des produits de deux nombres entiers consécutifs.

Considérons un rectangle ABCD; ses diagonales se coupent en O. Menons OE parallèle à AB; la ligne CE coupe



en F la diagonale BD; menons FH parallèle à AB; la ligne HC coupe BD en K: menons KL, et ainsi de suite.

On a d'abord $\quad DE = \frac{AD}{2}.$

Puis les triangles BFC, EFD donnent

$$\frac{DF}{BF} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2};$$

donc

$$\frac{DH}{DA} = \frac{DF}{BC} = \frac{1}{3}.$$

En général, si l'on a

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{DA}} = \frac{1}{n},$$

on en déduit

$$\frac{\mathrm{DK}}{\mathrm{BK}} = \frac{1}{n}, \text{ et } \frac{\mathrm{DK}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{DA}} = \frac{1}{n+1}.$$

On a aussi

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AD}} - \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3},$$

$$\frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{LD}}{\mathrm{AD}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3.4},$$

et ainsi de suite. On voit donc bien que la somme des termes tels que $\frac{1}{n(n+1)}$ a pour limite l'unité, puisque la somme des termes AE + EH + HL + ... est égale à AD.

2. Il existe des formules analogues pour la somme des produits consécutifs des termes d'une progression arithmétique.

Représentons par a_0 le terme qui précéderait, dans une progression indéfiniment prolongée de part et d'autre, le terme a et par l_0 celui qui suivrait l. On trouve facilement

$$\begin{aligned} ab - a_0 a &= 2ra, \\ bc - ab &= 2rb, \\ cd - bc &= 2rc, \\ &\cdots \\ ll_0 - kl &= 2rl. \end{aligned}$$

Ajoutons, nous aurons

$$ll_0 - aa_0 = 2r\mathrm{S}.$$

On aurait de même

$$kll_0 = a_0\, ab = 3r\Sigma ab$$

$$hkll_0 = a_0\, abc = 4r\Sigma abc$$

et ainsi de suite.

En particulier, on a les formules

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + \dots + n . (n + 1) = \frac{n (n + 1) (n + 2)}{3}$$

$$1 . 2 . 3 + 2 . 3 . 4 + 3 . 4 . 5 + \dots + n (n + 1) (n + 2) = \frac{n (n + 1) (n + 2) (n + 3)}{4}$$

En général :

Pour avoir la somme des produits obtenus en prenant p *nombres entiers consécutifs à partir de* 1, *on multiplie le dernier produit par le nombre qui suit le dernier facteur et on divise par* p + 1.

Ces formules ont été données sous une forme un peu différente par Pascal et par Fermat.

3. La somme des inverses des produits de deux nombres entiers consécutifs, trouvée précédemment, nous permet de démontrer le théorème suivant, connu sous le nom de Théorème de Goldbach.

La somme de toutes les fractions de la forme

$$\frac{1}{(m + 1)^{(p+1)}},$$

dans lesquelles m *et* p *prennent toutes les valeurs entières, positives et plus grandes que zéro, a pour limite l'unité.*

En effet, faisons d'abord varier p;
pour $m = 1$, on a la série

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

dont la somme est $\frac{1}{2^2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{1 . 2}$.

En général, pour une valeur particulière de m, on a pour la somme

$$\frac{1}{(m + 1)^2} : \frac{m}{m + 1} = \frac{1}{m (m + 1)}.$$

Donc la somme donnée est égale à la somme des inverses des produits de deux nombres entiers consécutifs. Elle a donc pour limite l'unité.

A. M.

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par James Booth, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite.* Voir page 268.)

32. *La somme des carrés des douze lignes menées des sommets d'un triangle aux points de contact des cercles tangents sur les côtés opposés est égale à cinq fois la somme des carrés des côtés du triangle.*

Supposons le côté BC du triangle prolongé en L et N de telle manière que BL $= p - a$, CN $= p - a$; on sait que L et N sont les points extérieurs de contact, et que la distance entre les points intérieurs de contact est $c - b$.

Mais on a $a + p - a + p - a = c + b$.

Soit M le milieu du côté a; alors AM $= \alpha$.

Donc $$AL^2 + AN^2 = 2\alpha^2 + \frac{1}{2}(c+b)^2;$$

$$AF^2 + AF'^2 = 2\alpha^2 + \frac{1}{2}(c-b)^2.$$

Par suite $$AL^2 + AN^2 + AF^2 + AF'^2 = 4\alpha^2 + b^2 + c^2.$$

En faisant des constructions analogues pour les autres côtés, on trouve, pour la somme des douze lignes,

$$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Mais $$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Donc, la somme des carrés des douze lignes est égale à

$$5(a^2 + b^2 + c^2).$$

33. *La somme des carrés des douze lignes menées des milieux des côtés d'un triangle aux centres des cercles de contact, augmentée de la somme des carrés des côtés du triangle, donne une somme égale à douze fois le carré du diamètre du cercle circonscrit.*

Appelons α, β, γ les lignes qui joignent les milieux des côtés a, b, c au centre Ω du cercle ex-inscrit opposé à

l'angle A, et δ la distance du milieu de a au centre ω du cercle inscrit; on a

$$\left.\begin{array}{l} B\Omega^2 + C\Omega^2 = 2\alpha^2 + \frac{1}{2}a^2;\ B\omega^2 + C\omega^2 = 2\delta^2 + \frac{1}{2}a^2 \\ A\Omega^2 + C\Omega^2 = 2\beta^2 + \frac{1}{2}b^2;\ A\Omega^2 + B\Omega^2 = 2\gamma^2 + \frac{1}{2}c^2 \end{array}\right\} \quad (92)$$

Ajoutant ces expressions et divisant par 2, on trouve

$$A\Omega^2 + B\Omega^2 + C\Omega^2 + \frac{1}{2}(B\omega^2 + C\omega^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2).$$

Mais $A\Omega^2 = r'^2 + p^2$; $B\Omega^2 = r'^2 + (p-c)^2$; $C\Omega^2 = r'^2 + (p-b)^2$;
et $(B\omega^2 + C\omega^2) = 2r^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2$.

En remplaçant, on obtient

$$\left.\begin{array}{l} 3r'^2 + r^2 + \frac{1}{2}\left[2p^2 + 3(p-b)^2 + 3(p-c)^2\right] \\ = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2) \end{array}\right\} \quad (93)$$

En écrivant les formules analogues pour les autres centres Ω' et Ω'', on trouve, après réduction,

$$3(r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2) + 3(a^2 + b^2 + c^2) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) + (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 + \delta''^2) + (a^2 + b^2 + c^2).$$

Mais on a vu (form. 68) que l'on a

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 16R^2.$$

Donc, en substituant, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} 48R^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) \\ \quad + (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 + \delta''^2) + a^2 + b^2 + c^2 \end{array}\right\} \quad (94)$$

34. *La somme des aires des quatre triangles formés en joignant trois par trois les points de contact des cercles de contact est constante, et égale au double de l'aire du triangle donné.*

On prendra l'aire du triangle formé en joignant les trois points de contact intérieurs avec le signe négatif. En premier lieu, prenons le triangle dont le sommet est A et la base a, et construisons le triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle ex-inscrit avec les côtés a, et les prolongements de b et c. Le double de l'aire de ce

triangle est évidemment

$$p^2 \sin A - (p-b)^2 \sin B - (p-c)^2 \sin C - bc \sin A$$

Si l'on fait les constructions identiques pour les autres angles B et C du triangle donné, on trouve pour le double des aires des autres triangles,

$$p^2 \sin B - (p-c)^2 \sin A - (p-a)^2 \sin C - ac \sin B$$
$$p^2 \sin C - (p-a)^2 \sin B - (p-b)^2 \sin A - ba \sin C$$

si l'on ajoute, en mettant en facteur chaque sinus, on trouve des termes tels que

$$[p^2 - (p-c)^2 - (p-b)^2 - bc] \sin A,$$

qui se réduisent par suite des formules (11) et (12), à

$$(4Rr + r^2) \sin A.$$

En ajoutant on trouve pour le double de la somme des trois triangles extérieurs

$$(4Rr + r^2)(\sin A + \sin B + \sin C);$$

mais (form. 24) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$;

donc le double de la somme des trois triangles est

$$(4Rr + r^2) \frac{p}{R} = 4rp + \frac{r^2 p}{R} \qquad (95)$$

Mais $4rp$ représente quatre fois la surface du triangle donné, et $\frac{r^2p}{R}$ est le double de la surface du triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle inscrit.

35. *Dans un triangle quelconque* ABC, *les bissectrices intérieures des angles* A, B, C, *rencontrent les côtés opposés en* A′, B′, C′, *et les bissectrices extérieures de ces angles rencontrent les mêmes côtés en* A″, B″, C″. *Alors, en supposant* $a > b > c$, *on a*

$$\frac{AA''}{A'A''} \cdot \frac{BB''}{B'B''} \cdot \frac{CC''}{C'C''} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{8R^2(a+b+c)} \qquad (96)$$

On a $\quad \frac{c}{b} = \frac{BA'}{CA'}$, ou $(c+b) = \frac{ac}{BA'}$.

Mais le triangle A′AA″ est rectangle; donc

$$\text{Cos}AA''B = \frac{AA''}{A'A''} = \sin AA'B.$$

Mais $\quad \frac{\sin AA'B}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{c}{BA'}$

Donc $$(c + b) = \frac{a \sin AAB}{\sin \frac{A}{2}},$$

ou, en remplaçant sin AA'B par sa valeur

$$\frac{c+b}{a} \sin \frac{A}{2} = \frac{AA''}{A'A''}.$$

En prenant les expressions analogues pour les deux autres côtés, et remarquant que l'on a

$$4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{R},$$

on a, en multipliant membre à membre, la formule qu'il s'agit de démontrer.

36. *Trouver une expression pour les côtés, les angles et les surfaces des triangles excentraux* $\Omega\Omega'\Omega''$, $\Omega\omega\Omega'$, $\Omega'\omega\Omega''$, $\Omega''\omega\Omega$.

$BF = p - a$ est la projection de ΩB; donc $\Omega B = \dfrac{p-a}{\sin \frac{B}{2}}$

De la même manière, on obtient

$$\Omega' B = \frac{p-c}{\sin \frac{B}{2}};$$

Donc $$\Omega B + B\Omega' = \Omega\Omega' = \frac{p-a+p-c}{\sin \frac{B}{2}},$$

ou $$\Omega\Omega' = \frac{b}{\sin \frac{B}{2}} \qquad (97)$$

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC;

alors $$b = 2R \sin B = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

Donc $$\Omega\Omega' = 4R \cos \frac{B}{2} \qquad (98)$$

De la même manière

$$\Omega\Omega'' = 4R \cos \frac{A}{2}, \text{ et } \Omega'\Omega'' = 4R \cos \frac{c}{2}.$$

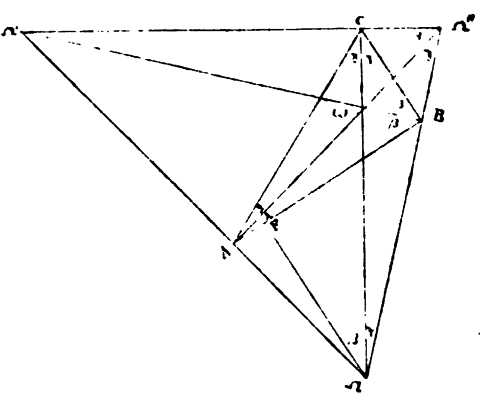
Donc, si P est le demi-périmètre du triangle excentral,

on a $$P = 2R\left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}\right) \qquad (99)$$

L'aire de ce triangle est

$$\frac{1}{2}\,\Omega\Omega'\,.\,\Omega\Omega''\,.\,\sin\frac{1}{2}(A+B)$$

en substituant on trouve



Aire du triangle excentral

$$= 8R^2 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (100)$$

On sait (36) que l'on a

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C$$

d'autre part,

$$\sin A = \frac{a}{2R}\,;\ \sin B = \frac{b}{2R}\,;\ \sin C = \frac{c}{2R}\,.$$

Donc, on trouve pour l'aire du triangle excentral

$$R(a+b+c) = 2Rp \qquad (101)$$

Cette expression coïncide avec celle que nous avons donnée (52), car ABC est le triangle orthocentrique du triangle excentral $\Omega\Omega'\Omega''$, dont le rayon de cercle circonscrit est 2R.

37. La surface du triangle excentral est

$$8R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\,.$$

et le côté opposé à l'angle Ω' est $4R\cos\frac{1}{2}A$.

Donc la perpendiculaire menée du sommet Ω' sur le côté

opposé est $$4R \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \qquad (102)$$

On trouvera facilement le rayon ρ du cercle inscrit dans le triangle excentral; car le rayon du cercle inscrit est égal à l'aire du triangle divisée par son demi-périmètre. Donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \qquad (103)$$

38. La projection de $\Omega\omega$ sur le côté a est égale à c. Donc,

$$\Omega\omega = \frac{c}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{2R \sin C}{\cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{C}{2} \qquad (104)$$

De même $\Omega'\omega = 4R \sin \frac{A}{2}$; $\Omega''\omega = 4R \sin \frac{B}{2}$.

On en déduit

$$\Omega\Omega'.\Omega\Omega''.\Omega'\Omega''.\Omega\omega.\Omega'\omega.\Omega''\omega = 64R^3abc \qquad (105)$$

Le double de l'aire du triangle $\Omega\omega\Omega'$ est

$$\Omega\omega.\Omega\omega' \sin \frac{1}{2}(A + C).$$

On trouve donc pour cette surface

$$8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \qquad (106)$$

que l'on peut écrire

$$8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)$$

En prenant les expressions analogues pour les trois surfaces qui composent le triangle $\Omega\Omega'\Omega''$, on trouve, pour leur somme

$$8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right).$$

Mais comme la somme entre parenthèses est égale à 1, on retrouve l'expression déjà indiquée (form. 100).

(A suivre.)

SUR LE MINIMUM

D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE A PLUSIEURS VARIABLES.

Par Maurice d'Ocagne

La question que nous nous proposons de traiter ici est la suivante :

Etant données m *fonctions* $X_1, X_2 \ldots X_n$ *de* m — 1 *variables,* x, y, ... t *et de la forme*

$$X_k = a_k x + b_k y + \ldots\ldots + h_k t + l_k$$

trouver le minimum de la somme des carrés de ces fonctions (*).

Etablissons d'abord le lemme suivant :

I. Lemme. — *Si les variables* x, y, ... t *satisfont constamment à la relation* $\alpha x + \beta y + \ldots . + \tau t = A$, *le minimum de l'expression* $x^2 + y^2 + \ldots . + t^2$ *a lieu pour* $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \ldots . = \frac{t}{\tau}$.

Démontrons d'abord le théorème pour le cas de deux variables seulement.

Nous avons $\qquad \alpha x + \beta y = B \qquad (1)$

Posons $\qquad x^2 + y^2 = \mu \qquad (2)$

De (1) je tire $\qquad y = \frac{B - \alpha x}{\beta}$.

Portant dans (2) j'ai

$$x^2 + \left(\frac{B - \alpha x}{\beta}\right)^2 = \mu$$

ou $\qquad (\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2\alpha Bx + B^2 - \beta^2\mu = 0.$

(*) Cette question a été traitée fort élégamment et d'une manière générale dans les *Nouvelles Annales* (t. XVIII, janvier 1879, p. 23), par le R. P. Le Cointe, S. J., car le Rév. Père prend m *fonctions linéaires à* n *variables*. Mais sa solution très-savante sort du cadre des mathématiques élémentaires.

Remarquons aussi qu'à cette question se rattache celle que M. G. de Longchamps a si bien traitée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (t. II, p. 197).

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$\alpha^2 B^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(B^2 - \beta^2 \mu) \geq o,$$

ou
$$\alpha^2 B^2 \geq \alpha^2 B^2 + \beta^2 B^2 - \beta^2 \mu (\alpha^2 + \beta^2),$$

ou enfin
$$\mu \geq \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Le minimum de μ est donc $\dfrac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}$.

Portant cette valeur de μ dans (2), l'équation ainsi obtenue jointe à l'équation (2) donne pour valeurs de x et y:

$$x = \frac{\alpha B}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad y = \frac{\beta B}{\alpha^2 + \beta^2},$$

d'où l'on déduit $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{B}{\alpha^2 + \beta^2}$.

Le minimum a donc bien lieu pour $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta}$.

Pour établir le théorème dans toute sa généralité, il nous suffit maintenant de démontrer qu'en prenant, sur un nombre quelconque de variables, deux des variables proportionnelles à leurs coefficients, on diminue la somme des carrés de ces variables.

En effet, attribuons pour le moment aux différentes variables des *valeurs fixes* mais arbitraires, à l'exception de deux d'entre elles, x et y par exemple. Alors dans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots\ldots + \tau t = A$$

la somme $\gamma z + \ldots\ldots + \tau t$ prend une valeur fixe et on a

$$\alpha x + \beta y = A'.$$

A' étant une constante, d'après la première partie du théorème, le minimum de $x^2 + y^2$ aura lieu pour $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta}$. Donc dans ce cas la somme $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots\ldots + t^2$ est diminuée.

En prenant ainsi deux à deux les diverses variables, on voit que le minimum de $x^2 + y^2 + \ldots\ldots + t^2$ a lieu

pour
$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\beta}{y} = \ldots\ldots = \frac{t}{\tau}.$$

II. — Cela posé abordons le problème. Nous avons à chercher le minimum de

$$M = X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots + X_m^2$$

ou, comme nous supposons

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1t + l_1 \\ X_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2t + l_2 \quad (1) \\ &\vdots \\ X_m &= a_mx + b_my + c_mz + \ldots + k_mt + l_m \end{aligned}$$

le minimum de

$$M = (a_1x + b_1y + \ldots + l_1)^2 + \ldots\ldots + (a_mx + b_myt \ldots + l_m)^2$$

Or, considérons les équations

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots\ldots + h_1t + l_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + \ldots\ldots + h_2t + l_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_mx + b_my + \ldots\ldots + h_mt + l_m &= 0 \end{aligned}$$

et supposons qu'il y ait un système des $m - 1$ variables $x, y, \ldots, t$ qui vérifie ces m équations à la fois, c'est-à-dire que le déterminant (*) de ces équations soit nul.

Dans ce cas, la question se termine là, car le minimum de M est alors zéro et a lieu pour les valeurs de $m - 1$ variables qui vérifient à la fois les m équations précédentes.

Mais le plus souvent ces équations n'admettent pas un système de solutions communes, c'est-à-dire que leur déterminant n'est pas nul.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & h_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & h_2 & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_m & b_m & \ldots & h_m & l_m \end{vmatrix} \gtrless 0$$

(*) Je me crois autorisé, tout en restant dans les limites des Mathématiques élémentaires, à employer la notion de déterminant, la théorie des déterminants ayant été exposée d'une manière élémentaire dans ce journal même par M. Bourget (t. Ier, p. 5 et suiv.).

Nous représenterons ce déterminant par la lettre Δ.

Or, dans le système d'équations (1) quels que soient $x, y, \dots t$, on a toujours une valeur pour chacune des quantités $X_1, X_2 \dots X_m$.

Donc les équations.

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y + \dots + h_1t + (l_1 - X_1) &= 0,\\
a^2x + b_2y + \dots + h_2t + (l_2 - X_2) &= 0,\\
&\vdots\\
a_mx + b_my + \dots + h_mt + (l_m - X_m) &= 0,
\end{aligned}$$

doivent toujours être vérifiées à la fois; c'est-à-dire quels que soient $x, y, \dots t$, on doit toujours avoir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots h_1 & l_1 - X_1 \\ a_2 & b_2 \dots h_2 & l_2 - X_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_m & b_m \dots h_m & l_m - X_m \end{vmatrix} = 0,$$

ou, d'après une propriété comme des déterminants (*),

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 \dots l_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_m & b_m \dots l_m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots X_1 \\ a_2 & b_2 \dots X_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_m & b_m \dots X_m \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, le premier de ces déterminants n'est autre que le déterminant Δ défini plus haut. Quant au second, développons-le par rapport aux éléments de la dernière colonne, en représentant par $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_m$ les déterminants mineurs correspondant à $X_1, X_2, \dots X_m$. Nous avons ainsi

$$X_1\delta_1 - X_2\delta_2 + \dots \pm X_m\delta_m = \Delta \qquad (2)$$

en prenant pour $X_m\delta_m$ le signe + ou le signe — suivant que m est impair ou pair.

(*) Voir t. I, p. 11, Propriété 5.

Nous voilà donc amenés à chercher le minimum de $M = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_m^2$, sachant que X_1, X_2, . . . X_m satisfont constamment à la relation (2). Ce minimum aura donc lieu, d'après le lemme précédent établi, pour

$$\frac{X_1}{\delta_1} = \frac{X^2}{-\delta_2} = \ldots = \frac{X_m}{\pm\delta_m}.$$

Si K est la valeur de ces rapports, on voit en multipliant respectivement les deux termes de chacun de ces rapports par δ_1, δ_2, . . . δ_m et prenant le rapport de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs, que

$$K = \frac{\Delta}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_m^2} = \frac{\Delta}{\Sigma\delta_i^2}.$$

Il en résulte que

$$X_1 = \frac{\Delta\delta_1}{\Sigma\delta_i^2}, \; X_2 = -\frac{\Delta\delta_2}{\Sigma\delta_i^2}, \ldots X_m \pm = \frac{\Delta\delta_m}{\Sigma\delta_i^2}.$$

On a ainsi m équations entre les $m - 1$ variables x, y, . . . t. On tire les valeurs de ces variables de $m - 1$ des équations obtenues; comme vérification, ces valeurs doivent satisfaire la m^e équation.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **J. Kœnigs**, élève au Lycée Saint-Louis.

Je me propose de démontrer directement et par la synthèse ce théorème dû à M. Faure :

Tout cercle circonscrit à un triangle autopolaire par rapport à une conique est tel que la longueur de la tangente issue du centre de la conique à ce cercle est égale à* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Soit ARS un triangle autopolaire; la polaire RS du point A coupant la conique aux points B et C, les points R et S divisent harmoniquement le segment BC, de sorte qu'en appelant I le milieu de BC, α le second point de rencontre

* L'auteur appelle *triangle autopolaire* ce que l'on appelle souvent *triangle conjugué*, c'est-à-dire un triangle tel que chacun de ses sommets est par rapport à la conique le pôle du côté opposé. (A. M.)

du diamètre IA avec le cercle circonscrit au triangle ARS, on a
$$IR.IS = IA.I\alpha = IB^2.$$
Le point α est fixe pour tous les cercles circonscrits à des triangles autopolaires ayant un sommet fixe en A, de sorte que $OA.O\alpha$ mesure le carré de la tangente issue du centre O à tous ces cercles. J'observe en outre que si A et α coïncident, l'angle BAC est droit; car dans ce cas $I\alpha = IA = IB$. Autrement dit, A est alors un point du cercle lieu des angles droits circonscrits; on a $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$, et le cercle circonscrit est tangent en A au diamètre OA.

Or, parmi tous les cercles circonscrits à des triangles autopolaires ayant un sommet fixe en A, considérons celui qui est circonscrit à un triangle ayant son sommet R en un point d'intersection de la polaire BC avec le cercle lieu des angles droits circonscrits; d'après la remarque précédente, ce cercle est tangent en R à OB, et par suite
$$OA.O\alpha = OR^2 = a^2 + b^2,$$
ce qui démontre le théorème.

Le même mode de démonstration s'applique au théorème analogue de l'espace, dû à M. Painvin:

La quantité $a^2 + b^2 + c^2$ *mesure le carré de la tangente issue du centre d'une surface du second ordre à une sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué.*

Si on désigne en effet ARST un tétraèdre conjugué, la puissance du centre I de la section par le plan RST conjugué du point A est égale à la puissance de ce point I par rapport au cercle circonscrit RST conjugué par rapport à cette section; c'est-à-dire que cette puissance est égale à $a'^2 + b'^2$, $2a'$ et $2b'$ étant les axes de la section *(Théorème de Faure)*. On voit donc que la sphère circonscrite coupe le diamètre AI en un point fixe α défini par la relation
$$IA.I\alpha = a'^2 + b'^2$$
pourvu que A soit fixe. En particulier, si $IA = I\alpha = \sqrt{a'^2 + b'^2}$, le point A appartient à la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{a'^2 + b'^2}$, laquelle est le lieu des sommets des cônes passant par la conique et capables d'un angle trièdre trirectangle circonscrit.

Donc si $IA = I\alpha$, A est un point de la sphère de Monge, ou le lieu des trièdres trirectangles circonscrits à la surface, et en même temps OA est tangente en A à la sphère ARST. Considérons en particulier la sphère circonscrite à un trétraèdre autopolaire ayant un sommet en A et un autre en R' sur la sphère de Monge. Le point α étant fixe avec A, et OR étant tangent en R' à la sphère AR'ST, on a

$$OA.O\alpha = OR'^2 - a^2 + b^2 + c^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème de M. Laguerre. — *Soit un point* P *et une conique; on joint* P *aux quatre points* A, B, A', B' *où la polaire de* P *coupe la conique et le cercle lieu des angles droits circonscrits; les angles* APA', BPB' *sont égaux.*

Les bissectrices PR, PS, de l'angle APB forment avec la polaire AB un triangle autopolaire rectangle PRS; le cercle circonscrit à ce triangle est donc orthogonal au centre lieu des angles droits circonscrits *(Th. de Faure).* J'en conclus que le diamètre RS du premier cercle est divisé harmoniquement en A' et B' par le second. Le faisceau (P, RSA'B') étant harmonique, et les deux rayons PR, PS rectangulaires, PR, déjà bissectrice de l'angle APB, l'est aussi de l'angle A'PB', ce qui démontre le théorème.

CONCOURS ACADÉMIQUE

ACADÉMIE DE DIJON

Concours de 1879.

Dans un triangle quelconque ABC, on désigne par a, b, c les trois côtés, et par I un point qui détermine sur le côté BC deux segments IB, IC, proportionnels aux nombres p et q. Cela étant, on demande de résoudre les quatre questions suivantes:

1° Calculer en fonction de a, b, c, p et q la longueur x de la droite AI;

2° Déduire de la formule obtenue et en fonction de a, b, c, les longueurs α, β, γ des bissectrices intérieures des angles A, B, C et les longueurs α', β', γ' des bissectrices extérieures de ces mêmes angles;

3° Démontrer que si les deux bissectrices intérieures β et γ sont égales, les côtés correspondants b et c sont égaux;

4° Exprimer en fonction de la surface S du triangle et du rayon R du cercle circonscrit, la quantité Z définie par l'égalité

$$2Z = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha'^2 + \alpha^2} \sin A + \frac{\beta'^2 - \beta^2}{\beta'^2 + \delta^2} \sin B + \frac{\gamma'^2 - \gamma^2}{\gamma'^2 + \gamma^2} \sin C.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

BESANÇON

— Étant données deux circonférences concentriques, de rayons r et r', et un point extérieur A, tel que OA $= d$, mener par ce point une sécante ABC telle que la portion BC, comprise entre les deux circonférences, soit égale à c. On calculera les angles COB et CAO.

DIJON

— Par le point milieu D d'un côté d'un triangle équilatéral, mener une droite telle que ce point D partage intérieurement dans le rapport de 1 à 2 le segment intercepté sur cette droite par les deux autres côtés du triangle, et calculer en fonction du côté a du triangle donné la longueur du même segment.

— On donne deux circonférences tangentes extérieurement. Calculer en fonction de leurs rayons R et R′ la perpendiculaire abaissée du milieu de l'une de leurs tangentes communes sur la ligne des centres.

— Un triangle rectangle et son symétrique par rapport à l'hypoténuse forment un quadrilatère BACA′ dans lequel on peut inscrire une circonférence; calculer le rayon R de cette circonférence en fonction des côtés b et c de l'angle droit.

LILLE

— Calculer à 0′,1 deux angles dont la somme vaille 60° et dont l'un ait un sinus triple du sinus de l'autre.

— Connaissant tous les éléments d'un triangle, évaluer: 1° les segments déterminés sur chaque côté par le point de contact du cercle inscrit; 2° les côtés du triangle formé en joignant ces trois points; 3° la surface du même triangle.

— Quelle valeur faut-il donner à y dans l'équation

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 9y + 1 = 0$$

pour que cette équation, résolue par rapport à x, ait ses deux racines égales? Entre quelles limites doit varier y pour que les valeurs de x soient réelles?

— On donne dans un trapèze ABCD la grande base b, la petite base b' et la hauteur h. On demande à quelle distance x de la petite base il faut mener une parallèle EF à cette base pour que le trapèze ABEF ait une surface donnée S^2.

— Deux droites OA et OB, d'une même longueur constante a, tournent chacune librement autour de O, qui est fixe; leurs extrémités A et B sont des sommets opposés d'un losange articulé ADBC ayant un côté donné c. On demande : 1° la longueur de la tangente menée du point O au cercle mobile décrit de B comme centre et passant par les sommets voisins C, D du losange; 2° quelle relation existe pour toutes les formes que prend successivement le losange entre les deux distances OC et OD de ces sommets au point fixe.

LYON

— Sur trois axes rectangulaires passant par un point O, on prend des longueurs égales OA, OA', OB, OB', OC, OC'; on joint deux à deux les six points A, A', B, B', C, C'. Démontrer qu'il y a une sphère qui touche les huit faces de l'octaèdre ainsi formé, et calculer le volume de cette sphère en fonction de la longueur OA.

— Les côtés opposés AB, CD de la base d'une pyramide quadrangulaire SABCD se coupent en E, et les deux autres côtés en F, de sorte que les faces ASB, CSD se coupent suivant SE, et les faces ASD, BSC, suivant SF. 1° Démontrer que toute section MNPQ faite dans la pyramide par un plan parallèle à ESF est un parallélogramme; 2° déterminer le point M de SD par exemple pour lequel la section est équivalente à un carré donné K^2.

MONTPELLIER

— Un tronc de cône est circonscrit à une sphère R. Son volume est équivalent à $\frac{4}{3}\pi m R^3$, dans lequel m est donné. Calculer les rayons des cercles de base, et discuter les formules trouvées.

NANCY

— Chercher quelles relations doivent exister entre les coefficients du polynôme $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ pour qu'il soit divisible par $x^2 - a^2$.

POITIERS

— On donne le côté AB $= m$ et l'angle A $= 2\alpha$ d'un losange. On fait tourner ce losange successivement autour : 1° de la diagonale AC; 2° de la diagonale BD; 3° du côté AB. On demande la surface et le volume décrits respectivement par l'aire et le périmètre du losange dans chacun de ces

trois cas; on étudiera la variation de ce volume et de cette surface lorsque m restant constant, α varie de toutes les manières possibles.

— Trouver l'angle, compris entre o et 360° qui satisfait à l'équation

$$\frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{5},$$

— On donne deux cordes $c = 4,19$; $c' = 3,25$ menées d'un même point de la circonférence aux deux extrémités d'un même diamètre; on demande l'aire du cercle.

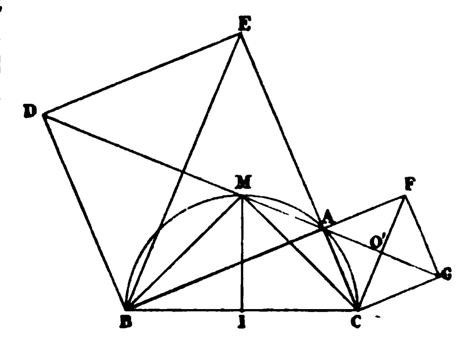
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 139.

Solution par M. Hénon, élève du Lycée de Poitiers.

Du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle on élève une perpendiculaire sur cette hypoténuse. Démontrer que les segments qu'elle détermine sur la droite joignant les centres des carrés construits sur les autres côtés du triangle sont proportionnels aux côtés du triangle.

Soient ABC le triangle et AEDB, ACGF les carrés construits sur AB et AC ayant O et O′ pour centres respectifs. Sur BC décrivons un demi-cercle; il passera en A et coupera OO′ en M. Si on joint M au milieu I de BC, cette droite MI sera perpendiculaire sur BC, car l'angle MAB qui vaut 45° a pour mesure la moitié de l'arc BM, donc cet arc vaut 90° et MI est perpendiculaire sur le milieu de BC. Ceci posé, les deux triangles MOB et MCO′ sont égaux comme ayant MB = MC et OBM = CMO′, ces angles ayant leurs côtés perpendiculaires, de plus ils sont rectangles. Donc OM = O′C,



$MO' = OB$, et comme $\frac{O'C}{OB} = \frac{AC}{AB}$ il en résulte $\frac{OM}{MO'} = \frac{AC}{AB}$.

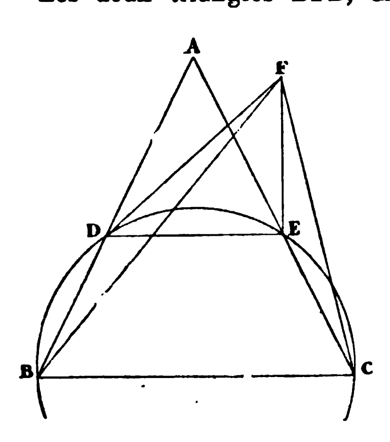
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gélinet, d'Orléans ; Pasadot, de Poitiers ; Cordeau, École Lavoisier ; Peyrabon, Johannet, à Châteauroux ; Deslais, au Mans ; Hoc, de Longwy ; Schlesser, Vermant, Corbeaux, à Saint-Quentin ; Lery, à Pau ; Martin, à Passy ; Tessier, d'Angoulême ; Ailleret, de Versailles ; Landre, à la Flèche ; Gondy, à Pontarlier ; Dupuy, à Grenoble ; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier.

QUESTION 141.

Solution par M. Lannes, élève du Lycée de Tarbes.

Étant donné un triangle ABC, *inscrit dans un cercle, par les points* B *et* C *on fait passer un cercle qui coupe* AC *en* E *et* AB *en* D ; *puis par les points* D, A, E *on mène un cercle qui coupe en* F *le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Démontrez la relation* $\frac{FE + FB}{FC + FD} = \frac{AB}{AC}$.

Les deux triangles DFB, CFE sont semblables comme équiangles, car l'angle DBF est égal à l'angle ECF comme ayant même mesure, l'angle ADF est égal à l'angle AEF pour la même raison et l'angle DFB est égal à l'angle CFE, comme différences d'angles respectivement égaux : on a donc



$$\frac{FB}{FC} = \frac{BD}{EC} = \frac{AB - AD}{AC - AE}$$

d'où l'on tire

(1) $FB \times AC - FB \times AE = FC \times AB - FC \times AD$

Mais à cause de la similitude des triangles DFE, FBC, qui ont un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels, on a

$$\frac{FD}{FB} = \frac{FE}{FC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

d'où
$$FB \times AE = FD \times AB$$
$$FC \times AD = FE \times AC$$

et, en substituant dans l'égalité (1), elle devient

$$(FB + FE)AC = (FC + FD)AB \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{FE + FB}{FC + FD}$$

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Cordeau, École Lavoisier; Foissey, de Dijon; Cadot, Lycée Saint-Louis.

QUESTIONS 142 et 143.

Solution par M. Marcel Vazou, élève du Collége Rollin.

142. — *Par le sommet* P *d'un triangle équilatéral on mène des droites que l'on termine aux perpendiculaires à la base passant par les extrémités; sur ces droites comme côtés on décrit des triangles équilatéraux. Démontrer que le lieu des troisièmes sommets de ces triangles se trouve sur la base et sur une parallèle à la base.*

Soient le triangle équilatéral PAB, xy, $x'y'$ les perpendi culaires aux extrémités. Le point P se trouve à égale distance de ces deux droites, de sorte que le problème proposé peut être remplacé par le suivant :

On donne deux droites xy, x'y' *et un point* P *à égale distance de ces deux parallèles. Par ce point on fait passer des droites terminées aux deux parallèles sur lesquelles on construit des triangles équilatéraux. Lieu des points* M, *troisièmes sommets de ces triangles.*

Soit GK une position de la droite. Du point M, sommet du triangle équilatéral MGK, abaissons la perpendiculaire MBA

sur les parallèles xy, $x'y'$, puis joignons MP et soit PH perpendiculaire sur MBA. Les triangles semblables MPH, GPC donnent :

$$\frac{PH}{PC} = \frac{PM}{PG},$$

or

$$PM = \frac{GK\sqrt{3}}{2} = PG\sqrt{3},$$

donc

$$\frac{PH}{PC} = \sqrt{3}.$$

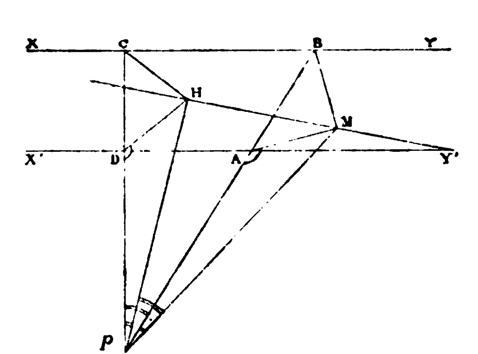
Ce rapport étant constant, et PC étant également constant, PH l'est aussi. Le lieu de M est donc une perpendiculaire aux deux parallèles. En calculant la longueur de la perpendiculaire abaissée du point P sur AB, on trouverait la même valeur que ci-dessus. Par conséquent la perpendiculaire aux deux droites xy, $x'y'$ est la droite AB elle-même.

Il est évident qu'il y a une seconde droite symétrique de AB par rapport à CD qui fait partie du lieu.

Remarque. — Ce problème n'est qu'un cas particulier du suivant :

143. *Par un point* P *pris dans le plan de deux parallèles* xy, x'y', *on mène des droites qui rencontrent ces deux parallèles. Sur les portions de ces droites comprises entre les deux parallèles on construit des triangles semblables à un triangle donné. On demande le lieu des troisièmes sommets de ces triangles.*

Du point P abaissons une perpendiculaire PDC sur les parallèles, et soit le triangle CDH semblable au triangle BAM. Menons HM, PH, PM. A cause des parallèles on a



$$\frac{PD}{PA} = \frac{CD}{AB} = \frac{DH}{AM}.$$

Par suite les triangles PDH et PAM sont semblables comme ayant un angle égal compris entre

côtésproportionnels, d'où il résulte que

$$\frac{PD}{PA} = \frac{PH}{PM}.$$

Les triangles PDA et PHM étant semblables et D étant droit, il s'ensuit que H l'est aussi. Le lieu du point M est donc la droite HM perpendiculaire à PH. Il y a une droite symétrique de la première par rapport à CD qui fait partie du lieu.

Nota. — Ont résolu la question 142 : MM. Tessier, Peyrabon, de Châteauroux; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Lannes, de Tarbes; Foissey, de Dijon; Jouvencel, de Caen; Cordeau, École Lavoisier, Paris; Dumur, de Chartres. Vermand, de Saint-Quentin; Libman, Collége Stanislas; Zuloaga, de Liége; Manceau; Deslais, au Mans; Jacquier, École normale de Charleville; Cadot, Lycée Saint-Louis à Paris.

Ont résolu la question 143 : MM. Gelinet, à Orléans; Pasquier, à Bruxelles.

QUESTION 144.

Solution par M. Zuloaga, étudiant à l'Université de Liége.

Si l'on divise la base BC *d'un triangle en trois parties égales aux points* Q *et* R, *démontrer les égalités suivantes :*

$$\text{Sin BAR. sin CAO} = 4 \text{ sin BAQ. sin CAR.}$$

$$(\text{cotg BAQ} + \text{cotg QAR})(\text{cotg CAR} + \text{cotg RAQ}) = 4 \text{ cosec}^2 \text{ QAR.}$$

Désignons les angles BAR, QAC, BAQ, RAC respectivement par α, β, α', β'. Il s'agit de démontrer en premier lieu la relation $\sin\alpha \sin\beta = 4 \sin\alpha' \sin\beta'$

soit $BQ = a$. Le triangle BAR donne

$$\frac{2a}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin ARB} \qquad (1)$$

De même le triangle BAQ donne

$$\frac{a}{\sin\alpha'} = \frac{AB}{\sin AQB} \qquad (2)$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{2\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{\sin AQB}{\sin ARB} \qquad (3)$$

De même les triangles QAC et RAC donnent

$$\frac{2a}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin ARC} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin \beta'} = \frac{AC}{\sin ARC}$$

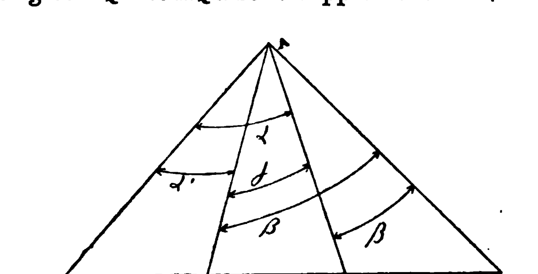
et en divisant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$(4) \qquad \frac{2 \sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{\sin ARC}{\sin AQC}.$$

Multipliant membre à membre les relations (3) et (4) on a

$$\frac{4 \sin \alpha' \sin \beta'}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin AQB \,.\, \sin ARC}{\sin ARB \,.\, \sin AQC}$$

Les angles AQB et AQC sont supplémentaires, ils ont donc



même sinus; il en est de même des angles ARC et ARB; donc, le second membre est égal à 1, et l'on a

$$4 \sin \alpha' \sin \beta' = \sin \alpha \sin \beta. \qquad (A)$$

2° Posons QAR $= \gamma$. Il s'agit de démontrer que l'on a

$$(\text{cotg}\ \alpha' + \text{cotg}\ \gamma)(\text{cotg}\ \beta' + \text{cotg}\ \gamma) = 4 \text{ cosec}^2 \gamma.$$

En effet, on a

$$\text{cotg}\ \alpha' + \text{cotg}\ \gamma = \frac{\sin(\gamma + \alpha')}{\sin \alpha' \sin \gamma}.$$

Or $\gamma + \alpha' = \alpha$, donc

$$\text{cotg}\ \alpha' + \text{cotg}\ \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha' \sin \gamma} \qquad (1)$$

De même $$\text{cotg}\ \beta' + \text{cotg}\ \gamma = \frac{\sin \beta}{\sin \beta' \sin \gamma} \qquad (2)$$

en remarquant que $\gamma + \beta' = \beta$.

Si nous multiplions membre à membre les égalités (1) et (2), on a

$$(\text{cotg}\ \alpha' + \text{cotg}\ \gamma)(\text{cotg}\ \beta' + \text{cotg}\ \gamma) = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha' \sin \beta' \sin^2 \gamma}$$

ou, à cause de l'égalité (A)

$$(\cot \alpha' + \cot \gamma)(\cot \beta' + \cot \gamma) = \frac{4}{\sin^2 \gamma} = \operatorname{cosec}^2 \gamma.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, de Grenoble; Renaud, de Bordeaux; Foissey, de Dijon; d'Arodes, de Mont-de-Marsan; Crevaux, Longueville, de Charleville; Cadot, élève du Lycée Saint-Louis; Élie, du Collége Stanislas; Landre, au Prytanée de La Flèche; Hugot, de Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

184. — Si, par la projection d'un point de la parabole sur la tangente au sommet, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur issu du sommet, ces perpendiculaires vont concourir en un même point. *(Julliard.)*

185. — On considère l'égalité

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

et on propose d'étudier les variations de y quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. En supposant $a > b$, on propose de démontrer :

1° Que a est le maximum de y;

2° Que b est le minimum de y;

3° Que si l'on donne à y une valeur comprise entre a et b, l'équation bicarrée qui donne x a ses quatre racines réelles, et que si l'on désigne par x_1 l'une des racines, les trois autres sont données par les égalités

$$x_1 + x_2 = 0; \quad x_1x_3 + 1 = 0; \quad x_1x_4 - 1 = 0.$$

(De Longchamps.)

186. — On considère un losange $A_1A_2A_3A_4$. Soit C_4 le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$. On a ainsi quatre points C_1, C_2, C_3, C_4. On prend les milieux des longueurs A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4. Démontrer que la figure formée par ces quatre points est un losange homothétique à celui des points $C_1C_2C_3C_4$. *(De Longchamps.)*

187. — Décrire une circonférence ayant son centre sur une circonférence donnée, et coupant sous des angles donnés deux droites données.

188. — Dans un triangle donné, inscrire un rectangle de diagonale minima, et donner la longueur de la diagonale. *(W.-J.-C. Miller.)*

189. — Montrer que si, par un même point de l'arête d'un dièdre, on mène dans chaque face une droite formant un même angle α avec l'arête, l'angle de ces deux droites ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

190. — Trouver la hauteur d'un segment sphérique à une base qui soit la m^e partie de la sphère.

191. — Partager un tronc de cône par un plan parallèle aux bases de façon que la partie inférieure soit contenue n fois dans le tronc tout entier.

192. — Le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle formé en joignant les points de contact du cercle inscrit à un triangle ABC, a pour surface

$$\frac{16T^3}{a^2b^2c^2(a+b+c)^2}$$

T étant la surface du triangle ABC, et a, b, c les longueurs des côtés. *(Corr. Catalan.)*

193. — On joint les sommets A,B,C d'un triangle aux points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2 qui divisent en trois parties égales les côtés opposés. Les droites AA_1, BB_2, CC_1 se coupent en trois points A', B', C'; les droites AA_2, BB_1, CC_2 en trois autres points A'', B'', C''. Démontrer que chacun des triangles A'B'C', A''B''C'' est le septième du triangle ABC. *(Corr. Catalan.)*

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 18324-9.

THÉORIE DES CENTRES

DES MOYENNES HARMONIQUES

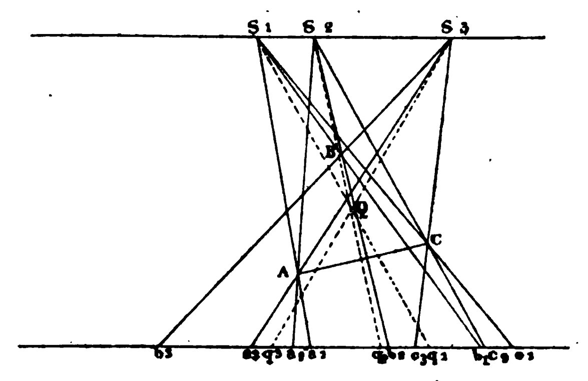
Par M. Kœhler

(*Suite*, voir page 289).

Centres des moyennes harmoniques d'un système de points non en ligne droite.

II. **Théorème.** — *Si l'on donne un nombre quelconque de points dans un plan,* A, B, C . . . *et une droite* SS', *les axes des moyennes harmoniques de* SS' *par rapport au faisceau* SABC. . . *passent constamment par un point fixe, lorsque le sommet* S *se déplace sur la droite donnée ; ce point est le* centre des moyennes harmoniques *du système* ABC . . . *par rapport à* SS' (*fig.* 9).

Je considère plusieurs positions $S_1, S_2, S_3 \ldots$ du sommet,



et je coupe par une parallèle à S_1S_2 tous les faisceaux obtenus; cette parallèle rencontre les axes des moyennes harmoniques relatifs à chacun d'eux aux points $q_1, q_2, q_3, \ldots$ qui sont respectivement les centres des moyennes distances de groupes $(a_1\, b_1\, c_1 \ldots)$, $(a_2\, b_2\, c_2 \ldots)$, etc. Je rapporte tous les segments à une origine O prise sur la parallèle, et j'aurai

$$Oq_1 = \frac{Oa_1 + Ob_1 + Oc_1 + \ldots}{n}$$

$$Oq_2 = \frac{Oa_2 + Ob_2 + Oc_2 + \ldots}{n} \quad \ldots\ldots$$

et par suite $q_1q_2 = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + \ldots}{n}$

$$q_2q_3 = \frac{a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 + \ldots}{n} \quad \ldots\ldots$$

Mais on a la suite des rapports égaux :

$$\frac{a_1a_2}{s_1s_2} = \frac{a_2a_3}{s_2s_3} = \ldots\ldots = \lambda$$

(λ désignant le rapport des distances du point A aux deux parallèles). $\dfrac{b_1b_2}{s_1s_2} = \dfrac{b_2b_3}{s_2s_3} = \ldots\ldots = \mu.$

De même pour les autres segments.

On conclut de là :

$$q_1q_2 = s_1s_2 . \frac{\lambda + \mu + \nu + \ldots}{n}.$$

$$q_2q_3 = s_2s_3 . \frac{\lambda + \mu + \nu + \ldots}{n}.$$

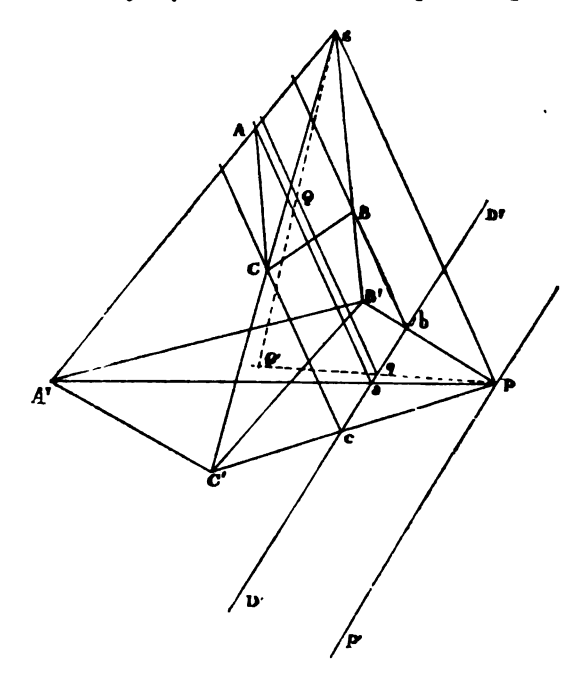
Les deux parallèles étant divisées en parties proportionnelles aux points q_1, q_2, q_3, . . . et s_1, s_2, s_3, . . . on en conclut que les droites s_1q_1, s_2q_2, s_3q_3, . . . se coupent en un même point Q.

12. Poncelet a donné de ce théorème une autre démonstration qui a l'avantage de montrer la connexité entre le centre des moyennes harmoniqus et le centre des moyennes distances du système de points A, B, C . . .

Le centre des moyennes distances de n points A, B, C . . . situés dans un plan, est un point Q tel que, si l'on projette A, B, C, . . . Q sur une droite quelconque du plan par des projetantes parallèles, inclinées sur cette droite ou perpendiculaires, on a toujours la relation $Qq = \dfrac{Aa + Bb + \ldots}{n}$.

On sait que l'on retrouve toujours le même point Q, quelle que soit la droite donnée et quelle que soit la direction des projetantes.

Soit DD′ l'intersection du plan ABC . . . avec un autre plan M arbitraire; je considère un système de projetantes parallèles A*a*, B*b*, . . . Q*q*. Il est évident que le point *q* est le centre des moyennes distances des projections *a*, *b*, *c* . . . Cela posé, je prends un point quelconque S dans l'espace comme centre de projection, et je projette A, B, C, . . . Q sur le plan M en A′, B′, C′, . . . Q′. Je mène SP parallèle à A*a*, B*b*, . . . jusqu'à la rencontre du plan M, puis PP′ parallèle à DD′. Les droites PA′, PB′, . . . PQ′ seront les perspectives du système de projetantes parallèles tracées dans le plan ABC, et la droite P*q*Q′ sera l'axe des moyennes harmoniques du faisceau PA′B′C′ . . ., relatif à PP′. Si l'on change l'orientation des projetantes, le système de points *a*, *b*, *c*, . . . *q* se déplace sur DD′; le point P se déplace sur PP′; mais la droite mobile P*q* passe toujours par le point fixe Q′, ce qu'il fallait prouver *(fig. 10)*.



Centres harmoniques des divers ordres.

13. **Définition.** — Si l'on donne sur une droite n points $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ et un pôle p et si l'on cherche un point q tel que la somme des produits r à r des n rapports $\frac{qa_1}{pa_1}, \frac{qa_2}{pa_2}, \ldots \frac{qa_n}{pa_n}$ soit égale à zéro, a sera un *centre harmonique* du r^{me} *ordre* du système de points $a_1, a_2 \ldots a_n$ par rapport au pôle p.

Si l'on rapporte tous les points à l'origine p, on aura, en posant $pq = x$, $pa_1 = a_1$, $pa_2 = a_2$ etc. . . ., une équation du r^e degré en x composée de $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$ termes de la forme $\left(\frac{a_1 - x}{a_1} . \frac{a_2 - x}{a_2} \ldots \frac{a_r - x}{a_r}\right)$. Cette équation détermine r points. On peut considérer ainsi des centres harmoniques d'ordres $n-1$, $n-2$, . . . 3, 2, 1. Le nombre des centres de chaque ordre est égal à l'ordre. Il y a un seul centre du premier ordre, c'est précisément le centre des moyennes harmoniques. L'étude des propriétés de ces divers centres est de la plus haute importance dans la théorie des courbes algébriques. Je me bornerai à étudier en détail un système de trois points donnant lieu à deux centres du second ordre et à un centre du premier; et j'indiquerai en passant les généralisations les plus importantes et les plus faciles à saisir.

14. **Théorème I.** — *Si* q *est un centre harmonique du second ordre du système des trois points* a, b, c, *par rapport au pôle* p, *réciproquement* p *est un centre harmonique du premier ordre du même système, mais par rapport au pôle* q.

On a par définition

$$\frac{qb}{pb} . \frac{qc}{pc} + \frac{qc}{pc} . \frac{qa}{pa} + \frac{qa}{pa} . \frac{qb}{pc} = o \qquad (7)$$

en multipliant chaque terme par $pa.\ pb.\ pc$ et divisant par $qa.\ qb.\ qc$, il vient $\frac{pa}{qa} + \frac{pb}{qb} + \frac{pc}{qc} = 0$, et cette équation définit le centre des moyennes harmoniques p des points a, b, c par rapport au pôle q.

Ce théorème a déjà été donné sous une autre forme (7); nous avons vu qu'un point donné p peut être considéré comme centre des moyennes harmoniques relativement à deux points différents donnés par l'équation

$$x^2(a+b+c) - 2x(bc+ca+ab) + 3abc = 0 \quad (8).$$

Ces deux points sont précisément les centres du second ordre, car l'équation (8) n'est autre chose que l'équation (7) développée, en faisant $pq = x$, $pa = a$, etc.

En général si q est un centre d'ordre r d'un système de n points par rapport au pôle p, réciproquement p est un centre d'ordre $(n-r)$ du même système par rapport au pôle q.

Théorème II. — *Si* q_1, q_2 *sont les centres du second ordre du système* a, b, c *par rapport au pôle* p, *le centre du premier ordre du système* q_1, q_2 *par rapport à* p (*c'est-à-dire le conjugué harmonique* Q *de* p) *est en même temps le centre des moyennes harmoniques de* a, b, c *par rapport au même pôle.*

On a $$\frac{2}{pQ} = \frac{1}{pq_1} + \frac{1}{pq_2}.$$

L'équation $$\frac{qb}{pb} \cdot \frac{qc}{pc} + \ldots = 0$$

peut s'écrire

$$\left(\frac{pb-pq}{pb}\right)\left(\frac{pc-pq}{pc}\right) + \ldots = \left(1-\frac{pq}{pb}\right)\left(1-\frac{pq}{pc}\right) + \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{pq}-\frac{1}{pb}\right)\left(\frac{1}{pq}-\frac{1}{pc}\right) + \ldots$$

$$= 3\left(\frac{1}{pq}\right)^2 - \frac{2}{pq}\left(\frac{1}{pa}+\frac{1}{pb}+\frac{1}{pc}\right) + \frac{1}{pb\,.\,pc} + \frac{1}{pc\,.\,pa} + \frac{1}{pa\,.\,pb} = 0$$

La somme des racines est

$$\frac{1}{pq_1} + \frac{1}{pq_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{pa}+\frac{1}{pb}+\frac{1}{pc}\right) = \frac{2}{pQ}$$

Donc on a $\frac{1}{pQ} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc}$, ce qui montre que Q, conjugué harmonique de p par rapport à q_1, q_2 est le centre des moyennes harmoniques de a, b, c par rapport à p.

Théorème III. — *Si* (q_1, q_2) (q'_1, q'_2), *sont respectivement les centres harmoniques du système* (a, b, c) *pour deux*

pôles différents p, p', *le conjugué harmonique de* p *par rapport à* q'_1, q'_2 *coïncidera avec celui de* p' *par rapport à* q_1, q_2.

Je rapporte les deux pôles p, p', et les points a, b, c à une origine arbitraire O prise sur la droite abc; soient $Op = p$, $Oa = A$, $Ob = B$, etc. Dans l'équation (8), qui a pour racines les distances du pôle p aux deux centres q_1 et q_2, il faudra remplacer x, a, b, c par $X - p$, $A - p$, $B - p$, $C - p$.

Elle deviendra $(X - p)^2(A + B + C - 3p) - 2(X - p)$
$$[(B - p)(C - p) + (C - p)(A - p) + (A - p)(B - p)]$$
$$+ 3(A - p)(B - p)(C - p) = 0,$$
et aura pour racines les distances Oq_1, Oq_2. En effectuant les multiplications et posant pour abréger
$$A + B + C = S_1$$
$$BC + CA + AB = S_2$$
$$ABC = S_3$$
on a : $X^2(S_1 - 3p) - 2X(S_2 - pS_1) + 3S_3 - pS_2 = 0$ (9).

De même les distances Oq'_1, Oq'_2, sont données par l'équation
$$X'^2(S_1 - 3p') - 2X'(S_2 - p'S)^1 + 3S_3 - p'S_2 = 0 \ (9').$$

Pour avoir le conjugué harmonique Q de p' par rapport aux points q_1 et q_2, il faut partir de la relation
$$\frac{2}{p'Q} = \frac{1}{p'q_1} + \frac{1}{p'q_2}$$
ou bien $$\frac{2}{OQ - p'} = \frac{1}{X_1 - p'} + \frac{1}{X_2 - p'},$$
X_1 et X_2 désignant les longueurs Oq_1, Oq_2, racines de l'équation (9).

On tire de là $OQ = \dfrac{2X_1X_2 - p'(X_1 + X_2)}{X_1 + X_2 - 2p'}$
et comme
$$X_1 + X_2 = \frac{2(S_2 - pS_1)}{S_1 - 3p}, \quad X_1X_2 = \frac{3S_3 - pS_2}{S_1 - 3p}$$
il vient $$OQ = \frac{6S_3 - 2pS_2 - 2p'(S_2 - S_1p)}{2(S_2 - pS_1) - 2p'(S_1 - 3p)}$$
$$= \frac{6S_3 - 2S_2(p + p') + 2pp'S_1}{2S_2 - 2S_1(p + p') + 6pp'}$$

Pour obtenir le conjugué de p par rapport aux points

q'_1, q'_2, il suffit évidemment de remplacer dans l'expression précédente p par p', et p' par p; comme elle est symétrique par rapport à p et p', elle ne change pas, et le théorème est démontré.

Théorème IV. — *Les centres harmoniques du second ordre de tous les points de la droite* abc *par rapport au système* (a, b, c) *forment une involution quadratique.*

Ce théorème résulte immédiatement de l'équation (9) qui peut s'écrire $S_1X^2 - 2S_2X + 3S_3 - p(3X^2 - 2S_1X + S_2) = 0$; comme elle est de la forme $ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0$, les groupes de points qu'elle détermine, quand on fait varier p, sont en involution.

Pour avoir le point central de l'involution, il faut supposer qu'une des valeurs de X devient infinie, ce qui donne $S_1 - 3p = 0$ ou $p = \frac{S_1}{3} = \frac{A + B + C}{3}$. Le point p, par rapport auquel on prend les centres harmoniques, est alors le centre des moyennes distances de a, b, c. Le point central est donné par celle des valeurs de X qui n'est pas infinie, c'est-à-dire

$$X = \frac{3S_3 - pS_2}{2(S_2 - pS_1)} = \frac{3S_3 - \frac{S_1S_2}{3}}{2\left(S_2 - \frac{S_1^2}{3}\right)} = \frac{9S_3 - S_1S_2}{6S_2 - 2S_1^2}.$$

Si l'on fait coïncider le point p avec un des points du système a, b, c, avec a par exemple, il faut faire $p = A$ dans l'équation (9) ou bien $a = 0$ dans l'équation (8), qui est mieux appropriée à ce cas particulier. On obtient alors $x^2(b + c) - 2bcx = 0$, d'où $x' = 0$, $x'' = \frac{2bc}{b + c}$. L'un des centres est le point a lui-même, l'autre est le conjugué harmonique de a par rapport au segment bc.

Soient α, β, γ les conjugués harmoniques de a, b, c par rapport à (b, c), (c, a), (a, b) respectivement. La connaissance des segments $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ qui font partie de l'involution, ou même de deux d'entre eux seulement, permet de construire le point central. Il suffit de décrire deux circonférences sur

$a\alpha$, $b\beta$ comme diamètres ; la corde commune passe au point central. On voit aussi que les points doubles de l'involution sont imaginaires; car les segments $a\alpha$, $b\beta$ empiètent nécessairement l'un sur l'autre.

Remarque. — On peut ajouter que les pôles p et les points milieux des segments q_1q_2 qui leur correspondent, déterminent sur la droite abc deux divisions homographiques. La distance de l'origine au point milieu z du segment q_1q_2 qui répond au point p est donnée, en effet, d'après l'équation (9) par la formule $z = \frac{S_2 - pS_1}{S_1 - 3p}$; on a donc entre les points variables z et p une relation d'homographie $3pz - S_1(z+p) + S_2 = 0$. Les deux divisions sont même en involution, puisque z et p ont le même coefficient dans la relation précédente.

Théorème V. — *Soit* q *un centre harmonique du second ordre pour un système de trois points* a, b, c *en ligne droite, par rapport à un pôle* p; *si l'on projette tous ces points sur une transversale quelconque par des rayons issus d'un centre* S, *le point* q', *projection de* q, *sera un centre harmonique du second ordre pour le système des points* a', b', c', *projections de* a, b, c, *et pour le pôle* p', *projection de* p.

La démonstration de ce théorème peut être calquée sur celle que j'ai donnée au n° 6 pour la projectivité du centre des moyennes harmoniques. On a $\frac{qa}{pa} = \lambda \frac{q'a'}{p'a'}$, $\frac{qb}{pb} = \lambda \frac{q'b'}{p'b'}, \ldots$ etc.

La relation $\frac{qb}{pb} \cdot \frac{qc}{pc} + \frac{qc}{pc} \cdot \frac{qa}{pa} + \frac{qa}{pa} \cdot \frac{qb}{pb} = 0$ entraîne donc la suivante $\frac{q'b'}{p'b'} \cdot \frac{q'c'}{p'c'} + \frac{q'c'}{p'c'} \cdot \frac{q'a'}{p'a'} + \frac{q'a'}{p'a'} \cdot \frac{q'b'}{p'b'} +$

D'après cela on peut appliquer à un faisceau de rayons issus d'un même point ce qui a été dit pour un système de points en ligne droite, considérer les *axes harmoniques* du second ordre d'un faisceau de trois rayons par rapport à un autre rayon issu d'un même centre, et appliquer aux axes

harmoniques les théorèmes démontrés pour les centres harmoniques.

La propriété projective s'étend manifestement aux centres et axes harmoniques de tous les ordres. Cela résulte de ce que l'équation de définition est homogène par rapport aux quotients tels que $\frac{qa}{pa}$. *(A suivre.)*

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage ***A Treatise on some new geometrical methods,***

Par James Booth, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite.* Voir page 298.)

---

39. *Le carré de la distance de deux centres des cercles ex-inscrits à un triangle surpasse le carré de la somme de leurs rayons du carré du côté opposé dans le triangle.*

Soient r' et r'' les rayons des cercles opposés aux angles A et C du triangle. On a

$$r' = \frac{pr}{p-a}\,;\quad r'' = \frac{pr}{p-c}.$$

Donc $$r' + r'' = \frac{prb}{(p-a)(p-c)} = \frac{p^2r^2b\,(p-b)}{r.p^2r^2},$$

ou $$r' + r'' = \frac{b(p-b)}{r} = b \operatorname{cotg} \frac{B}{2}.$$

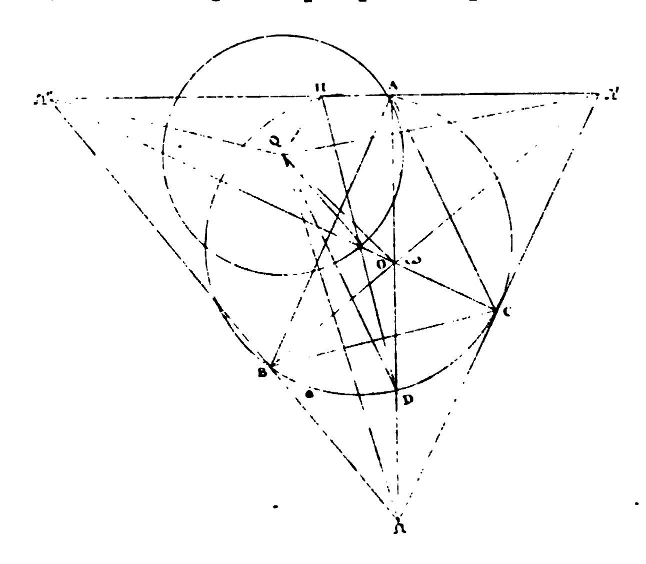
Soit $\Omega\Omega'$ la ligne qui joint les centres Ω et Ω' alors on a (form. 97) : $$\Omega\Omega' = b \operatorname{coséc} \frac{B}{2}.$$

Donc

$$\Omega\Omega'^2 - (r' + r'')^2 = b^2\left(\operatorname{coséc}^2 \frac{B}{2} - \operatorname{cotg}^2 \frac{B}{2}\right) = b^2. \qquad (107)$$

40. *La somme des carrés des tangentes menées des quatre centres des cercles de contact d'un triangle à un cercle quelconque passant par le centre du cercle circonscrit, est égale à trois fois le carré du diamètre du cercle circonscrit.*

Soient ω, Ω' Ω'' les centres des quatre cercles de contact, O le centre du cercle circonscrit par lequel passe le diamètre HD, perpendiculaire à la base BC. Soit Q le centre d'un cercle quelconque passant par le centre du



cercle circonscrit. Joignons le point Q aux points ω, Ω, Ω', Ω'', O, H, D, et joignons le point H au point C ainsi que D au point C. On a

$$Q\Omega^2 + Q\omega^2 = 2QD^2 + 2DC^2, \text{puisque } DC = D\omega.$$

$$Q\Omega'^2 + Q\Omega''^2 = 2QH^2 + 2HC^2$$

Mais $2QD^2 + 2QH^2 = 4R'^2 + 4R^2$

et $2DC^2 + 2CH^2 = 8R^2$.

Donc

$$(Q\omega^2 - R'^2) + (Q\Omega^2 - R'^2) + (Q\Omega'^2 - R'^2) + (Q\Omega''^2 - R'^2) = 12R^2 \quad (108)$$

Mais, dans le premier membre, chaque expression entre parenthèses représente le carré de la tangente menée de l'un des centres des cercles de contact au cercle Q dont le rayon est R'.

Si $R' = 0$, c'est-à-dire si le cercle arbitraire se réduit à un point, on retrouve un théorème déjà établi (form. 47).

41. *Si les côtés du triangle excentral $\Omega\Omega'\Omega''$ sont prolongés, et que l'on prenne les cercles de contact touchant les côtés de ce triangle, de manière que les centres de ces cercles forment un nouveau triangle excentral, et si l'on continue de même, les triangles successifs ainsi formés tendent vers un triangle équilatéral.*

Soient A, B, C les angles du triangle donné, A', B', C' ceux du premier triangle dérivé, A'', B'', C'' ceux du second, et ainsi de suite. Alors

$$A' = \frac{1}{2}(B + C);\ B' = \frac{1}{2}(C + A);\ C' = \frac{1}{2}(A + B);$$

$$\text{Donc } B' - A' = \frac{1}{2}(A - B);\ C' - B' = \frac{1}{2}(B - C).$$

$$A' - C' = \frac{1}{2}(C - A).$$

Donc les différences entre les angles du premier triangle dérivé sont les moitiés des différences entre les angles du triangle primitif.

On aura de même

$$A'' = \frac{1}{2}(B' + C');\ B'' = \frac{1}{2}(C' + A');\ C'' = \frac{1}{2}(A' + B').$$

et par suite

$$A'' - B'' = \frac{1}{2}(B' - A') = \frac{1}{4}(A - B).$$

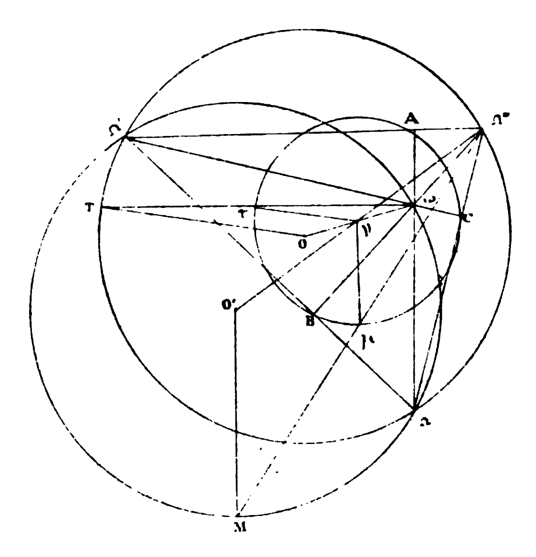
Donc la différence entre les angles A'' et B'' est le quart de la différence entre les angles A et B; on a un résultat analogue pour les autres angles; donc les triangles successifs ont pour limite un triangle équilatéral.

SUR LES TRIANGLES DONT LES SOMMETS SONT TROIS DES QUATRE CENTRES DES CERCLES INSCRITS ET EX-INSCRITS.

42. Dans le triangle donné ABC, considérons le centre ω du cercle inscrit, et les centres Ω, Ω', Ω'' des cercles ex-inscrits. Menons les lignes $B\Omega$, $B\Omega'$ et $B\omega$. On sait que $B\omega$ est la bissectrice de l'angle B, et que $B\Omega$ est la bissectrice de l'angle extérieur; donc $B\omega$ et $B\Omega$ se coupent à angle droit. Il en résulte que $\Omega B\Omega'$ est une ligne droite. En d'autres termes, les lignes qui joignent les centres des cercles ex-inscrits passent par les sommets du triangle ABC.

Le triangle $\Omega\Omega'\Omega''$ peut s'appeler le *triangle excentral principal.*

Nous avons trois autres triangles excentraux en prenant le centre ω avec deux des centres des cercles ex-inscrits.



Les côtés de ces trois triangles passent aussi par les sommets ABC.

Tous les cercles circonscrits à ces quatre triangles sont égaux. En effet, on sait que le diamètre du cercle circonscrit à un triangle est égal à l'un des côtés divisé par le sinus de l'angle opposé. Mais $\sin \Omega\Omega'\Omega'' = \sin \Omega\omega\Omega''$, car l'angle $A\omega B$ est le supplément $A\Omega'B$.

Le triangle ABC est le triangle orthocentrique du triangle excentral $\Omega\Omega'\Omega''$, et ω est l'orthocentre du même triangle excentral. Cela est évident, car $A\Omega$, $B''\Omega$, $C\Omega'$ sont les hauteurs du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$, et elles passent par ω.

Un quelconque des quatre centres des cercles de contact est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres centres des cercles de contact. Ainsi Ω est l'orthocentre du triangle $\Omega'\omega\Omega''$. Cela est évident à l'inspection de la figure.

43. Puisque les perpendiculaires menées des sommets d'un triangle sur les côtés du triangle orthocentrique se coupent en un point, centre du cercle circonscrit au triangle donné (voir n° 16), il en résulte que :

Si des quatre centres des cercles de contact on abaisse douze perpendiculaires sur les côtés, ces perpendiculaires se rencontrent trois par trois en quatre points, et ces quatre points sont les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles excentraux.

44. Puisque le triangle ABC est le triangle orthocentrique de l'un des triangles excentraux, le rayon du cercle circonscrit à ABC est la moitié du rayon du cercle $\Omega\Omega'\Omega''$ ou de l'un quelconque de ses égaux $\Omega\omega\Omega'$, etc.

45. *Le cercle des neuf points* ABC *bissecte tous les rayons vecteurs menés de l'orthocentre de l'un des triangles excentraux à la circonférence circonscrite au même triangle.*

Soit ω l'orthocentre et ABC le cercle des neuf points du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$. Soit ν le centre du cercle des neuf points, on sait que ν est le milieu de $O\omega$, et comme le rayon OT du cercle $\Omega\Omega'\Omega''$ est double de celui du cercle des neuf points ABC, OT est le double de $\nu\tau$. Donc OT est parallèle à $\nu\tau$ et $\omega\nu = \tau T$.

Si l'on prend le triangle $\Omega\omega\Omega'$, dont Ω'' est l'orthocentre, et O' le centre du cercle circonscrit au triangle considéré, alors O'M est double de $\nu\mu$, et $\Omega''O'$ est double de $\Omega''\nu$. Donc $\Omega''\mu = \mu M$. Donc le cercle des neuf points bissecte les rayons menés de l'orthocentre Ω'' à la circonférence du cercle circonscrit au triangle $\Omega\omega\Omega'$.

46. *Les lignes qui joignent l'orthocentre de l'un des triangles excentraux au centre du cercle circonscrit à ce triangle passent par un même point.* — Ce théorème est évident, car toutes ces lignes passent par le centre du cercle des neuf points.

47. *Si par les centres Ω, Ω', Ω'' des cercles de contact, on mène des lignes droites qui passent par les milieux des côtés opposés du triangle, ces lignes prolongées se coupent en un même point.*

Soit I' le milieu du côté BC; alors, la surface du triangle BΩI est égale à celle du triangle ΩCI. Mais le double de l'aire du triangle ΩBI est égal à ΩI.ΩB sin BΩI, et le double de l'aire du triangle ΩCI est égal à ΩI.ΩC sin CΩI. Or, en divisant par ΩI, on a

$$\frac{\sin B\Omega I}{\sin C\Omega I} = \frac{\Omega C}{\Omega B} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

En formant des expressions analogues pour les centres Ω' et Ω'' on trouve

$$\frac{\sin B\Omega I\,.\,\sin C\Omega''I'\,.\,\sin A\Omega'I''}{\sin C\Omega I\,.\,\sin B\Omega'I''\,.\,\sin A\Omega''I'} = \frac{\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta} = 1.$$

Mais on sait que lorsque trois droites menées par les sommets d'un triangle font avec chaque côté des angles tels que le produit des sinus de trois des angles est égal au produit des sinus des trois autres angles, ces droites passent par un même point.

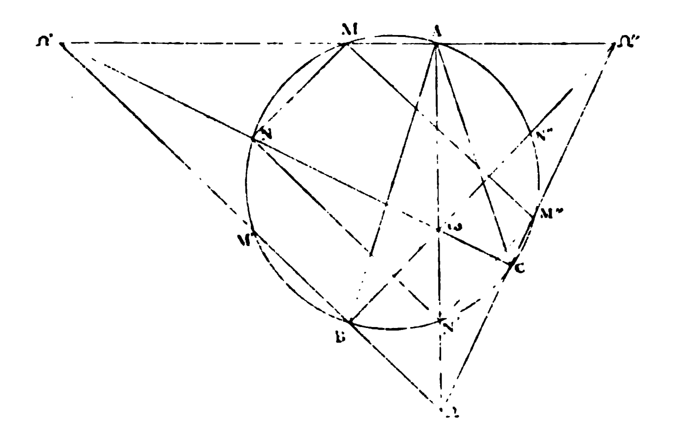
SUR LES CERCLES RADICAUX D'UN TRIANGLE.

48. Si, sur les six lignes qui joignent deux à deux les centres des quatre cercles de contact, comme diamètre, on décrit des circonférences, il est facile de voir (45) que les centres de ces six circonférences sont sur la circonférence du cercle ABC. Nous diviserons ces diamètres en deux séries : ceux qui ont une extrémité en ω, et ceux dont les extrémités sont les centres Ω, Ω', Ω'' des cercles de contact extérieurs, et nous appellerons les premiers les diamètres *intérieurs*, et les seconds les diamètres *extérieurs*. Les centres des cercles radicaux intérieurs sont aux points milieux N, N', N'' des arcs AB, BC, CA, tandis que les centres des cercles radicaux extérieurs sont aux points milieux M, M', M'', des suppléments de ces arcs, de telle sorte que les six centres des cercles radicaux sont sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC et sur trois diamètres respectivement perpendiculaires aux trois côtés.

Les côtés du triangle sont les axes radicaux d'un système formé d'un cercle *intérieur* et d'un cercle *extérieur*, tandis

que les bissectrices sont les axes radicaux d'un système formé de deux cercles de la même espèce.

Puisque ω est l'orthocentre du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$, $\omega N = N\Omega'$ et $\omega N' = N'\Omega$. Donc NN' est parallèle à $\Omega\Omega'$ et égal à la moitié de cette ligne. De la même manière, puisque Ω'' est



l'orthocentre du triangle $\Omega\omega\Omega'$, MM'' est égal à la moitié de $\Omega\Omega'$ et lui est parallèle. Donc MM'' = NN'; de même NM = N'M'' et la figure NMM''N' est un rectangle dont les côtés sont évidemment

$$2R \cos \frac{B}{2} \text{ et } 2R \sin \frac{B}{2}.$$

49. On a vu (98) que l'on a

$$\Omega\Omega'' = 4R \cos \frac{A}{2}, \Omega\Omega' = 4R \cos \frac{B}{2}, \Omega'\Omega'' = 4R \cos \frac{C}{2}$$

et aussi (104)

$$\Omega'\omega = 4R \sin \frac{A}{2}, \Omega''\omega = 4R \cos \frac{A}{2}, \Omega\omega = 4R \sin \frac{C}{2}.$$

En élevant ces expressions au carré, on a, en les ajoutant deux à deux :

$$\left.\begin{aligned} \Omega\omega^2 + \Omega'\Omega''^2 = 16R^2; \ \Omega'\omega^2 + \Omega''\Omega^2 = 16R^2; \\ \Omega''\omega^2 + \Omega\Omega'^2 = 16R^2. \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

Donc *la somme des carrés d'un côté d'un triangle et de la*

distance de son orthocentre au sommet opposé au côté considéré est égale au carré du diamètre du cercle circonscrit.

On a vu que, si P représente le demi-périmètre du triangle excentral, on a

$$P = 2R\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

De même, si P′ est la demi-somme des lignes menées du point ω aux sommets du triangle excentral, on a

$$P' = 2R\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right).$$

On a, en reprenant les expressions ci-dessus,

$$\Omega\Omega'^2 + \Omega'\Omega''^2 + \Omega''\Omega^2$$
$$= 16R^2\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right).$$

En réduisant, en remplaçant d'abord les cosinus par leurs valeurs, on trouve, en s'appuyant sur des formules déjà démontrées (12)

$$\Omega\Omega'^2 + \Omega'\Omega''^2 + \Omega''\Omega^2 = 8R(4R + r) \qquad (109)$$

On trouve de la même manière

$$\Omega\omega^2 + \Omega'\omega^2 + \Omega''\omega^2 = 8R(4R - r). \qquad (110)$$

Donc la somme des carrés des côtés du triangle excentral est égale à $8R(4R + r)$, et la somme des carrés des distances des sommets de ce triangle au point ω est égale à $8R(4R - r)$.

50. Les propriétés déjà démontrées nous permettent d'établir que *les six axes radicaux des cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle, pris par groupes de deux, se coupent à angle droit au milieu des côtés d'un triangle et sont parallèles aux côtés et aux hauteurs du triangle excentral principal.*

De même, si ABC est un triangle, ω, Ω, Ω′, Ω″ les quatre centres de contact, *on peut avec ces quatre centres former trois quadrilatères complets. Les douze cercles circonscrits aux triangles qui composent ces quadrilatères passent quatre par quatre aux points* A, B, C, *et leurs centres sont confondus deux par deux en six points sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *(A suivre.)*

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE DIJON.

Session de juillet 1879.

Un polygone régulier de douze côtés étant inscrit dans un cercle de rayon r, on demande de calculer en fonction de r : 1° le côté c ; 2° l'apothème a ; 3° la surface S de ce polygone. On aura soin de simplifier le plus possible chacune des expressions obtenues.

— Déterminer les valeurs de x qui rendent maxima ou minima l'expression

$$\cos x + \cos 2x.$$

— On lance un projectile verticalement ; exprimer, en fonction de sa vitesse initiale v_0 et de l'intensité g de la pesanteur, le temps qu'il met à parcourir la moitié de la hauteur du point le plus élevé de sa course.

— Calculer le volume engendré par la rotation d'un triangle équilatéral de côté a autour d'un axe situé dans le plan de ce triangle passant par un de ses sommets, et faisant avec le côté opposé un angle de 30°.

— Dans un triangle donné ABC, exprimer la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle A, au moyen des lignes trigonométriques de cet angle, et des longueurs b, c, des côtés qui le comprennent.

— Trouver tous les arcs qui satisfont à l'équation

$$\sin 5x = \sin 7x.$$

FACULTÉ DE PARIS

Session de juillet 1879.

Étant donnée l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

former l'équation du second degré qui admet pour racines les carrés des racines de la précédente.

— D'un point O, on mène à une droite AX une perpendiculaire OA, et trois obliques OB, OC, OD telles que les trois angles AOB, BOC, COD soient égaux ; connaissant les longueurs $OA = a$, $AB = b$ calculer AC et AD.

— Soient V, V', V'', les volumes engendrés par un même triangle rectangle qu'on fait tourner successivement autour de son hypoténuse et autour de chacun de ses côtés de l'angle droit. Prouver que l'on a

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V'^2} + \frac{1}{V''^2}.$$

— Calculer les tangentes des angles d'un triangle sachant que les côtés ont pour valeur 3, 4 et 5.

— Trouver la plus grande et la plus petite valeur de l'expression

$$\frac{x}{x^2+1}$$

lorsque la variable x prend toutes les valeurs possibles.

— Calculer le rayon de base et la hauteur d'un cône connaissant son volume $\frac{4}{3}\pi a^3$, et sa surface totale πb^2.

— Les quantités variables x et y étant assujetties à vérifier l'équation,

$$x^2 + y^2 + xy = K^2$$

assigner les valeurs de x et y qui font prendre à l'expression

$$ax + by$$

sa plus grande valeur, et dire quelle est cette valeur maxima.

— Etant donné un tétraèdre ABCD, on demande : 1° de prouver que les milieux des quatre arêtes AC, AD, BC, BD partant des points A et B sont dans un même plan ; 2° de trouver le volume des deux solides dans lesquels le plan qui passe par ces milieux décompose le tétraèdre, connaissant le volume de ce tétraèdre.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d,$$

sachant que $a + b + c + d = 360°$.

— Dans le triangle ABC on donne :

$$A = 60°;\ b = c(2 + \sqrt{3})$$

Calculer la tangente de l'angle $\frac{B - C}{2}$, puis les angles B et C.

— On donne le rayon r du demi-cercle AOB ; calculer le côté CD du trapèze inscrit ABCD, dans lequel la somme des bases est égale à la somme des deux autres côtés.

— Soit AB le diamètre d'un cercle ; on demande quel angle doit faire la corde AC avec ce diamètre, pour que les volumes engendrés par les segments du cercle AMC, BNC tournant autour de AB soient dans le rapport de 9 à 1.

— Le rapport $\frac{b}{c}$ des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à $2 + \sqrt{3}$. Calculer le cosinus de la différence B — C des deux angles aigus.

— On donne les deux bases a et b d'un trapèze, la hauteur h et l'angle V qui font entre eux les prolongements des côtés non parallèles. Calculer les longueurs de ces côtés. On suppose $b > a$. On appliquera les formules trouvées au cas de :

$$a = 2;\quad b = 5;\quad c = \sqrt{3};\quad V = 60°.$$

— A quelles conditions doivent satisfaire les nombres l, m, n, pour que les trois équations

$$x - ly - n = 0,$$
$$y - lx - m = 0,$$
$$nx + my - 1 = 0,$$

puissent être vérifiées par un même système de valeurs de x et y.

— La hauteur d'une pyramide hexagonale régulière est égale au côté de la base ; calculer le cosinus de l'angle des deux faces latérales adjacentes.

— Un levier AB est formé par une barre rectiligne homogène de longueur l, et de poids p. Le point d'appui C divise la barre de façon que AC = 2CB. Quelle est, en tenant compte du poids de la barre, l'équation d'équilibre du levier sollicité à ses extrémités A et B par deux forces F et F' parallèles à la direction de la pesanteur ?

— Connaissant la somme $4a$ des diagonales d'un losange et le rayon r du cercle inscrit, calculer les deux diagonales et la longueur du côté. On appliquera au cas où l'on donne $a = 17{,}5$; $r = 12$.

— Les deux traces d'un plan font avec la ligne de terre un même angle donné α. Calculer la tangente de l'angle de la ligne de terre avec le plan.

— Un corps pesant est placé sur un plan incliné faisant un angle de 45° avec le plan horizontal; P désignant son poids, quelle sera la grandeur de la force qu'il faudra lui appliquer pour le maintenir en repos, cette force étant supposée dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan?

FACULTÉ DE BORDEAUX

Session de juillet 1879.

Étant données les trois arêtes a, b, c d'un parallélépipède rectangle, calculer l'angle des diagonales.

— Résoudre l'équation

$$\text{tg}(x + \alpha) + \text{tg}(x - \alpha) - 2\cot g\, x = 0.$$

— On propose à une personne d'échanger une rente viagère de 80 francs qu'elle reçoit contre 1000 francs une fois payés; la personne accepte et survit 8 ans à ce marché. Lequel des deux contractants a gagné à cet échange? On supposera le taux d'intérêt à 5 o/o par an.

— On mène à une circonférence de rayon r, quatre tangentes parallèles deux à deux, qui, par leur intersection, forment un parallélogramme. Calculer la surface de ce parallélogramme, connaissant l'angle A de deux tangentes consécutives.

— On donne la hauteur h d'un cône et l'angle α que fait cette hauteur avec l'arête. Calculer le rayon d'un cercle dont l'aire est moyenne proportionnelle entre la surface latérale du cône et celle de son cercle de base. Application $h = 1^m,226$; $\alpha = 29°\ 42'$.

— Résoudre l'équation

$$\frac{a + x}{b + x} + \frac{b + x}{a + x} = \frac{5}{2}.$$

Vérification.

— Calculer le volume et la surface totale du solide engendré par la révolution du parallélogramme ABCD autour de BA, en admettant

$$AB = 35^m;\ AD = 26^m;\ BAD = 105°.$$

— Deux droites qui font entre elles un angle α inférieur à 90° étant données, on prend $AB = a$; de B, on abaisse une perpendiculaire BD sur AX; du pied D de cette perpendiculaire, on abaisse DE perpendiculaire à AB; puis EF perpendiculaire à AD, etc. Calculer: 1° la somme des 17 premières perpendiculaires; 2° la limite vers laquelle tend la somme d'un nombre infini de ces perpendiculaires.

— Résoudre le système
$$x + y = a^2 + b^2$$
$$4xy = a^4 + a^2b^2 + b^4.$$

Vérifier une des valeurs trouvées.

— La distance des centres de deux cercles est égale à a; l'angle que font leurs tangentes extérieures est égal à 2α; l'angle des tangentes intérieures égal à 2β. Calculer les rayons des cercles. Application :

$$a = 714^m$$
$$2\alpha = 36°\ 8'$$
$$2\beta = 104°\ 12'$$

FACULTÉ DE LILLE

Session de juillet 1879.

Enoncé des trois lois de Képler. — Sachant que la durée de la révolution sidérale de la Terre est de 365j,256 et celle de Mars 686j,979; évaluer la distance moyenne de Mars au Soleil, en prenant pour unité la distance moyenne de la Terre au Soleil.

— Étant donnée une ellipse dont on connait le grand axe et la distance focale, on décrit avec le rayon R une circonférence qui lui soit concentrique. Si M est l'un des points d'intersection des deux courbes, on demande de calculer les rayons vecteurs MF et MF' de ce point. Condition de possibilité déduite des formules.

— Entre quelles limites varie l'expression:

$$\frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2 + 2ax - 1}$$

quand x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a désignant une constante quelconque? Pour quelle valeur extrême de a le maximum et le minimum de l'expression deviennent-ils égaux?

— Étant donné un carré ABCD, trouver sur le côté CD supposé prolongé indéfiniment le point M pour lequel le rapport $\frac{MA}{MB}$ a la plus grande valeur possible.

— Résoudre exactement l'équation :

$$\sin^2(x + 15) - \sin^2(x - 15) = \frac{1}{4}.$$

— Trois forces verticales et de même sens sont appliquées aux trois sommets A, B, C d'un triangle horizontal donné, on donne aussi le point d'application D de leur résultante. Quelle relation obtient-on entre les deux forces appliquées en B et C et les deux triangles ADB, ADC quand on emploie le théorème des moments par rapport à l'axe DA. Trouver le rapport des surfaces des trois triangles ADB, ADC, BDC.

— Par l'extrémité A du diamètre AB d'une demi-circonférence, on mène une corde AC, et par le point C une corde CD parallèle au diamètre. Déterminer, à une seconde près, l'angle BAC de telle manière que la corde AC soit le double de la corde CD.

— Pour établir une communication entre les deux rives d'un torrent, on a le choix de construire soit un pont en bois, qui coûtera seulement 40000 francs, mais qui s'usera vite et qu'on devra reconstruire tous les 30 ans, soit un pont en pierres qui coûtera 120000 francs, mais dont la durée est supposée infinie. On demande quelle est de ces deux constructions la plus économique, en supposant le taux de l'intérêt de 5 0/0, et en admettant que le capital emprunté pour payer chaque construction doive être amorti au moyen d'annuités successives égales, payables à la fin de chaque année, et réparties sur tout le nombre d'années que durera le pont.

— Connaissant dans une ellipse le grand axe $2a$, et la distance focale $2c$, on considère le point M de cette courbe dont le rayon vecteur est $FM = r$; on abaisse de ce point la perpendiculaire MP sur le grand axe. Évaluer l'aire OMP et trouver la valeur de r pour laquelle cette aire est maxima.

— Rendre calculables par logarithmes les expressions

$$1 + \cos A;\quad 1 + \sin A;$$

$$\frac{\sin A}{1 \pm \cos A};\quad \frac{\cos A}{1 \pm \sin A}.$$

— Une tour haute de 45 mètres est construite au-dessus d'un sol horizontal. On lance horizontalement du haut de la tour une balle de plomb, et elle va touchèr le sol à une distance du pied de la tour égale à 70 mètres. On demande quelle vitesse initiale a été imprimée à la balle.

— Comment faut-il mener la corde CD parallèle au diamètre AB d'une demi-circonférence pour que le périmètre du trapèze ABCD soit maximum? Éviter de prendre pour inconnue la distance de la corde CD au centre.

CONCOURS ACADÉMIQUS

POITIERS 1879

Solution par M. Babu, élève au Lycée de Niort.

(*Copie couronnée.*)

Sur le diamètre AB *d'un cercle on prend* AC = AB, *et on mène en* C *une perpendiculaire à* CAB. *On joint un point quelconque* P *de cette perpendiculaire au point* A; *la droite* PA *rencontre la circonférence en* H. *La droite* BH *rencontre* CP *en* Q. *On mène par* P *une parallèle à* CAB *qui rencontre* QA *en* R *et par le point* Q *une parallèle à* CAB *qui rencontre* PA *en* M. *La figure ainsi formée jouit des propriétés suivantes :* *

1° *Le produit* PC × CQ *est constant.* Les triangles CPA, CQB sont semblables, car les angles CPA, QBC ont leurs côtés perpendiculaires. On peut donc écrire :

$$\frac{PC}{CB} = \frac{CA}{CQ};\ \text{d'où } PC.CQ = CA.CB = K^2.$$

2° *On a* $\frac{PA}{PM} = \frac{HA}{HM}$. Car dans le faisceau de quatre droites QC, QA, QB, QM, l'un des rayons est parallèle à une droite divisée en deux parties égales par les trois autres rayons; ce faisceau est donc harmonique.

3° *Les trois points* P, K, B *sont en ligne droite.* Joignons le

* Le lecteur est prié de faire la figure.

point B aux points K et P. Les triangles AKB, PCB, rectangles l'un en A, l'autre en C sont semblables ; en effet la similitude des triangles AKB, ACQ nous donne $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CQ}$: les triangles PCA, CBQ donnent aussi $\frac{AC}{CQ} = \frac{PC}{CB}$.

Donc on a $\frac{AK}{KB} = \frac{PC}{CB}$. Par suite les droites BK et BP sont confondues.

4° *Les points* R, B, M *sont en ligne droite.* Je joins le point R aux points B et M, je dis que les deux droites RB et RM sont confondues. En effet, les triangles PAR, MAQ nous donnent

$$\frac{RA}{RQ} = \frac{PA}{PM};$$

d'ailleurs, d'après la construction, $\frac{AB}{QM} = \frac{HA}{HM}$. Mais nous avons vu que $\frac{PA}{PM} = \frac{HA}{HM}$; donc $\frac{RA}{RQ} = \frac{AB}{AM}$, et les deux triangles RAB, RQM sont semblables ; il en résulte que les droites RB et RM sont confondues.

5° *La droite* KM *passe par un point fixe.* Cela résulte de la propriété précédente. En effet, la ligne MO passe par le milieu de PR ; de même la droite KO passe par le milieu de PR. Donc les droites KO, MO qui ont deux points communs se confondent et par suite MK passe par le centre du cercle. De plus MK = MA, car le triangle KMQ est semblable au triangle isocèle AKO.

6° *La droite* HK *passe par un point fixe.* Ce point fixe est le point D où HK rencontre AB. En effet, d'après une propriété connue des polaires dans le cercle, le point D appartient aux polaires des points P et Q, et par conséquent il est le pôle de la droite fixe CP.

7° *Trouver le lieu des points* M *et* R. Le point M, d'après la propriété (5), est également distant de la circonférence OA et de la droite PQ. Par conséquent, si l'on mène une droite parallèle à PQ, du côté du cercle, et distante de PQ d'une longueur égale à OA, le point M sera également distant du point O et de cette parallèle. Il sera donc sur une

parabole ayant O pour foyer, et la droite ainsi construite pour directrice. Le même raisonnement s'applique au point R.

Remarque. Si la droite PQ se rapproche ou s'éloigne du point A, en restant perpendiculaire à BA, de sorte que $CA = mBA$, m étant différent de 1, le produit CP.CA est encore constant; le rapport $\frac{PA}{PM}$ devient égal à $m\frac{HA}{HM}$; les trois points P, K, B, sont en ligne droite; la droite HK passe toujours par le pôle de la droite PQ; mais les trois points M, B, R ne sont plus en ligne droite.

TOULOUSE 1879

Solution par M. Lannes, élève au Lycée de Tarbes.

(Copie couronnée.)

Trois points OAB *étant situés en ligne droite, on mène par le point* O *une droite variable* OT *et par les deux points* A *et* B *un cercle* ABC *tangent à la droite* OT.

Déterminer la position de la droite OT *de telle manière que le cercle* ABC *ait un rayon donné* R.

On désire obtenir une construction géométrique et aussi une relation algébrique entre les lignes trigonométriques de l'angle O *et les quantités* R, OA, OB.

On déduira de chaque méthode la discussion des résultats.

Solution géométrique. — Du point A comme centre avec la longueur donnée R pour rayon, je décris une circonférence : c'est un premier lieu du centre de la circonférence ABC; par le milieu E de AB j'élève une perpendiculaire sur cette droite. L'intersection de cette perpendiculaire et de la circonférence donnera le centre D de la circonférence ABC.

En menant du point O' une tangente à la circonférence D, on aura la position de la droite OT.

Comme d'un point extérieur à une circonférence on peut mener deux tangentes à cette circonférence, il y aura deux positions, OC et OC' de la droite, et, comme il y a deux

circonférences telles que ABC symétriques par rapport à la droite OA, on voit qu'il y aura en général quatre positions de la droite, symétriques deux à deux par rapport à OA.

Discussion. — La seule condition à remplir pour que le problème soit possible, c'est que la perpendiculaire élevée en E sur AB coupe la circonférence A : on doit donc avoir

$$AB \leq 2R$$

ou en désignant OA par a, OB par b

$$b - a \leq 2R.$$

Pour $b - a = 0$, il y a trois positions de la droite, l'une suivant OA et les deux autres symétriques par rapport à OA.

Pour $b - a < 2R$, il y a quatre solutions.

Pour $b - a = 2R$, les quatre positions se réduisent à deux symétriques par rapport à OA.

Solution analytique. — Désignons l'angle COD par α et l'angle AOD par β : désignons aussi l'angle O par x.

Le triangle rectangle COD donne

$$\cos\alpha = \frac{OC}{OD},$$

ou, en remplaçant OC et OD par leurs valeurs $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{R^2 + ab}$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{ab}{R^2 + ab}};$$

de même le triangle DOE donne

$$\cos\beta = \frac{a + b}{2\sqrt{R^2 + ab}}.$$

Or, on a l'égalité $\alpha + \beta = x$

qui devient successivement

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos x$$

$$\cos\alpha \cos\beta - \cos x = \sin\alpha \sin\beta,$$

et, en élevant au carré et exprimant tous les arcs par leurs cosinus,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2 x - 2\cos\alpha\cos\beta\cos x = 1. \quad (1)$$

Remplaçons dans cette égalité cos α et cos β par leurs valeurs, il vient $\frac{ab}{R^2 + ab} + \frac{(a + b)^2}{4(R^2 + ab)}$

$$+ \cos^2 x - \cos x \cdot \frac{a + b}{\sqrt{R^2 + ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{R^2 + ab}} = 1;$$

ou, en faisant tout passer au premier membre, simplifiant et ordonnant par rapport à cos x

$$4(R^2 + ab)\cos^2 x - 4(a+b)\sqrt{ab}\,.\cos x$$
$$+ (a+b)^2 - 4R^2 = 0. \qquad (2)$$

La relation (1) étant encore vraie quand on a

$$\alpha - \beta = 0,$$

on voit que les deux valeurs du cosinus données par l'équation (2) s'appliqueront, l'une à l'angle COD, l'autre à l'angle COD'.

Résolvant, il vient, toutes réductions faites,

$$\cos x = \frac{1}{2(R^2 + ab)}\left(\sqrt{ab}\,(a+b) \pm R\sqrt{4R^2 - (a-b)^2}\right)$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que la quantité sous le radical soit positive, c'est-à-dire que l'on ait $\quad b - a \leq 2R.$

Il faut ensuite que la valeur du cosinus soit inférieure à 1 et supérieure à — 1, c'est-à-dire que l'on ait

$$(a+b)\,.\sqrt{ab} + R\sqrt{4R^2 - (a-b)^2} \leq 2(R^2 + ab)$$
et $$(a+b)\,.\sqrt{ab} - R\sqrt{4R^2 - (a-b)^2} \geq -2(R^2 + ab)$$

ou, en isolant le radical et élevant au carré,

$$4R^4 - R^2(a-b)^2 \leq [2(R^2 + ab) - (a+b)\sqrt{ab}]^2$$
et $$4R^4 - R^2(a-b)^2 \leq [2(R^2 + ab) + (a+b)\sqrt{ab}]^2.$$

La première inégalité entraînant la seconde, c'est la seule qui doive être satisfaite ; en effectuant, on trouve toutes réductions faites : $\quad -R^2 < ab$

inégalité qui est toujours vérifiée.

La seule condition est donc $\quad b - a \leq 2R.$

Lorsque $b - a = 0$, les deux valeurs de cos x sont

$$\cos' x = 1 \qquad \cos'' x = \frac{ab - R^2}{ab + R^2};$$

l'un des angles devient nul, et il n'y a que trois positions de la droite OT : c'est ce qu'on avait trouvé par une autre méthode.

Pour $b - a < 2R$, l'équation a deux racines admissibles ; il y a donc quatre positions de la droite, symétriques deux à deux par rapport à OA.

Si $b - a = 2R$, il y a une racine double : il n'y a que deux positions de la droite.

Remarque I. — On serait arrivé aux mêmes résultats en s'appuyant sur les propriétés du quadrilatère inscriptible pour calculer l'angle O.

Remarque II. — Si par A et B on menait d'autres circonférences coupant la droite OC, les points d'intersection de ces circonférences avec la droite formeraient une involution dont le point O serait l'origine et C un point double.

Le lieu de ce point double, quand la droite OT tourne autour du point O, est une circonférence décrite de O comme centre avec $\sqrt{ab}$ pour rayon : cette circonférence coupe orthogonalement toutes les circonférences passant par A et B.

QUESTIONS PROPOSÉES A DES EXAMENS DE L'ÉTRANGER

BELGIQUE

Trouver un nombre x tel que si on le retranche des nombres donnés a et b, et qu'on divise les restes obtenus respectivement par b et par a, la somme des quotients soit 1. Démontrer que la valeur de l'inconnue est positive quels que soient a et b.

— Trouver trois nombres x, y, z en supposant : 1° que les deux derniers soient entre eux dans un rapport donné $\frac{m}{n}$; 2° que si au premier on ajoute chacun des deux autres, les deux sommes soient respectivement a et b. Trouver les conditions pour que les inconnues soient positives.

— Construire un triangle semblable à un triangle donné et équivalent à un trapèze donné.

— Déterminer sur une droite donnée un point tel que les deux tangentes menées de ce point à un cercle donné fassent entre elles un angle donné.

— Trouver entre quelles limites peut varier K dans l'équation

$$y^2 - 2axy + b^2x^2 - a^2y + abx - K = 0$$

lorsque x et y prennent toutes les valeurs réelles possibles. Discuter en supposant que a soit inférieur, supérieur, ou égal à b.

— Étant donnés un cercle et deux points A et B dans le plan de ce cercle, trouver sur la circonférence un point K tel que, en menant les sécantes AKL, BKM, la corde LM soit parallèle à AB. On supposera : 1° les deux points hors du cercle; 2° les deux points dans le cercle; 3° un point en dehors, l'autre en dedans.

— Deux ouvriers A et B ont reçu pour de l'ouvrage fait, le premier 30 francs et le second 14 francs, ce dernier ayant travaillé trois jours de moins

que le premier. Si A avait travaillé deux jours de moins, et B, cinq jours de plus, ils auraient reçu autant l'un que l'autre; on demande le nombre de jours de travail, et le prix de la journée de chacun.

— Construire un triangle connaissant deux angles et le rayon du cercle inscrit.

— Une personne qui possède 80000 francs emploie une partie de cette somme à faire l'acquisition d'une maison. Elle place ensuite les trois quarts de ce qui lui reste à 5 o/o et le dernier quart à 4 1/2 o/o; elle se forme avec ce placement un revenu de 2925 francs. On demande le prix de la maison et le montant des sommes placées à 5 et à 4 1/2 pour cent.

ITALIE

Questions proposées aux examens pour la Licence des Lycées et Instituts techniques en 1879, session d'été.

I

1. Trouver une proportion par quotient connaissant la somme de ses termes, la somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

2. Trouver la valeur des rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés a, b, c, d'un triangle; en calculer la valeur dans le cas d'un triangle dont les côtés sont:

$$a = 3426^{m},927$$
$$b = 2854^{m},031$$
$$c = 2543^{m},246$$

II

1. Trouver deux nombres connaissant leur somme $2s$, et la somme de leurs quatrièmes puissances $2q$.

2. Calculer en général le volume d'un segment sphérique à une base, connaissant le rayon R de la sphère, et la flèche h du segment. Appliquer le cas où l'on a

$$R = 7^{m},3;$$
$$h = 3^{m},57.$$

Nota. — Pour traiter chacun des deux sujets précédents les candidats ont sept heures.

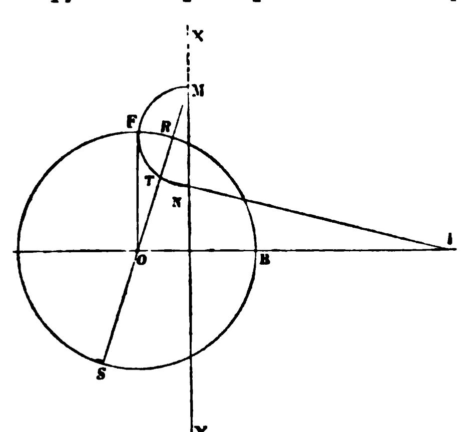
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 146.

Solution par M. Aillerет, élève du Lycée de Versailles.

On donne un cercle, un diamètre AB *et une droite* XY *perpendiculaire à* AB. *La polaire d'un point* M *de* XY *coupe cette droite en* N *et sur* MN *comme diamètre on décrit un cercle. Démontrer que, si l'on fait varier le point* M *sur* XY, *tous les cercles tels que* MN *ont pour axe radical le diamètre* AB.

Rappelons le principe suivant : *Lorsqu'une droite est divisée harmoniquement par deux points, la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances du milieu de la droite aux deux points*



Soit IT la polaire du point M; cette polaire coupe XY en N. Comme elle est perpendiculaire sur le diamètre passant par le point M, le point T appartient à la circonférence décrite sur MN comme diamètre. La droite RS est divisée harmoniquement par le point M et le pied T de sa polaire. On a donc d'après le principe énoncé

$$\overline{OR}^2 = OT \, . \, OM = r^2 = \overline{OF}^2$$

r étant le rayon de la circonférence. Donc OF est la tangente à la circonférence MN, au point F. Pour un autre point M' on aurait de même

$$\overline{OR}^2 = OT' \, . \, OM' = r^2 = \overline{OF'}^2$$

OF' sera la tangente et sera égale à OF.

Donc toutes les tangentes menées de O à tous les cercles tels que MN sont égales. Le point O appartient donc à l'axe radical de ces cercles, lequel axe radical se confond avec la perpendiculaire abaissée du point O sur xy, c'est-à-dire est le diamètre AB lui-même.

Nota. — **Ont résolu la même question: MM. Vazou, au Collège Rollin; Combebiac, à Montauban; Elie, Collège Stanislas.**

QUESTION 148.

Solution par M. Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées.

Deux cercles se coupent sous un angle de 120°. *On mène un cercle tangent à la fois à la tangente commune et aux deux*

cercles donnés. On a, entre les rayons r *et* r′ *des cercles donnés et le rayon* x *du cercle tangent la relation*

$$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{3r}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}}. \quad \text{(Perrin.)}$$

Soient les deux cercles O et O′ qui se coupent sous un angle ONO′ $= \alpha$, et I le petit cercle de rayon x. Par les points I et B menons les droites CD et MB parallèles, la première à AB, et la seconde à OO; désignons en outre par r et r' les rayons des cercles O et O′.

Le triangle O′ID donne successivement

$$\overline{ID}^2 = \overline{IO'}^2 - \overline{O'D}^2 = (r' + x)^2 - (r' - x)^2;$$

$$ID = \sqrt{4r'x}.$$

Le triangle OIC donne de même

$$IC = \sqrt{4rx}.$$

En ajoutant ces deux égalités il vient

$$ID + IC = AB = \sqrt{4r'x} + \sqrt{4rx}. \quad (1)$$

Dans le triangle ABM nous avons

$$\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{OO'}^2 - (r - r')^2;$$

mais dans le triangle ONO′ le côté $\overline{OO'}^2$ est égal à

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha;$$

portant cette valeur dans l'égalité précédente on trouve

$$AB = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha - (r - r')^2}, \quad (2)$$

et de (1) et (2) on tire

$$\sqrt{2rr'(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{4r'x} + \sqrt{4rx}. \quad (3)$$

Dans le cas qui nous occupe, l'angle $\alpha = 120°$; nous avons donc, en remplaçant dans (3) $\cos \alpha$ par $-\frac{1}{2}$ et après simplifications,

$$\sqrt{3rr'} = \sqrt{4r'x} + \sqrt{4rx},$$

d'où $$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{3r}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}}.$$

Remarques. 1° Si les deux cercles se coupent sous un angle de 90°, cos $\alpha = 0$; et en introduisant cette condition dans (3) on a $\frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}$ (4)
qui n'est autre chose que l'équation de la question 88 (t. II, p. 152) et dans laquelle x représente, non le rayon, comme dans (4), mais le diamètre.

2° Si les deux cercles étaient tangents, c'est-à-dire si l'angle α était égal à 180°, cos α serait égal à -1, et l'on aurait (voir question 9, t. Ier, p. 60)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}.$$

3° Pour les cas où $\alpha = 60°$, il vient, à cause de cos $60 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Tessier, d'Angers; Vermand, à Saint-Quentin; Dupuy, à Grenoble; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Baudot, à Dijon; d'Arodes, à Mont-de-Marsan; Lannes, à Tarbes; Manceau, à Orléans; Dumur, à Chartres; Vazou, Collége Rollin; Longueville, à Charleville; Bucheron, à Moulins; Hugot, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

194. — On donne une circonférence de centre O, et un diamètre AB. Trouver le lieu des points M tels que le carré construit sur la tangente MT soit équivalent à quatre fois le triangle MOP, P étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur AB. *(Lucien Lévy.)*

195. — Sur un quadrant AB, de centre O, on prend un point C; déterminer sur la tangente en A un point D tel que les surfaces des triangles ACD, OCD soient entre elles dans un rapport donné K. Discuter. *(Lucien Lévy.)*

196. — Sur les trois côtés d'un triangle quelconque comme diamètres, on décrit des circonférences, et on mène les tangentes communes à ces circonférences considérées

deux à deux. Démontrer que le produit des trois tangentes communes est égal à la surface du triangle multipliée par le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

(Léon Arnoye.)

197. — Si par un point quelconque pris dans l'intérieur d'un triangle on mène des parallèles aux trois côtés, on détermine sur chaque côté trois segments; le carré du produit des trois segments intermédiaires est égal au produit des six autres. *(Léon Arnoye.)*

198. — Par quel nombre faut-il multiplier un nombre donné pour que la somme des valeurs absolues de ses chiffres significatifs reste la même? *(Léon Arnoye.)*

199. — Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

200. — On donne une circonférence, un diamètre AB et les tangentes aux extrémité de ce diamètre ; un angle droit dont le sommet est en A, coupe la tangente en B aux deux points C et D. On mène par les points C et D les tangentes à la circonférence; ces tangentes rencontrent en F et H la tangente en A, et se coupent elles-mêmes au point P.

1° Démontrer que les diagonales du trapèze CDHF se coupent sur le diamètre AB en un point M tel que AM $= \frac{AB}{5}$;

2° Trouver le lieu du point P lorsque l'angle droit tourne autour du point A. *(J. Nomy.)*

201. — Soit O le centre d'un cercle, ABC un triangle circonscrit à ce cercle, A', B', C' les points de contact des côtés BC, CA, AB. Désignons par R le rayon du cercle, par S et S' les aires des triangles ABC, A'B'C'. Démontrer les relations suivantes :

$$S^2 = R^4 \frac{CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{OA'B' \times OB'C' \times OC'A'}$$

$$S^2 = \frac{4 \, . \, CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{S'^2}.$$

(Combier.)

202. — Résoudre le système

$$x + y + z = (a + b + c)(a + b - c)$$
$$xy + xz - yz = b[(a + c)(a - c)(2b - a) + 2ab^2]$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2)$$

(*Combier.*)

CORRESPONDANCE

Nous recevons de M. d'Ocagne une lettre dont nous extrayons le passage suivant :

Au moment où paraît dans le journal ma note sur le minimum d'une expression algébrique à plusieurs variables, je trouve dans mes cahiers une démonstration très simple du lemme sur lequel repose cette note, démonstration que j'avais complétement oubliée. Elle repose sur l'identité facile à vérifier.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) = (b_1a_1 + a_2b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1} b_n - a_nb_{n-1})^2$$

D'après cela, pour trouver le minimum de $x^2 + y^2 + \ldots + t^2$, sachant que l'on a

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots + \delta t = A,$$

A étant une constante, formons le produit

$$(\alpha^2 + \beta + \gamma^2 + \ldots + \delta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + t^2)$$

au minimum duquel correspond celui de l'expression considérée.

Or, d'après le lemme précédent, ce produit est égal à

$$(\alpha x + \beta + \gamma z + \ldots + \delta t)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 + \alpha z - \gamma x)^2 + \ldots + (\epsilon t - \delta s)^2$$

Cette expression est une somme de carré; le premier terme est constant; le minimum de la somme des autres termes aura lieu quand ils seront tous nuls, c'est-à-dire lorsque l'on aura

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots \frac{t}{\gamma}.$$

La valeur de ce minimun est

$$\frac{A}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots + \delta^2}$$

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 19562-9.

AVIS

A la demande d'un grand nombre de nos abonnés, nous nous décidons à introduire, à partir du 1er janvier 1880, une modification importante dans la rédaction du *Journal de Mathématiques élémentaires.*

Chaque livraison contiendra un certain nombre d'articles de mathématiques spéciales; ainsi modifié, le journal s'adressera *sans distinction* à tous les candidats aux écoles du gouvernement. Ceux de nos abonnés qui se préparent à l'École polytechnique ou à l'École normale y trouveront des questions se rapportant plus directement à leurs études journalières.

Le journal prend le titre de *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales.*

Nous recevrons donc avec reconnaissance les communications qu'on voudra bien nous adresser, soit sur l'algèbre supérieure, soit sur la géométrie analytique, en nous imposant toutefois la condition de publier exclusivement des articles qui soient à la portée des élèves.

Comme par le passé, nous publierons des questions résolues par des élèves; toutes les solutions exactes seront mentionnées, et même dans certains cas nous ferons paraître plusieurs solutions d'une même question, lorsque les méthodes suivies par leurs auteurs seront différentes.

M. Boquel a bien voulu nous promettre sa collaboration; il se chargera du classement et de la publication des articles de mathématiques spéciales. L'étendue de ses connaissances, sa grande expérience de l'enseignement, nous seront d'un précieux secours.

THÉORIE DES CENTRES

DES MOYENNES HARMONIQUES

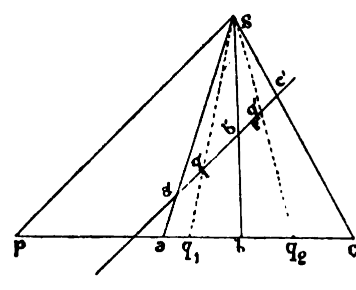
Par M. Kœhler.

(*Suite*, voir page 321.)

15. — *Construction des centres harmoniques du second ordre d'un système de trois points.*

Je considère d'abord le cas où le pôle p est à l'infini ; l'équation (9) donne alors $3X^2 - 2S_1X + S2 = 0$, et en prenant pour origine le point a, $3X^2 - 2(b+c)X + bc = 0$. Cette équation donne $X = \frac{b+c}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{b^2+c^2-bc}$; il suffit donc de chercher le centre des moyennes distances des trois points, et de porter à droite et à gauche de ce centre une longueur $\frac{1}{3}\sqrt{b^2+c^2-bc}$; dans cette expression, très-facile à construire, b et c représentent les distances des points b et c au point a, distances qu'on peut toujours regarder comme de même signe, en prenant pour le point a un des points extérieurs du groupe.

Soit maintenant (*fig.* 11) p un pôle quelconque; je forme un faisceau S$pabc$ et je le coupe par une parallèle $a'b'c'$ à Sp ; je détermine les centres du second ordre q'_1, q'_2 pour les trois points a', b', c' et le point à l'infini, d'après la construction précédente. Les rayons Sq'_1, Sq'_2 détermineront en vertu du théorème V, les points cherchés q_1, q_2.



J'ai donné deux solutions moins élémentaires du même problème dans un mémoire sur les courbes du troisième

ordre (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier, février et mars 1872).

Cas particulier où deux des points a, b, c *coïncident.* — Si l'on fait $b = a$ dans l'équation (8) qui suppose l'origine au pôle p, elle devient $x^2(2a + c) - 2x(a^2 + 2ac) + 3a^2c = 0$. Les solutions de cette équation sont $x' = a$, $x'' = \frac{3ac}{2a + c}$. Un des centres est le point *double* a lui-même; le second est le centre des moyennes harmoniques de p par rapport aux points A et C, le second C étant considéré comme double; en effet on peut écrire $\frac{3}{x''} = \frac{2a + c}{ac} = \frac{2}{c} + \frac{1}{a}$.

Étude des polaires rectiligne et conique d'un point par rapport à un triangle.

16. **Théorème VI.** — *Si par un point* p *on mène des transversales rencontrant les trois côtés du triangle, le lieu des centres harmoniques du second ordre des trois points situés sur chaque transversale, par rapport au pôle* p, *est une conique passant par les trois sommets du triangle* (polaire conique du point p).

Ce théorème est évident d'après le principe de géométrie analytique rappelé au n° 10 de ce mémoire; il y a deux centres du second ordre sur chaque transversale, le lieu est donc une courbe du second degré. Si la transversale passe par un des sommets, deux des trois points se confondent avec ce sommet, qui par suite appartient au lieu, d'après la remarque du numéro précédent.

Théorème VII. — *La polaire rectiligne d'un point par rapport à un triangle est en même temps la polaire de ce point par rapport à sa polaire conique.*

Cela résulte de ce que, sur chaque transversale telle que $pabc$, le centre des moyennes harmoniques de p est le conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux centres q_1 et q_2 (théorème II).

Remarque. — La polaire rectiligne de p ne rencontre pas la polaire conique; en effet, si elle la rencontrait, un des points d'intersection serait le point de contact d'une trans-

versale avec la conique ; or un pareil point ne saurait exister, car les deux points q_1, q_2 ne peuvent jamais se confondre, l'involution définie ci-dessus (théorème IV), ayant ses points doubles imaginaires.

Théorème VIII. — *Si* q *est un point de la polaire conique de* p, *réciproquement* p *est un point de la polaire rectiligne de* q, *ou encore : le lieu des points dont les polaires rectilignes passent en* p *est la polaire conique de* p, *et le lieu des points dont les polaires coniques passent en* q *est la polaire rectiligne de* q.

Cet énoncé est une conséquence immédiate du théorème I.

Théorème IX. — *Les polaires coniques de tous les points d'une droite passent par un même point, dont cette droite est la polaire rectiligne.*

En effet, si l'on prend deux points p, p' sur la droite, les deux polaires coniques se couperont en quatre points, savoir les trois sommets du triangle et un quatrième point Q. La polaire rectiligne de Q doit passer par p et p' ; nous savons d'ailleurs que pp' considérée comme polaire rectiligne n'a qu'un seul pôle (indépendamment des trois sommets qui peuvent être regardés chacun comme le pôle d'une droite quelconque du plan).

Théorème X. — *Toutes les droites qui passent par un point ont leurs pôles sur la polaire conique du point.*

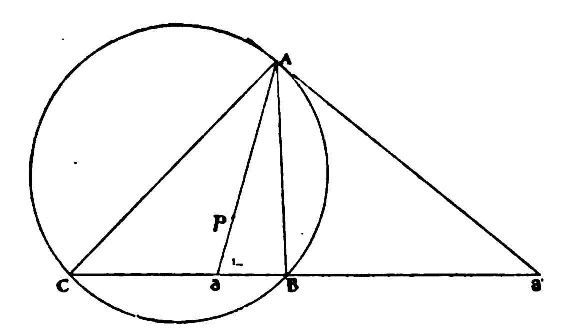
(Conséquence du théorème I).

Remarque. — Les théorèmes précédents s'appliquent à une courbe quelconque du troisième ordre ; seulement les polaires coniques de tous les points du plan n'ont pas trois points communs ; elles passent toutes par le point double, quand il existe.

Théorème XI. — *La tangente à la polaire conique d'un point* p *menée au sommet* A *du triangle est le rayon conjugué harmonique de* Ap *par rapport aux côtés* AB, AC.

Je considère la droite Ap et je vais chercher le point (autre qu'un des sommets) où se coupent les polaires coniques de

tous les points de cette droite, c'est-à-dire le pôle de A*p* considérée comme une polaire rectiligne. En appliquant la construction indiquée au n° 9, je prends le conjugué harmonique *a'* par rapport à B, C du point *a* où A*p* rencontre BC, et je joins A*a'*, le pôle cherché est sur cette droite. Mais c'est le point A lui-même, car il faudrait ensuite prendre le conjugué par rapport à A, C de l'intersection de A*p* avec AC et joindre B à ce conjugué, qui n'est autre que le sommet A. On conclut de là que le rayon A*a'*, conjugué harmonique de A*p* par rapport aux côtés AB, AC *(fig. 12)*, rencontre la



conique en deux points qui se confondent en A ; c'est donc la tangente.

On peut ajouter que les polaires coniques de tous les points de A*p* sont tangentes à la même droite A*a'*.

Théorème XII. — *La polaire conique d'un point pris sur un des côtés d'un triangle se compose de deux droites.*

En vertu de la remarque du théorème IV, si par un point *a* du côté BC on mène une transversale quelconque *abc*, les deux centres harmoniques des points *a*, *b*, *c* par rapport à l'un d'eux *a*, sont le point *a* lui-même et son conjugué harmonique par rapport à *b* et *c* ; donc la polaire du point *a* par rapport aux deux côtés AB, AC fait partie de la polaire conique.

Le côté BC lui-même fait également partie de cette polaire, car si la transversale se confond avec le côté, un des trois points où elle coupe les côtés du triangle devient

indéterminé, il en est de même par conséquent des deux centres harmoniques.

Théorème XIII. — *La polaire conique du centre de gravité est une ellipse dont les tangentes aux trois sommets du triangle sont parallèles aux côtés opposés, et qui a pour centre le centre de gravité.*

On voit en effet que les tangentes aux sommets étant les rayons conjugués harmoniques des médianes par rapport aux côtés qui les comprennent, sont parallèles aux côtés opposés. Les médianes sont d'ailleurs les diamètres conjugués des cordes parallèles aux côtés correspondants ; elles passent donc au centre. On voit aussi que la polaire rectiligne du centre de gravité est à l'infini, ce qui prouve d'une autre manière que ce point est le centre de l'ellipse.

Théorème XIV. — *Le pôle du cercle circonscrit s'obtient en partageant chaque côté proportionnellement aux carrés des deux autres et en joignant les points ainsi obtenus aux trois sommets.*

Je mène la tangente en A au cercle circonscrit ; d'après le théorème XI, le rayon A*a*, conjugué harmonique de cette tangente A*a'* par rapport aux côtés AB, AC, passe par le pôle du cercle.

On a $\frac{Ba}{aC} = \frac{Ba'}{Ca'}$; mais les triangles semblables AB*a'*, AC*a'* donnent $\frac{Ba'}{Aa'} = \frac{BA}{AC} = \frac{Aa'}{Ca'}$, et par suite $Ba' = Aa' \cdot \frac{BA}{AC}$, $Ca' = Aa' \cdot \frac{AC}{BA}$; donc $\frac{Ba'}{Ca'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{Ba}{aC}$ c. q. f. d.

Théorème XV. — *Le lieu des points dont les polaires coniques par rapport à un triangle sont des paraboles, est une ellipse tangente aux trois côtés en leurs milieux.*

Je cherche le nombre des points du lieu situés sur une transversale quelconque ; les polaires de tous les points de cette droite forment un faisceau de coniques passant par quatre points ; mais dans un pareil faisceau il y a toujours deux coniques tangentes à une droite donnée, en particu-

lier deux coniques tangentes à la droite à l'infini, c'est-à-dire deux paraboles. Le lieu est donc une conique. Je prends maintenant pour transversale un des côtés ; d'après le théorème XII, les polaires coniques de tous les points de ce côté se composent du côté lui-même et d'une droite passant par le sommet opposé. Pour le point milieu les deux droites deviennent parallèles, la polaire conique rentre dans le genre parabole ; le point milieu est d'ailleurs le seul qui jouisse de cette propriété. On conclut de là que le lieu cherché touche les trois côtés en leurs milieux.

C'est une ellipse dont le centre est au centre de gravité du triangle ; elle partage le plan en deux régions ; pour tous les points intérieurs à l'ellipse les polaires sont des ellipses, pour tous les points extérieurs ce sont des hyperboles.

Théorème XVI. — *Le lieu des points dont les polaires coniques par rapport à un triangle sont des hyperboles équilatères est une droite, polaire rectiligne du point de concours des hauteurs.*

En effet les polaires coniques de tous les points de cette polaire rectiligne passent par son pôle ; or l'on sait que toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de concours des hauteurs et réciproquement toute conique passant par ce point et par les trois sommets est une hyperbole équilatère. *(A suivre.)*

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *a Treatise on some new geometrical methods.*

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

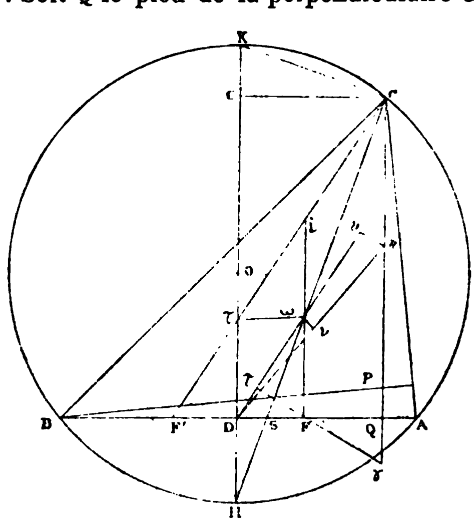
(Suite et fin, voir page 329.)

---

51. *Le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits.*

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et soit ν le centre du cercle des neuf points qui passe par le

milieu D de AB, et par le milieu π de PC. On sait que $D\pi = R$, rayon du cercle circonscrit. Soit ω le centre du cercle inscrit dont le rayon est r, et qui touche la base AB au point F. Soit Q le pied de la perpendiculaire CP sur AB.



Menons $D\omega$, et abaissons la perpendiculaire $\pi\nu$ sur cette droite. Appelons d la distance $\nu\omega$ entre le centre du cercle des neuf points et le centre du cercle inscrit, et ε l'angle de $D\nu$ avec $D\omega$. Alors, puisque l'on a $D\omega^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + r^2$, on aura

$$d^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{4} + r^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \frac{\sqrt{(a-b)^2+4r^2}}{2} \cos \varepsilon.$$

Posons $K = F\sqrt{(ai-b)^2+4r^2}$ (*)

On en déduit

$$4d^2 = R^2 + (a-b)^2 + 4r^2 - 2RK \cos \varepsilon \quad (112)$$

(*) Cela revient à démontrer que $Fi = 2r$. En effet, on a $FF' = a - b$, et comme (n° 27) $DQ = \frac{a^2-b^2}{2c}$, on en tire $F'Q = \frac{a-b}{2}\left(1+\frac{a+b}{c}\right)$ ou $F'Q = \frac{(a-b)\,p}{c}$. Donc $\frac{Fi}{CQ} = \frac{c}{p}$, d'où $CQ \cdot c = Fi \cdot p$; mais $CQ \cdot c = 2\Delta$; donc $Fi \cdot p = 2pr$; d'où $Fi = 2r$.

Mais $2DQ = \frac{a^2 - b^2}{c}$, et $DF = \frac{a - b}{2}$;

donc $$DQ - DF = FQ = \frac{(a - b)(p - c)}{c} \qquad (113)$$

Sur $D\omega$, abaissons la perpendiculaire $F\nu$, et prolongeons-la jusqu'en γ où elle rencontre PQ; on a $QK = FQ \operatorname{tg} QF\gamma$; mais on a $\operatorname{tg} QF\gamma = \frac{a - b}{2r}$; en substituant on trouve

$$Q\gamma = \frac{(a - b)^2 (p - c)}{2cr} \qquad (114)$$

Appelons θ l'angle KCG ou son égal KHC. On a

$$KG = KC \sin \theta, \quad \text{et } KC = 2R \sin \theta; \text{ d'où}$$

$$KG = 2R \sin^2 \theta \qquad (115)$$

Mais $$\sin^2 \theta = \frac{\tau\omega^2}{H\omega^2} = \frac{(a - b)^2}{4HA^2} = \frac{(a - b)^2}{4 \cdot 2R \cdot HD}$$

Donc

$$2R \sin^2 \theta = \frac{(a - b)^2}{4 \cdot \frac{1}{2} c \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{(a - b)^2 (p - c)}{2cr} \qquad (116)$$

Par suite $$KG = Q\gamma \qquad (117)$$

Il en résulte que $C\gamma = KD$, et par suite que $\pi\gamma = R$ (118)

Cela nous donne une nouvelle et très-importante propriété du cercle des neuf points.

Puisque $D\upsilon$ est la projection de $D\pi$ ou R sur la ligne $D\omega$, et que, en même temps, il est la projection sur la même droite, de $\pi\gamma$ ou R et de DF, on a

$$R \cos \varepsilon = R \sin \delta + \frac{1}{2} (a - b) \cos \delta \qquad (119)$$

en appelant δ l'angle ωDF; mais

$\sin \delta = \frac{2r}{K}$, $\cos \delta = \frac{a - b}{K}$, en posant $K = \sqrt{(a - b)^2 + 4r^2}$.

Donc $$2RK \cos \varepsilon = 4Rr + (a - b)^2.$$

En remplaçant dans la formule 112, on trouve

$$4d^2 = R^2 + 4r^2 - 4Rr,$$

ce qui devient après réduction

$$d = \frac{1}{2} R - r. \qquad (120)$$

52. Soient d', d'', d''' les distances du centre du cercle des neuf points aux centres des cercles ex-inscrits; on trouvera facilement par des modifications simples de la figure:

$$d' = \frac{1}{2}R + r';\quad d'' = \frac{1}{2}R + r'';\quad d''' = \frac{1}{2}R + r''' \quad (121)$$

En ajoutant ces résultats, on trouve

$$d + d' + d'' + d''' = 2R + r' + r'' + r''' - r = 6R \quad (122)$$

On a vu (form. 47) que si l'on appelle D, D', D'', D''' les distances du centre du cercle circonscrit aux mêmes points, on a $D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2$.

Donc $D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 2R(d + d' + d'' + d''')$ (123)

Par suite : *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux quatre centres des cercles inscrits et ex-inscrits est égale au produit du diamètre du cercle circonscrit par la somme des distances du centre du cercle des neuf points aux quatre mêmes points.*

Nous allons donner une autre preuve de cet important théorème.

53. Soit ABC le triangle donné, comme précédemment, dans le cercle circonscrit, dont le rayon est R, et dont le centre est en O. Soient F et F' les points auxquels le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit touchent la base AB ou c. Alors $BF' = p - a$; $AF = p - b$.

Soient ν le centre des neuf points, et ω le centre du cercle inscrit. Menons CF'. On peut facilement démontrer que la ligne CF' ou f passe par le point i, extrémité du diamètre du cercle inscrit qui passe par le point F, point de contact avec AB. Soit $D\pi$ le diamètre du cercle des neuf points. OD est égal et parallèle à $C\pi$, OC ou R est égal et parallèle à $D\pi$, et $\frac{r}{DF} = \frac{2r}{FF'}$, $D\omega$ est parallèle à CF' ou f'; donc l'angle OCF' est égal à l'angle $\nu D\omega$. Appelons ε cet angle, et posons $OF' = u$; puisque AOB est isoscèle, on trouve facilement $R^2 = u^2 + (p-a)(p-b)$ (124)

Mais $u^2 = R^2 + f^2 - 2Rf\cos\varepsilon$

Donc $2fR\cos\varepsilon = f^2 + (p-a)(p-b)$ (125)

Soit δ l'angle que fait CF' ou f' avec la base AB du triangle; alors comme CF' est parallèle à $D\omega$, on a

$$\cos\delta = \frac{a-b}{K}, \text{ et } f' \cos\delta = FF' + FQ.$$

Mais $FF' = a - b$, et $FQ = \frac{(a-b)(p-c)}{c}$ (v. f. 113).

Donc $$f' \cos\delta = \frac{p}{c}(a-b),$$

et par suite $$f' = \frac{pK}{c} \qquad (126)$$

On a donc

$$2RK\cos\varepsilon = \frac{pK^2}{c} + \frac{c}{p}(p-a)(p-b) \qquad (127)$$

Maintenant on a, comme on l'a vu dans la formule (112)

$$4d^2 = R^2 + (a-b)^2 + 4r^2 - 2RK\cos\varepsilon.$$

On en tire

$$4d^2 = R^2 + (a-b)^2 + 4r^2 - \frac{pK^2}{c} - \frac{c}{p}(p-a)(p-b).$$

Mais $$\frac{c}{p}(p-a)(p-b) = cp - c(a+b) + \frac{abc}{p};$$

puis on a $$\frac{abc}{p} = 4Rr, \text{ et } -c(a+b) = c^2 - 2pc.$$

En faisant ces substitutions, on trouve pour l'équation

$$4d^2 = (R-2r)^2 + (a-b)^2 - \frac{p}{c}\left[(a-b)^2 + 4r^2\right] - c^2 + pc$$

en réduisant on trouve comme précédemment

$$d = \frac{1}{2}R - r.$$

54. La démonstration du cas où l'on prend le cercle circonscrit diffère un peu de la précédente. Joignons le centre du cercle circonscrit au point F où le cercle inscrit touche la base. Alors on a, comme précédemment

$$R^2 = u^2 + (p-a)(p-b).$$

Soit I le point où CF rencontre la circonférence du cercle ex-inscrit. I est l'extrémité du diamètre $F'\Omega$, et comme $I\Omega = \Omega F'$, et $FD = DF$, la ligne $D\Omega$ est parallèle à CF ou f, et OC est parallèle à $D\nu$, comme précédemment. Si

nous posons OCF $= \varepsilon$, l'angle $\Omega D\nu$, dans le triangle $\Omega D\nu$, est égal à $\pi - \varepsilon$, puisque les côtés de ce triangle sont parallèles à ceux du premier. Dans le premier triangle, on a

$$u^2 = R^2 + f^2 - 2\, Rf \cos \varepsilon$$

et

$$R^2 = u^2 + (p - a)\,(p - b).$$

On a aussi, en posant $\Omega\nu = d'$

$$4\,d'^2 = R^2 + \left[(a-b)^2 + 4r'^2\right] - 2\,R\left[(a-b)^2 + 4r'^2\right]^{\frac{1}{2}} \cos(\pi - \varepsilon).$$

En appelant K' la valeur $\left[(a-b)^2 + 4r'^2\right]^{\frac{1}{2}}$, et remplaçant $\cos \varepsilon$ par la valeur trouvée précédemment, en remarquant que $f = \dfrac{K'\,(p-c)}{c}$, on trouve

$$4d'^2 = R^2 + K'^2 + \frac{p-c}{c}\,K'^2 + \frac{(p-a)(p-b)c}{(p-c)} \qquad (128)$$

En remplaçant K' par sa valeur, et remarquant que

$$\frac{abc}{p-c} = 4Rr',$$

on trouve

$$4d'^2 = (R + 2r')^2 + (a-b)^2 + \frac{p-c}{c}\,.\,4r'^2$$
$$+ \frac{p-c}{c}\,(a-b)^2 - pc$$

qui, après réduction, donne

$$d' = \frac{1}{2}\,R + r'.$$

55. Les lignes f et f' menées du sommet C du triangle aux points de contact F et F' de la base c avec les cercles inscrit et ex-inscrit ont une grande importance. Nous avons prouvé plus haut que ces lignes passent par l'extrémité du diamètre du point de contact. Posons

$$4r'^2 + (a-b)^2 = K'^2;\quad 4r^2 + (a-b)^2 = K^2;$$

nous avons vu que l'on a

$$f' = \frac{p}{c}.K\,;\quad f = \frac{p-c}{c}.K'.$$

Si l'on appelle h et h' les distances du sommet C du triangle à l'autre extrémité du diamètre du cercle inscrit

ou du cercle ex-inscrit, on a

$$h' = \frac{p-c}{c}\,\mathrm{K}; \quad h = \frac{p}{c}\,.\,\mathrm{K}'.$$

Donc, $ff' = hh'$; en d'autres termes, la surface du triangle CFF' est égale à celle du triangle iCI, i et I étant les autres extrémités du diamètre du cercle inscrit ou ex-inscrit.

Les lignes f, f', la bissectrice de l'angle en C du triangle, et la hauteur forment un faisceau harmonique. Car nous avons vu (n° 28) que DF est moyen proportionnel entre DQ et Ds. Donc, puisque D est le milieu de FF', il en résulte que s et Q sont des points conjugués par rapport à F et F'.

On a $\quad \mathrm{F}s = \frac{p-c}{(a+b)}(a-b); \quad \mathrm{F}'s = \frac{p}{(a+c)}(a-b).$

Donc $\quad \frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{F'S}} = \frac{p-c}{p} = \frac{r}{r'}.$

Donc le rapport des distances du point s aux points F et F est égal au rapport des rayons des cercles inscrit et ex-inscrit.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Sur le quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre.

Par M. R. **Malloizel**, professeur à Sainte-Barbe.

Je rappelle les théorèmes suivants dont j'aurai à me servir plus loin :

1.—Soit *(fig. 1)* ρ le rayon d'une circonférence et α la distance de son centre O à un point P. Si on transforme cet e circon-

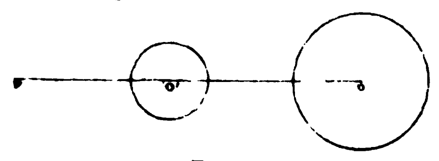


Fig. 1.

férence par rayons vecteurs réciproques, en prenant P comme pôle, on obtient un circonférence de centre O' et de rayon ρ'

donné par la formule $\rho' = \frac{\mu\rho}{\alpha^2 - \rho^2}$, (1)

μ désignant la puissance de transformation. La distance PO′, que je désigne par α', est d'ailleurs fournie par l'égalité

$$\alpha' = \frac{\mu\alpha}{\alpha^2 - \rho^2}. \quad (2)$$

2. — Étant donnés une circonférence O et un point A pris dans son plan *(fig. 2)*, si on fait tourner un angle droit BAC autour de son sommet A, le lieu du point milieu E de la corde hypoténuse BC est une circonférence dont le centre est le point milieu D de OA et le rayon m donné par la formule

$$m = \frac{\sqrt{2r^2 - a^2}}{2}$$

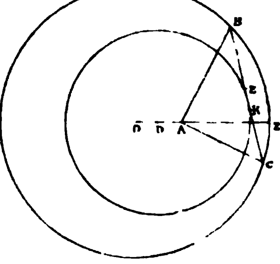


Fig. 2.

en appelant r le rayon de la circonférence O, et en désignant par a la distance OA. — On sait aussi que le lieu de la projection K du point A sur BC est la même circonférence.

Proposons-nous maintenant la question suivante :

L'angle droit BAC *tournant autour de son sommet fixe* A, *cherchons le lieu du point* T *de rencontre des tangentes en* B *et* C *à la circonférence* O *(fig. 3)*.

La ligne OE, qui joint le point O au point E, milieu de BC, est perpendiculaire sur BC, et passe au point T. Si l'on mène OC, on a, dans le triangle rectangle OCT

$$OC^2 \text{ ou } r^2 = OE.OT$$

d'où $\quad OT = \frac{r^2}{OE}$.

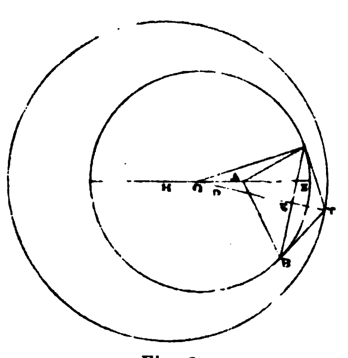


Fig. 3.

Le lieu du point T est donc la figure transformée de la circonférence DE par rayons vecteurs réciproques; le pôle de transformation est le point

O, et la puissance est r^2. Si nous désignons le rayon de cette circonférence par R, et la distance de son centre H au point O par d, on obtient en appliquant les formules (1) et (2) où l'on fait, $\rho = \frac{\sqrt{2r^2 - a^2}}{2}$, $\alpha = \frac{a}{2}$,

$$(3) \quad R = \frac{r^2 (2r^2 - a^4)}{a^2 - r^2}. \qquad (4) \quad d = \frac{r^2 a}{a^2 - r^2}.$$

Discussion. Faisons varier le point A sur le diamètre OD. Quand le point A est en O, le cercle DE a son centre D au point O, son rayon est égal à $\frac{r}{\sqrt{2}}$; le cercle HT a aussi son centre en O; son rayon égal à $r\sqrt{2}$. La figure OBTC est un carré.

Quand le point A se déplace de O vers Z, en restant à l'intérieur de la circonférence OI, le rayon m va en diminuant, tandis que le rayon R va en augmentant. Quand le point A arrive en Z, la circonférence DE devient la circonférence décrite sur OZ comme diamètre, et la circonférence HT devient la tangente en Z au cercle OZ.

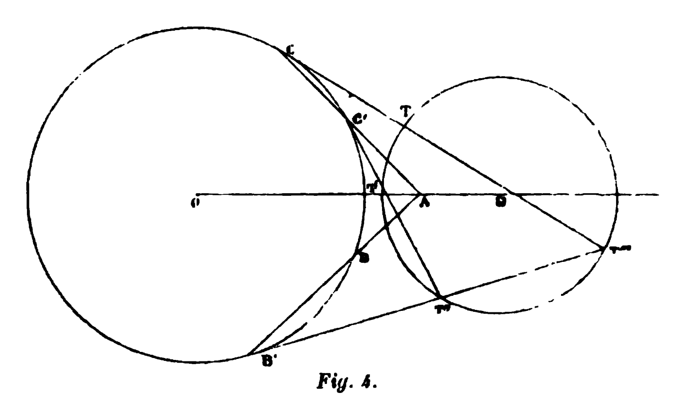


Fig. 4.

Quand le point A se déplace à droite du point Z, m continue à diminuer; R diminue aussi; le cercle HT devient extérieur au cercle OZ et ne le renferme plus, comme dans la figure 3; le centre H, qui est d'abord à l'infini à droite du point O, se rapproche de ce point.

Enfin, quand le point A prend une position L telle que

$OL = r\sqrt{2}$, les rayons m et R deviennent nuls, et les cercles correspondants se réduisent aux points D et L. Les tangentes menées du point L à la circonférence OZ sont rectangulaires.

Remarques. — Revenons au problème précédent, et prolongeons les côtés AB et AC jusqu'à la circonférence en B′ et C′. Nous obtiendrons en même temps trois autres points du lieu, T′, T″, T‴, fig. 4 et 4 *bis*. On a ainsi un quadrilatère TT′T″T‴, qui est circonscrit à la circonférence donnée OZ et inscrit à la circonférence HT. Il y a un nombre infini de quadrilatères remplissant les deux conditions précédentes. On peut remarquer que les lignes BB′, CC′, qui joignent les points de contact des côtés opposés sont rectangulaires.

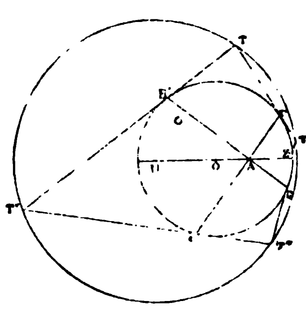


Fig. 4 bis.

Éliminons maintenant a entre les relations (3) et (4). Divisons ces deux égalités membre à membre; il vient, en élevant au carré
$$a^2R^2 = d^2(2r^2 - a^2)$$
d'où l'on tire
$$a^2 = \frac{2r^2d^2}{R^2 + d^2}$$
Portons cette valeur de a dans l'équation (4) dont on a élevé les deux membres au carré, on trouve, tout calcul fait
$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$
Telle est la relation qui existe entre les rayons r du cercle inscrit et R du cercle circonscrit, et la distance d de leurs centres.

Je proposerai au lecteur les théorèmes suivants, dont les démonstrations s'appuient sur ce qui précède :

1. *Dans tout quadrilatère à la fois circonscrit à un cercle et inscrit dans un autre, les lignes qui joignent les points de contact des côtés opposés se coupent à angle droit.*

2. *Réciproquement, tout quadrilatère circonscrit à un cercle est inscriptible dans un autre si les lignes qui joignent les points de contact des côtés opposés sont rectangulaires.*

3. *Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, on peut inscrire dans le premier une infinité de quadrilatères qui soient circonscrits au second. Les cordes qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par un point fixe.*

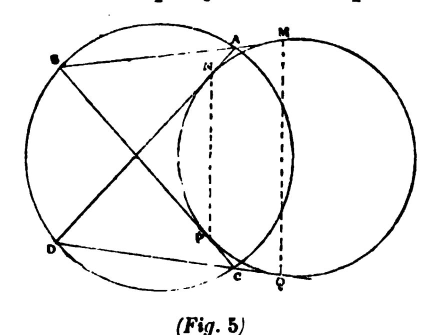
4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse circonscrire à un cercle de rayon* r *un quadrilatère inscrit dans un autre cercle de rayon* R *est, en appelant* d *la distance des centres, qu'il existe entre les quantités* r, R, d, *la relation*

$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$

Remarque I. — Cette équation est du second degré en d^2; il est intéressant de la discuter en comparant les racines aux quantités $(R - r)^2$ et $(R + r)^2$, qui ne comprennent jamais une racine. Ces racines sont d'ailleurs toujours réelles; l'une d'elles, plus grande que $(R + r)^2$, donne toujours deux circonférences extérieures l'une à l'autre; l'autre, plus petite que $(R - r)^2$, n'est positive que dans le cas où R est supérieur à $r\sqrt{2}$, et donne une figure analogue à la figure 3.

On retrouve facilement toute la discussion faite antérieurement, et l'on voit immédiatement les positions relatives du quadrilatère et des deux circonférences, qui ne sont jamais sécantes.

Remarque II. — Les théorèmes que j'ai donnés précédemment ne s'appliquent qu'au quadrilatère convexe. Il est facile de voir qu'un quadrilatère concave à la fois circonscrit et inscrit a ses côtés opposés égaux. Ceci résulte de l'égalité des angles B et C, qui donne MN = PQ *(fig. 5)*. NP et MQ sont deux droites parallèles.



(Fig. 5)

Réciproquement un quadrilatère concave qui a ses côtés opposés égaux est inscriptible et circonscriptible.

Dans ce cas, les deux circonférences sont toujours sécantes.

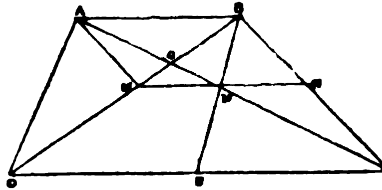
THÉORÈME SUR LE TRAPÈZE

Par Maurice d'Ocagne.

Voici un théorème que je crois nouveau et qui me semble assez remarquable par sa grande simplicité et par les conséquences qui s'en déduisent :

Théorème. — *Si par les extrémités d'une des bases d'un trapèze on mène des parallèles aux côtés obliques de ce trapèze ; 1° la droite qui joint les points d'intersection de ces droites avec les diagonales est parallèle aux bases ; 2° la longueur de cette ligne est troisième proportionnelle aux longueurs des bases.*

Soit le trapèze ABCD ; par le sommet A je mène AM, parallèle à BC, qui rencontre BD en M ; par B je mène BN, parallèle à AD, qui rencontre AC en N.



1° Je dis que MN est parallèle aux bases.

En effet, la similitude des triangles OBN, ODA donne

$$\frac{ON}{OA} = \frac{OB}{OD}.$$

De même, la similitude des triangles OAM, OCB donne

$$\frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OC}$$

et comme

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

il en résulte

$$\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB}$$

c'est-à-dire que MN est parallèle à AB.

2° Je dis maintenant que $\frac{CD}{AB} = \frac{AB}{MN}$.

Pour le prouver je prolonge BN jusqu'en sa rencontre E avec CD, et MN jusqu'en sa rencontre H avec BC.

La similitude des triangles BDE, BMN donne alors

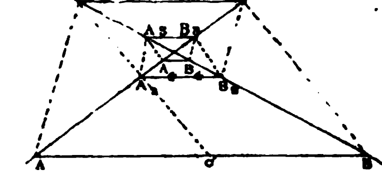
$$\frac{DE}{MN} = \frac{BD}{BM} \text{ ou } \frac{AB}{MN} = \frac{BD}{BM}.$$

De même, la similitude des triangles BDC, BMH donne

$$\frac{DC}{MH} = \frac{BD}{BM} \text{ ou } \frac{DC}{AB} = \frac{BD}{BM}.$$

Par suite $$\frac{DC}{AB} = \frac{AB}{MN} \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

Application. — Comme conséquence immédiate de ce théorème, nous avons une construction géométrique facile des termes d'une progression par quotient :



Je trace une ligne AB égale au premier terme de la progression donnée; sur une parallèle quelconque à cette droite je porte, à partir de n'importe quelle origine, une longueur A_1B_1 égale à $q \times AB$ si q est la raison.

Je mène alors les droites AA_1, BB_1, AB_1, BA_1.

Puis par A_1 et B_1 je mène des parallèles respectivement à BB_1 et à AA_1. Je détermine ainsi les points A_2 sur AB_1, B_2 sur BA_1. D'après le théorème démontré, A_2B_2 est parallèle à A_1B_1 et on a $$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1B_1}{AB} = q.$$

De même en menant par A_2 et B_2 des parallèles respectivement à AA_1 et à BB_1, on obtient sur A_1B et B_1A les points A_3 et B_3, A_3B_3 est parallèle à A_2 B_2 et on a

$$\frac{A_3B_3}{A_2B_2} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = q$$

et ainsi de suite.

La suite des droites AB, A_1B_1, A_2B_2,. . . fournit donc les termes successifs de la progression considérée.

Dans l'exemple actuel, nous avons supposé la raison inférieure à l'unité, comme l'indique la figure, puisque $A_1B_1 < AB$.

On sait que dans ce cas la somme des termes de la pro-

gression tend vers une limite S dont la valeur est

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

D'après la construction effectuée on voit que

$$S = \frac{AB}{1 - \frac{A_1B_1}{AB}} = \frac{\overline{AB}^2}{AB - A_1B_1}$$

ou

$$S = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$$

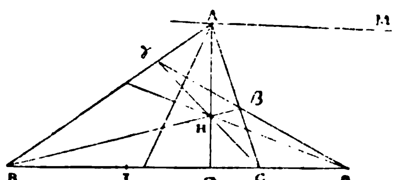
ce qui fournit une facile construction de cette limite.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. G. Kœnigs, élève au Lycée Saint-Louis.

Théorème. — *Soient* ABC *un triangle,* α, β, γ *les pieds des hauteurs* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, *qui se coupent en* H. *Soient aussi* a *le point où se coupent* CB *et* $\gamma\beta$, *et* I *le milieu de* BC. *Les droites* AI, aH *se coupent à angle droit.*

En effet, menons AM parallèle à BC. Les quatre droites AM, AI, AB, AC forment un faisceau harmonique; il en est de même du faisceau des quatre droites $H\alpha$, H*a*, HC, HB, puisque le quadrilatère $C\beta\gamma B$ est inscriptible; mais trois des droites de ce dernier faisceau sont perpendiculaires à trois droites du premier; donc les quatrièmes droites AI, H*a*, sont aussi rectangulaires. Cela résulte de la réciproque de cette proposition que le faisceau des perpendiculaires issues d'un point sur quatre rayons d'un faisceau harmonique est lui-même harmonique.



Appliquons ce théorème au problème suivant: *Trouver le lieu d'un point* A *tel que les hauteurs du triangle* ABC *formé*

par les tangentes issues de A *à une conique donnée et la polaire de ce point se coupent sur la courbe.*

Construisons la droite aH comme précédemment; Aα est la polaire de a, donc aH est tangente en H. Du reste, le diamètre OA passe par I, milieu de BC (O est le centre de la conique); donc en vertu du théorème précédent ce diamètre est perpendiculaire en K à Ha. En outre, le cercle circonscrit au triangle Aαa passe par K, puisque l'angle en K et l'angle en α sont droits. La puissance du centre O par rapport à ce cercle est donc OK $\times$ OA ; mais le triangle Aαa est autopolaire ; la puissance du centre par rapport au cercle circonscrit est donc, en vertu du théorème de Faure, égale à $a^2 + b^2$. On a donc :

$$OK \times OA = a^2 + b^2.$$

Donc enfin le lieu de A est la polaire réciproque de la conique proposée par rapport au cercle concentrique et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. On sait que ce cercle est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

Problème. — *On donne une ellipse, et en un point* M *on mène la normale* MN. *Soit* P *le pôle de cette normale; trouver le lieu décrit par le pied de la perpendiculaire issue de* P *sur le diamètre* OM.

Soit Q le pied de la perpendiculaire issue de P sur OM *. Le cercle circonscrit au triangle MPQ est tel que la puissance du centre O de la conique est égale à OM. OQ; d'autre part il est tangent en M à la normale MN. Ce cercle passe donc par le point P et est tangent en M à la polaire de ce point. Considérons deux points R et S divisant harmoniquement le segment MN. Le triangle PRS est autopolaire; la puissance du centre de la conique par rapport au cercle circonscrit est donc égale à $(a^2 + b^2)$ (*Th. de Faure*). Si on suppose que R se rapproche de M, S tendra aussi vers M, et à la position limite, le cercle passera par P et sera tangent à MN.

On aura donc $$OM \times OQ = a^2 + b^2.$$

---

* Le lecteur est prié de faire la figure.

Ce qui montre que le lieu du point Q est la figure inverse de la conique, le centre étant le pôle, et $(a^2 + b^2)$ la puissance d'inversion.

NOTE

SUR UN PROBLÈME CLASSIQUE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Gino Loria.**

Dans presque tous les traités de géométrie élémentaire, comme application des propriétés fondamentales du cercle, on résout le problème suivant : *sur une droite donnée, construire un segment capable d'un angle donné.*

La solution qu'on en donne, due aux géomètres grecs, est très rigoureuse; mais elle nous semble un peu difficile pour ceux qui commencent l'étude des mathématiques.

Nous croyons qu'on n'a jamais remarqué la solution très simple que nous allons signaler.

Soit A l'angle donné, *m*, la longueur de la droite; d'un point quelconque B de l'un des côtés de l'angle donné, avec une ouverture de compas égale à *m*, décrivons un arc de cercle qui coupera l'autre côté de l'angle en deux points C et C'. Circonscrivons une circonférence au triangle ABC (ou à ABC'). Le problème reviendra ensuite à construire un cercle de rayon donné, et passant par deux points donnés, les extrémités de la droite M.

Note de la rédaction. — Un avantage considérable de cette méthode est que, par suite de la position arbitraire du point B, on peut faire en sorte que l'un des angles du triangle ABC soit voisin d'un angle droit, ce qui donnera une plus grande précision pour la détermination du centre, et par suite du rayon du cercle cherché. De plus, au point de vue graphique, elle est un peu plus courte que la méthode ordinaire, sans être moins rigoureuse. A. M.

CONCOURS ACADEMIQUE

AIX 1879

Étant donné un triangle ABC, on prend sur les trois côtés des points a, b, c, tels que
$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{Cb}{Ab} = \frac{Ac}{Bc} = \frac{p}{q}.$$
On demande : 1° de construire le triangle ABC connaissant les longueurs des droites Aa, Bb, Cc ;

2° De calculer les côtés du triangle donné en fonction de ces longueurs, et de discuter les valeurs ainsi obtenues ;

3° De considérer le cas particulier où l'on a $\frac{p}{q} = 1$.

BESANÇON ET NANCY 1879

Par le sommet O d'un triangle OAB, on élève une perpendiculaire OC au plan du triangle ; les droites OA et OB restent fixes, ainsi que le point C ; les points A et B se déplacent de façon que AB conserve une valeur constante. Trouver le minimum de l'angle ACB ; l'angle AOB est aigu. Prenant $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = h$, $AB = c$, $AOB = \theta$, $ACB = C$, et supposant $c = h \operatorname{tg} \theta$, on déterminera dans ce cas particulier pour combien de positions de la ligne AB l'angle C prend une valeur donnée, et les limites entre lesquelles varie cet angle.

Les données restant les mêmes, démontrer que les deux cercles décrits, l'un du point A comme centre avec le rayon AC, dans le plan ACO, l'autre du point B comme centre avec le rayon BC, dans le plan BCO, déterminent une sphère de rayon constant.

CHAMBÉRY ET GRENOBLE 1879

On donne un rectangle OADB et un cercle dont le centre est en C et qui touche en A le côté OA. On sait qu'il existe deux cercles tangents au précédent et touchant le côté OB en B. Si Q et Q′ sont les centres de ces cercles, G et G′ les points où ils touchent le cercle, C, H et H′ les points où OA est rencontré par les tangentes en G et G′ au cercle C, on demande d'étudier les variations des longueurs CQ, CQ′, QQ′ et HH′ quand le centre C du premier cercle se meut sur AD, en se bornant aux cas où le point B reste extérieur à ce cercle.

MONTPELLIER 1879

Deux cônes de même hauteur ont pour base commune un cercle donné, les sommets étant situés de part et d'autre du plan de cette base. On demande de déterminer une section circulaire du premier et une section circulaire du second

telles que, en prenant ces sections pour bases d'un tronc de cône, l'apothème et la surface totale du tronc de cône soient égales à des quantités données.

MONTPELLIER 1867

Quelle relation existe entre les côtés d'un triangle rectangle circonscrit à un cercle donné? Parmi tous ces triangles, trouver celui : 1° dont un côté de l'angle droit a une longueur donnée; 2° dont le périmètre est minimum; 3° dont les côtés forment une progression arithmétique.

QUESTIONS DIVERSES

CONCOURS ACADÉMIQUES

Etant donnés quatre points A, B, C, D, en ligne droite, on décrit sur AB un segment quelconque et sur CD un segment capable du même angle. Trouver le lieu géométrique du milieu de la corde d'intersection des deux cercles lorsque l'angle commun des deux segments vient à varier.

(Concours Montpellier 1870.)

— Soit O un point quelconque pris dans le plan du triangle ABC; soient E, F, G les milieux des côtés. — Démontrer que le système des forces OA, OB, OC est équivalent au système OE, OF, OG.

(Bordeaux, concours acad. Ens. spécial 1878.)

— Soit ABC un plan incliné de 30° sur l'horizon. On propose de déterminer les points M et N, de telle manière que la longueur MN, supposée égale à AB soit parcourue par un point pesant parti sans vitesse du point A, dans le même temps que la hauteur AB serait parcourue par un autre point pesant tombant librement de A.

(Bordeaux, concours acad. Ens. spécial 1878.)

— On a un levier AB du poids de 1 kilogr. fixé en C; AC = $0^m,2$; BC = $0^m,3$. Un poids D de 3 kilogr. est soutenu par les deux fils AD et BD, longs de $0^m,4$ et $0^m,3$. On demande quelle force verticale il faut appliquer en A pour maintenir le levier dans une position horizontale.

(Bordeaux, conc. acad. Ens. spéc. 1875.)

— On donne une droite rigide AB de $0^m,40$; on applique à ses extrémités deux forces AF et BF′ agissant dans un même plan et égales chacune à 6 kilogr. AF fait avec AB un angle de 150° et BF′ un angle de 120°. On demande en quel point de AB il faut appliquer une force pour maintenir AB en équilibre, quelle est l'intensité de cette force et quel est l'angle qu'elle fait avec AB? — On demande quelle doit être l'intensité de la force BF′ pour que la force qui doit maintenir AB en équilibre passe par le milieu de cette droite.

(Bordeaux, conc. acad. Ens. spéc.)

— Un plan horizontal repose sur une sphère par un point O. On place sur ce plan un poids de 14 kilogr. en un point A, et un poids de 21 kilogr. en un

point B. On demande en quel point C il faudra placer un poids de 25 kilogr. pour que l'équilibre ne soit pas rompu. La distance OI du point O à la droite AB est de $0^m,5$; $AI = 0^m,6$; $BI = 0^m,4$. *(Concours acad. Rennes, 1874.)*

— Le filet d'une vis porte 150 spires sur une hauteur de $0^m,36$. La puissance est appliquée à une distance de l'axe égale à 2 mètres. Quelle est la force capable de faire équilibre à un poids d'une tonne appliqué sur la tête de la vis? — Calculer le travail développé pour élever ce poids d'une tonne de $0^m,14$; et vérfiier sur l'exemple proposé le principe de l'égalité de travail de la puissance et de la résistance. *(Bordeaux, concours acad. Ens. spécial.)*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 149.

Solution par M. Bucheron, élève au Lycée de Moulins.

Deux circonférences sont tangentes extérieurement. Sur la ligne des centres comme diamètre on décrit une circonférence et l'on mène la circonférence A *tangente aux trois circonférences ainsi obtenues. Si* R *et* r *sont les rayons des deux premières,* D *le diamètre de la circonférence* A, *on a la relation*

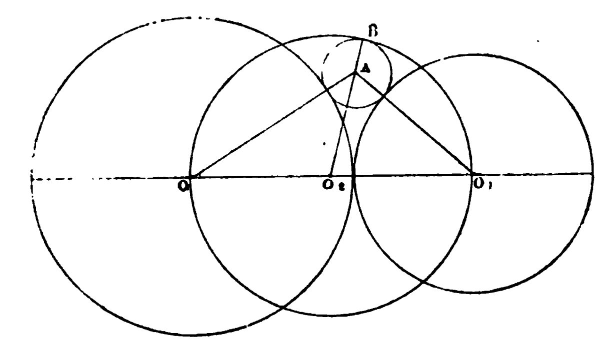
$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

Chercher ce qui arrive lorsque les circonférences sont tangentes intérieurement.

Le triangle OAO_1 donne

$$AO^2 + O_1A^2 = 2AO_2^2 + 2OO_2^2$$

On en tire $\quad 4D(R + r) = 4Rr$



d'où en divisant par $4RrD$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{1}{D}.$$

Si les circonférences sont tangentes intérieurement on a

$$\left(R-\frac{D}{2}\right)^2+\left(r+\frac{D}{2}\right)^2=2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$$
$$+\,2\left(\frac{R-r+D}{2}\right)^2$$

ou

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{1}{D}.$$

Nota : Ont résolu la même question : MM. d'Arodes, à Mont-de-Marsan; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Engelhard, à Troyes; Vazou, collège Rollin; Baudot, à Dijon; Hugot, à Lyon; Lannes, à Tarbes; Dumur, à Chartres; Gélinet, à Orléans; Longueville, à Charleville; Élie, collège Stanislas; Dupuy, à Grenoble; Deslais, au Mans; Lesoille, collège de Sedan.

QUESTION 150.

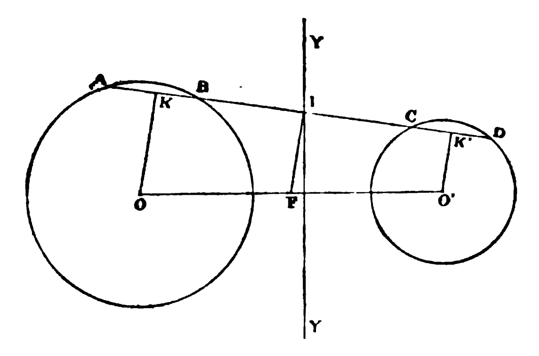
Solution par M. D'ARODES, élève du Lycée de Mont-de-Marsan.

Une droite AD *rencontre deux circonférences* O *et* O' *de telle sorte que les cordes interceptées* AB *et* CD *soient égales entre elles.*

Trouver : 1° le lieu géométrique du milieu de AD; *2° l'enveloppe de la droite* AD. *En déduire le problème suivant : mener par un point donné dans le plan de deux circonférences une droite telle que les cordes interceptées soient égales.*

1° Puisque $AI = ID$ et que $AB = CD$, on a évidemment $IB = IC$. Donc $AI \,.\, IB = IC \,.\, ID$. Le point I est donc d'égale puissance par rapport aux deux circonférences, et le lieu de ce point est l'axe radical des deux circonférences.

2° Élevons au point I la perpendiculaire IF jusqu'à la rencontre de OO'. Abaissons OK, OK' perpendiculaires sur AB et CD. On a $IK = IK'$, et par suite $OF = O'F$. Le point F est donc constant, et, d'après une propriété de la parabole, l'enveloppe de la droite AD est une parabole ayant pour foyer le milieu de la ligne des centres et pour tangente au sommet l'axe radical des deux circonférences.



3° Soit P le point donné. Il suffira de mener la directrice de la parabole, et de mener par le point P une tangente à cette parabole déterminée par son foyer et sa directrice.

Nota. — M. Combebiac, de Montauban, a résolu la même question.

QUESTION 151.

Solution par M. Vazou, élève du Collège Rollin.

Soit ABC *un triangle,* O *un point de son plan. On mène les droites* OA, OB, OC *qui coupent les côtés en* A', B', C'; *on coupe le triangle* A'B'C' *par une transversale* αβγ *(*α *est le point où cette transversale rencontre* B'C', *etc...), les droites* Aα, Bβ, Cγ *rencontrent les côtés du premier triangle en trois points qui sont en ligne droite.*

Le triangle β'A'C* coupé par la transversale BβN donne

$$\frac{\beta'\beta}{\beta A'} \cdot \frac{A'B}{BC} \cdot \frac{CN}{N\beta'} = -1$$

Les triangles γ'BA', α'C'B coupés respectivement par les transversales CγP, AαM donnent

$$\frac{\gamma'P}{PB} \cdot \frac{BC}{CA'} \cdot \frac{A'\gamma}{\gamma\gamma'} = -1$$

$$\frac{\alpha'\alpha}{\alpha C'} \times \frac{C'A}{AB} \times \frac{BM}{M\alpha'} = -1$$

---

* Le lecteur est prié de faire la figure.

De même les triangles $\alpha'B'C$, $\beta'C'A$, $\gamma'B'A'$ coupés respectivement par les droites $A\alpha M$, $B\beta N$, $C\gamma P$ donnent également

$$\frac{\alpha'M}{MC} \times \frac{CA}{AB'} \times \frac{B'\alpha}{\alpha\alpha'} = -1$$

$$\frac{\beta'N}{NA} \times \frac{AB}{BC'} \times \frac{C'\beta}{\beta\beta'} = -1$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\gamma B'} \times \frac{B'C}{CA} \times \frac{AP}{P\gamma'} = -1$$

multipliant toutes ces égalités membre à membre il vient

$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BM}{MC} \times \frac{CN}{NA} \times \frac{AC'}{C'B} \times \frac{BA'}{CB'} \times \frac{CB'}{B'A}$$
$$\times \frac{A'\gamma}{\gamma B'} \times \frac{B'\alpha}{\alpha C'} \times \frac{C'\beta}{\beta A'} = +1$$

or
$$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} = +1$$

et
$$\frac{A'\gamma}{\gamma B'} \times \frac{B'\alpha}{\alpha C'} \times \frac{C'\beta}{\beta A'} = -1$$

par suite
$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BM}{MC} \times \frac{CN}{NA} = -1$$

Donc les trois points M, N, P sont en ligne droite.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Deslais, au Mans; Détraz, à Bourg; Cadot, du lycée Saint-Louis; Henrique, à Bordeaux; du Motel, au Lycée Saint-Louis.

QUESTION 152.

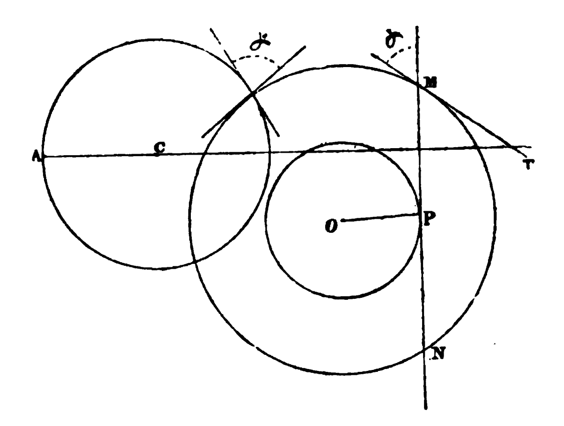
Solution par M. Maurice d'Ocagne, élève au Collége Chaptal.

On a une circonférence fixe O, et un point fixe A; par le point A, on fait passer une circonférence variable qui coupe la circonférence O sous un angle constant : démontrer que la circonférence variable a pour enveloppe une circonférence.

Considérons une des circonférences C qui passent par A et coupent la circonférence O sous l'angle donné α. Transformons par rayons vecteurs réciproques en prenant le point A pour pôle, et la puissance de ce point par rapport

au cercle O, pour module d'inversion. Le cercle O sera alors anallagmatique.

La circonférence C passant par le pôle aura pour transformée une perpendiculaire MN à AC, coupant la circonférence O sous l'angle α.



L'angle TMN de la tangente à la circonférence et de MN étant constant, l'arc MN et, par suite, la corde MN sont constants; il en résulte que l'enveloppe des transformées telles que MN est la circonférence décrite de O comme centre avec un rayon égal à la perpendiculaire OP abaissée de O sur MN.

Si on revient au système primitif, cette circonférence se transformera en une autre circonférence tangente aux circonférences telles que C. Par suite l'enveloppe de ces dernières est bien une circonférence.

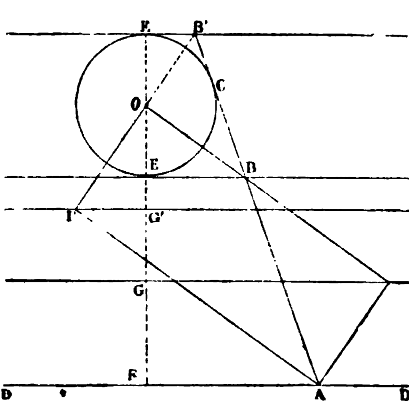
QUESTION 154.

Solution par M. E. Pombart, élève de l'école normale de Charleville.

On donne un cercle O *et une droite* DD'; *soit* AC *une tangente quelconque de ce cercle, tangente qui rencontre en* A *la droite* DD'. *On mène les bissectrices des angles en* A, *et on projette le centre du cercle sur ces bissectrices; on demande : 1° le lieu de*

projection du centre sur ces bissectrices; 2° le lieu du point B *où la tangente variable rencontre la projetante du point* O *sur les bissectrices.*

La figure, construite comme l'indique l'énoncé, est un rectangle. Il faut chercher le lieu des sommets I, I′, puis le lieu des points B, B′ où les projetantes du centre rencontrent la tangente variable.



B étant le point où la projetante sur AI rencontre CA, menons de ce point une tangente à la circonférence O. Les angles OBC, OBE′ sont égaux, il en résulte que BE′ est parallèle à DD′. Il en est de même de B′E. Comme pour toute tangente, l'angle BOB′ est droit, il s'ensuit que tous les points des tangentes parallèles à DD′ sont des points de ce lieu.

Ceci posé, et les droites EF, B′A étant coupées par des parallèles EB′, E′B, FA, nous avons

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{E'E}{E'F}$$

ou bien, en désignant E′E par 2R et E′F par *d*,

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{2R}{d}.$$

Mais les triangles semblables BOB′ BIA donnent aussi

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{BO}{BI};$$

par suite

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{BO}{BI} = \frac{2R}{d}.$$

Et comme le point B se déplace sur une parallèle à DD′, il en résulte que le lieu du point I est une parallèle à DD′. Il en est de même du lieu du sommet I′.

Cherchons les distances de ces parallèles à BE′ et à B′E.

Les triangles semblables OBE′, OIG donnent

$$\frac{BO}{BI} = \frac{E'O}{E'G} = \frac{R}{E'G},$$

d'où

$$\frac{2R}{d} = \frac{R}{E'G};$$

et

$$\frac{2}{d} = \frac{1}{E'G},$$

d'où

$$E'G = \frac{d}{2}.$$

Les triangles OEB′, OI′G′ donnent aussi

$$\frac{OB'}{OI'} = \frac{OE}{OG'} = \frac{2R}{d}$$

et, comme $OE = R$,

$$\frac{R}{OG'} = \frac{2R}{d}$$

ou

$$\frac{1}{OG'} = \frac{2}{d}$$

d'où

$$OG' = \frac{d}{2};$$

par suite

$$EG' = OG' + OE = \frac{d}{2} + R$$
$$= \frac{d + 2R}{2}.$$

Ainsi, 1° le lieu des points I, I′ se compose de deux parallèles indéfinies à la droite DD′, menées par les milieux des distances de la droite DD′ à la *circonférence* O; et 2° le lieu des points B, B′, des deux tangentes parallèles à DD′.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vermand, de Saint-Quentin; Lannes, de Tarbes; Longueville, à Charleville; Tessier, à Angers; Hoc, à Sainte-Barbe; Bompart, Élie, collége Stanislas; Hugot, de Lyon; Vazou au collège Rollin.

QUESTIONS PROPOSÉES

203. — Démontrer que la surface d'un triangle en fonction des bissectrices l, l' extérieure et intérieure d'un angle et du rapport K des côtés formant cet angle, est donnée par la formule $S = \frac{ll'}{4}\left(\frac{K^2 - 1}{K}\right)$.

(Reboul.)

204. — Du pied A′ d'une des hauteurs AA′ d'un triangle ABC, on mène les perpendiculaires A′D, A′E ; A′K, A′L respectivement sur les côtés AB, AC et sur les deux autres hauteurs BB′, CC′ du triangle ABC. Démontrer :

1° Que les quatre points D,K,L,E sont en ligne droite ;

2° Que en appelant S la surface du triangle ABC, la surface du triangle A′DE a pour expression

$$S \sin B \sin C \cos B \cos C;$$

3° Que la hauteur A′P du triangle A′DE a pour expression $2R \sin B \sin C \cos B \cos C$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

(Perrin.)

205. — Trouver $2n + 1$ nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des $n + 1$ premiers de ces nombres soit égale à la somme des carrés des n nombres suivants.

(Dostor.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 22262-9.

TABLE DES MATIÈRES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TOME III

Trigonométrie.

Mélanges.

Bibliographie.

Pages.

Correspondance.

Questions proposées.

Concours pour les écoles.

Concours généraux.

Examens divers.

Concours académiques.

Baccalauréat ès sciences.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS — 22262-9.

2

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

Élémentaires et Spéciales

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix
Ex-directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Avec la collaboration

DE MM.

AUG. MOREL, COCHEZ ET BOQUEL
Professeurs de Mathématiques

TOME QUATRIÈME



ANNÉE 1880

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

—

1880

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

Élémentaires et Spéciales

NOMBRES RELATIFS DES POLYGONES RÉGULIERS

DE n ET DE $2n$ CÔTÉS, SUIVANT QUE n EST UN NOMBRE IMPAIR OU UN NOMBRE PAIR. POLYGONES RÉGULIERS CORRESPONDANTS. POLYGONES RÉGULIERS CONJUGUÉS.

Par Georges **Dostor.**

1. **Théorème I.** — *Lorsque* n *est un nombre impair, il existe autant de polygones de* 2n *côtés, dont l'un est convexe et les autres étoilés qu'il y a de polygones de* n *côtés.*

Soit p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone étoilé de n côtés et de l'espèce p.

Puisque p est inférieur à la moitié de n, $2p$ sera moindre que n; par suite $n - 2p$ sera aussi un nombre entier positif, plus petit que n ou que la moitié de $2n$.

Or je dis que $n - 2p$ est aussi premier avec $2n$.

En effet, n étant impair, $n - 2p$ sera aussi impair. Il s'ensuit que tout facteur entier commun à $n - 2p$ et $2n$ ne saurait être qu'un nombre impair, qui diviserait n. Ce facteur impair, divisant $n - 2p$ et n, diviserait leur différence $2p$ et par suite p. Donc p et n ne seraient pas premiers entre eux.

Ainsi à chaque nombre entier p, inférieur à la moitié de n et premier avec n, correspond un nombre entier $n - 2p$ inférieur à la moitié de $2n$ et premier avec $2n$.

Réciproquement à chaque nombre entier q, inférieur à la

moitié n de $2n$ et premier avec $2n$, correspond au nombre entier $\frac{n-q}{2}$ inférieur à la moitié de n et premier avec n.

Car q, étant premier avec $2n$, est un nombre impair; et, comme n est supposé impair, $\frac{n-q}{2}$ est un nombre évidemment moindre que $\frac{n}{2}$.

D'ailleurs q, étant premier avec $2n$, l'est avec n; donc $\frac{n-q}{2}$ est aussi premier avec n.

Il s'ensuit que, si n est impair, à tout polygone convexe ou étoilé de n côtés correspond un polygone convexe ou étoilé de $2n$ côtés, et réciproquement.

2. **Théorème II.** — *Lorsque* n *est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones de* 2n *côtés* (dont l'un est convexe et les autres étoilés), *qu'il y a de polygones de* n *côtés.*

Soit, en effet, p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone de n côtés et de l'espèce p.

Or le nombre p, étant premier avec le nombre pair n, est nécessairement impair; par suite il est aussi premier avec $2n$.

Mais p étant premier avec n, $n - p$ l'est aussi, non seulement avec n, mais aussi avec $2n$; de plus $n - p$ est évidemment moindre que n ou que la moitié de $2n$.

Donc, si n est pair, à chaque polygone de n côtés et de l'espèce p correspondent deux polygones de $2n$ côtés et des espèces p et $n - p$.

Donc le nombre des polygones de $2n$ côtés est double de celui des polygones qui n'ont que n côtés.

3. **Polygones correspondants.** — Nous avons vu (n° 1) que, si n est impair, il existe autant de polygones de $2n$ côtés qu'il y a de polygones de n côtés, et qu'à chaque polygone de n côtés et de l'espèce p correspond un polygone de $2n$ côtés, et de l'espèce $n - 2p$.

Nous appellerons *polygones correspondants,* les deux poly-

gones l'un d'un nombre impair n de côtés et l'autre de $2n$ côtés, dont les espèces sont respectivement p et $n - 2p$.

Il s'ensuit que

Si n *est impair, deux polygones, l'un de* n *et l'autre de* 2n *côtés, sont correspondants, si la double espèce du premier, augmentée de l'espèce du second, est égale à* n.

Car on a $2p + (n - 2p) = 2p + n - 2p = n$.

4. **Théorème III.** — *Les côtés de deux polygones réguliers correspondants qui sont inscrits dans le même cercle, sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.*

Soit, en effet, p l'espèce d'un polygone régulier d'un nombre impair n de côtés ; $n - 2p$ sera l'espèce du polygone régulier correspondant qui a $2n$ côtés.

Le côté $C_{n,p}$ du premier polygone sous-tend p fois la n^{me} partie de la circonférence circonscrite, ou un arc égal à

$$p \times \frac{2\pi}{n} = \frac{2p\pi}{n}.$$

Si R est le rayon du cercle circonscrit, on a donc

$$C_{n,\,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{n}. \qquad (1)$$

On trouverait de même que le côté du second polygone est $C_{2n,n-2p} = 2R \sin \dfrac{(n-2p)\pi}{2n} = 2R \sin \left(\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{p\pi}{n}\right)$

ou

$$C_{2n,\,n-2p} = 2R \cos \frac{p\pi}{n}. \qquad (2)$$

Élevant au carré les deux égalités (1) et (2) et ajoutant, on trouvera la relation

$$C^2_{n,\,p} + C^2_{2n,\,n-p} = R^2, \qquad (I)$$

qu'il s'agissait d'établir.

5. **Corollaire.** — Ce principe permet de calculer les côtés des polygones réguliers d'un nombre impair n de côtés, lorsqu'on connaît ceux des polygones réguliers d'un nombre double $2n$ de côtés ; et réciproquement.

Ainsi on sait que les côtés des deux décagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, sont :

$$C_{10,1} = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{5} - 1\right),\ C_{10,3} = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{5} + 1\right).$$

Or les pentagones réguliers qui leur *correspondent* respectivement sont le pentagone, étoilé et le pentagone convexe. On a par suite

$$C_{5,1} = \sqrt{4R^2 - C^2_{10,3}} = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4} R^2 \left(\sqrt{5} + 1\right)^2},$$

$$C_{5,2} = \sqrt{4R^2 - C^2_{10,1}} = \sqrt{4R^2 - \frac{1}{4} R^2 \left(\sqrt{5} - 1\right)^2},$$

ce qui fournit les valeurs

$$C_{5,1} = \frac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad C_{5,2} = \frac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

pour les côtés des deux pentagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé.

6. Polygones conjugués. — Nous avons vu (n° 2) que, si n est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones de $2n$ côtés qu'il y a de polygones de n côtés ; et qu'à chaque polygone de $2n$ côtés et de l'espèce p répond un polygone de $2n$ côtés et de l'espèce $n - p$.

Nous donnerons le nom de *polygones conjugués* à deux polygones d'un nombre doublement pair $2n$ de côtés, dont la somme des espèces est égale à n.

7. Théorème IV. — *Les côtés de deux polygones réguliers conjugués qui sont inscrits dans le même cercle, sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.*

Soit, en effet,

$$C_{2n,\,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n} \qquad (3)$$

le côté d'un polygone régulier ayant un nombre doublement pair $2n$ de côtés et étant de l'espèce p. Le côté de son conjugué, parmi ceux de $2n$ côtés, sera

$$C_{2n,\,n-p} = 2R \sin \frac{(n - p)\pi}{2n} = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{2n}\right),$$

ou

$$C_{2n,\,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{n}. \qquad (4)$$

Élevant au carré les deux côtés (3) et (4) et ajoutant, on obtient la relation à établir

$$C^2_{2n,\,p} + C^2_{2n,\,n-p} = 4R^2. \qquad \text{(II)}$$

8. **Corollaire I.** — Connaissant les valeurs des côtés de la première moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés, où n est pair, on peut, au moyen du théorème précédent, calculer les côtés de l'autre moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés.

9. **Corollaire II.** — Puisqu'on a

$$C_{2n,\,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n}, \quad C_{2n,\,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n},$$

on obtient, en multipliant,

$$C_{2n,\,p} \times C_{2n,\,n-p} = 4R^2 \sin \frac{p\pi}{2n} \cos \frac{p\pi}{2n} = 2R^2 \sin \frac{p\pi}{n}.$$

Mais on sait que $2R \sin \dfrac{p\pi}{n} = C_{n,\,p}$;

donc il vient

$$C_{2n,\,p} \times C_{2n,\,n-p} = R \times C_{n,\,p}. \qquad \text{(III)}$$

Ainsi *le côté d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est la quatrième proportionnelle au rayon du cercle circonscrit et aux côtés des deux polygones réguliers conjugués d'un nombre double de côtés, dont l'un est de même espèce que le premier et qui sont inscrits dans le même cercle.*

10. **Application.** — Soient x et y les côtés des deux dodécagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé. Nous avons

$$x = C_{12,1}, \; y = C_{12,5}, \; C_{n,\,p} = C_{6,1} = R.$$

En vertu des relations (II) et (III), nous avons

$$x^2 + y^2 = 4R^2, \quad xy = R^2, \qquad (5)$$

d'où nous tirons

$$x^2 + 2xy + y^2 = 6R^2, \quad x^2 - 2xy + y^2 = 2R^2,$$

ou bien $\quad x + y = R\sqrt{6}, \qquad x - y = - R\sqrt{2}.$

Les côtés des deux dodécagones réguliers sont donc :

$$x = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = R \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$y = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Les deux relations (5) prouvent que

1° *La somme des carrés des côtés des deux dodécagones réguliers qui sont inscrits dans le même cercle, est égale au carré du diamètre;*

2° *Le produit de ces côtés est égal au carré du rayon.*

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Composition supplémentaire donnée en 1879 aux candidats à Saint-Cyr empêchés de composer à l'époque ordinaire.

On donne deux points, l'un O situé sur la ligne de terre, l'autre M situé dans le plan horizontal de projection à 50^{mm} en avant de la ligne de terre et à 80^{mm} du point O : ceci posé on demande :

1° De faire passer par la droite MO qui joint les points donnés deux plans, l'un MOP' faisant un angle de 45° avec le plan horizontal de projection, l'autre MOQ' faisant le même angle avec le plan vertical de projection;

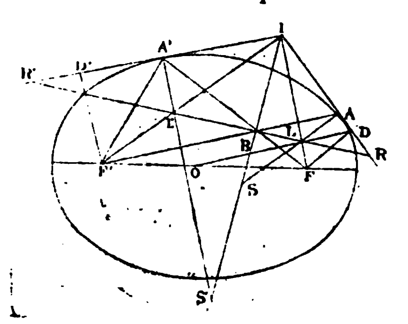
2° De trouver un point C de l'espace situé à égale distance des deux plans MOP', MOQ', à égale distance des deux plans de projection et à 90^{mm} du point O;

3° De construire les projections de la sphère ayant pour centre le point C et tangente aux plans MOP', MOQ'. — On indiquera les points de tangence.

QUESTION 147

Solution par M. Launoy, maître répétiteur au Lycée de Lille.

On considère une ellipse. Soient F *et* F' *les foyers de cette ellipse. Par ces points et dans la même direction, on mène deux rayons vecteurs parallèles rencontrant la courbe, le premier en* A, *le second en* A'. *On mène les tangentes en* A *et* A', *tangentes qui se rencontrent en* I. *La figure ainsi tracée jouit des propriétés suivantes :*



I. *Les triangles* F'IA, FIA' *sont rectangles en* I.

Les deux angles AF'A' et FAF' sont égaux; F'I bissectrice de l'angle AF'A est parallèle à la normale en A et par suite perpendiculaire à IA; de même FI est perpendiculaire à IA'.

II. *L'angle* FIF' *est moyen arithmétique entre les angles* FAF' *et* FA'F'.

Dans le triangle FIA, $F'IF = \frac{\pi}{2} - FIA$, et comme dans le triangle FIA

$$FIA = FAD - IFA = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{FAF'}{2} + \frac{FA'F'}{2}\right].$$

on a
$$F'IF = \frac{FAF' + FA'F'}{2}.$$

III. *Quand on fait varier la direction des parallèles* FA *et* F'A', *le point* I *décrit le cercle dont le diamètre est le grand axe de l'ellipse.*

Je mène la ligne OD; le triangle IOD est isoscèle et $OI = OD = a$

De plus OD est parallèle à F'A; donc l'angle OIA est égal à F'AI ou à FAD et OI est parallèle à AF et à A'F' (X). Alors le point I est à égale distance de AF et A'F'; on sait qu'il est aussi également distant de AF et A'F, de A'F' et de AF'; on en conclut qu'il est à égale distance de AB et A'B ou que IB est bissectrice de l'angle ABA' (VI).

IV. *On a la relation* $\frac{AI \times IF}{IA' \times IF'} = \frac{AF}{A'F'}$.

Les deux triangles FIA et F'IA' de bases AF et A'F' ont même hauteur (III); le rapport de leurs surfaces est $\frac{FA}{F'A'}$. Ils ont aussi un angle égal $FIA = F'IA'$; ce rapport est également $\frac{IA \times IF}{IA' \times IF'}$;

d'où
$$\frac{IA \times IF}{IA' \times IF'} = \frac{AF}{A'F'}.$$

V. *Les droites* FA, F'A' *rencontrent l'ellipse sous deux angles tels que la tangente de leur somme, multipliée par la*

somme de leurs tangentes, donne un produit constant, quand on fait varier la direction des parallèles FA, F'A'.

Je pose FAD $= \alpha$, F'A'D' $= \alpha'$; FD et F'I étant perpendiculaires sur IA, on sait que FD $\times$ F'I $= b^2$. (1)

Or dans le triangle rectangle IFD, on a

$$\text{FD} = \text{IF} \cos \text{IFD} = \text{IF} \cos(\pi - (\alpha + \alpha'))$$
$$= - \text{IF} \cos(\alpha + \alpha') ;$$

d'où $$\text{FI} \times \text{F'I} \cos(\alpha + \alpha') = - b^2, \quad (2)$$

Cela étant, la figure montre que

$$\text{ID} = \text{IA} + \text{AD} = (\text{AF} + \text{AF'}) \cos \alpha = 2a \cos \alpha.$$

On a aussi $$\text{ID} = \text{IF} \sin(\alpha + \alpha') ; \quad (3)$$

d'où $$\text{IF} \sin(\alpha + \alpha') = 2a \cos \alpha$$

et $$\text{IF} = \frac{2a \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \quad (4)$$

de même $$\text{IF'} = \frac{2a \cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}. \quad (5)$$

En substituant ces valeurs dans la relation (2) il vient

$$\frac{4a^2 \cos \alpha \cos \alpha' \cos(\alpha + \alpha')}{\sin^2(\alpha + \alpha')} = - b^2,$$

de laquelle on déduit facilement

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha') (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') = - \frac{4a^2}{b^2}.$$

VI. *Si l'on appelle* B *le point de rencontre des diagonales du trapèze* AFA'F', *le lieu du point* B, *quand on fait varier la direction des parallèles* AF, A'F', *est une ellipse homofocale à la proposée, et normale à la droite* BI.

Dans le triangle IBF on a

$$\frac{\text{FB}}{\sin \text{BIF}} = \frac{\text{IB}}{\sin \text{IFB}} = \frac{\text{IF}}{\sin \text{IBF}},$$

ou, comme il est facile de le voir sur la figure, en tenant compte de ce que IB est la bissectrice de l'angle AB A',

$$\frac{\text{FB}}{\cos \alpha} = \frac{\text{IB}}{\cos \alpha'} = \frac{\text{IF}}{\sin(\alpha + \alpha')};$$

d'où $$\text{FB} = \frac{\text{IF} \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{\overline{\text{IF}}^2}{2a}$$

à cause de (4).

$$IB = \frac{FB \cos \alpha'}{\cos \alpha},$$

$$IB = \frac{IF \cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}. \qquad (6)$$

On aurait de même par la considération du triangle IBF' :

$$F'B = \frac{IF' \cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{\overline{IF'}^2}{2a},$$

$$IB = \frac{F'B \cos \alpha}{\cos \alpha'};$$

d'où l'on tire

$$FB + F'B = \frac{IF^2 + IF'^2}{2a} = \frac{2(\overline{OI}^2 + \overline{OF}^2)}{2a} = \frac{a^2 + c^2}{a}.$$

Le point B décrit une ellipse de foyers F et F' et la normale en B est BI, bissectrice de l'angle FBF' (III).

VII. *La distance du point* B *au point* I *est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point* B *aux deux foyers* F *et* F'.

Des formules précédentes résulte évidemment

$$\overline{IB}^2 = FB \times F'B.$$

VIII. *On a* IF $\times$ I'F' $=$ 2a $\times$ IB.

Si dans la valeur (6) de IB on substitue à $\frac{\cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}$ sa valeur $\frac{IF'}{2a}$ (5), on obtient

$$IB \times 2a = IF.\ IF'.$$

IX. *Si du point* F *on abaisse sur* AI *la perpendiculaire* FD *et du point* F' *la perpendiculaire* F'D' *sur* A'I, *la somme des carrés des inverses de ces perpendiculaires est constante quand on fait varier la direction des parallèles* FA', F'A'.

De la relation (1) on a $\frac{1}{FD} = \frac{F'I}{b^2};$

de même $\frac{1}{F'D'} = \frac{FI}{b^2},$

et $$\frac{1}{FD^2} + \frac{1}{F'D'^2} = \frac{\overline{F'I}^2 + \overline{FI}^2}{b^4} = \frac{2(a^2 + c^2)}{b^4}.$$

X. *La droite* OI *est parallèle aux droites* FA, F'A' *et la somme des inverses des rayons vecteurs* FA, F'A' *est constante.*

Si dans cette même relation (1) on remplace FD par AF $\sin\alpha$, on a $$\frac{1}{AF} = \frac{F'I \sin\alpha}{b^2},$$

également $$\frac{1}{A'F'} = \frac{FI \sin\alpha}{b^2}$$

et

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{A'F'} = \frac{2a}{b^2 \sin(\alpha + \alpha')} (\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha)$$
$$= \frac{2a}{b^2}.$$

A ces propriétés énoncées par M. de Longchamps je joindrai les suivantes :

XI. L *et* L' *sont les points où les normales en* A *et* A' *rencontrent respectivement* IF *et* IF'; *la ligne* LL' *est la tangente en* B *à l'ellipse que décrit ce point.*

En effet L et L' sont les centres des cercles inscrits aux triangles ABF et A'BF'; LB et L'B sont donc bissectrices des angles ABF et A'BF'.

XII. $$\overline{IB}^2 = AB \cdot A'B'.$$

C'est une conséquence de (VII) et de la similitude des triangles ABF, A'BF'.

XIII. *La perpendiculaire à* AF *menée par le point* F *rencontre* IA *en* Q; *soit* Q' *le point analogue : on a* FQ = F'Q'.

Les triangles rectangles IAF' et IA'F donnent :
$$IF' = IA \operatorname{tg}\alpha, \quad IF = IA' \operatorname{tg}\alpha'$$
et à cause de la proportion (V),
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{AF}{A'F'}.$$

Les triangles OFQ et OF'Q' sont évidemment égaux et les points Q et Q' sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse ; ces points sont, du reste, ceux où chaque tangente vient rencontrer la directrice qui correspond à son point de contact.

XIV. *La ligne qui joint le point* B *au milieu de* OI *a une longueur constante.*

On a, d'après la figure

$$2\overline{OB}^2 + 2c^2 = FB^2 + F'B^2 = (FB + F'B)^2 - 2FB \times F'B;$$

$$\text{or } FB.F'B = \overline{IB}^2 \text{ (VII) et } FB + F'B = \frac{a^2 + c^2}{a} \text{ (VI)};$$

$$\text{alors } 2OB^2 + 2c^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)^2 - 2\overline{IB}^2$$

$$\text{ou} \qquad 2(\overline{OB}^2 + \overline{IB}^2) = \frac{a^4 + c^4}{a^2};$$

$$\text{mais} \qquad \overline{OB}^2 + \overline{IB}^2 = 2\overline{BK}^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^4 + c^4}{2a^2};$$

$$\text{donc} \qquad BK = \frac{c^2}{2a}.$$

XV. *Les cercles circonscrits aux triangles* IFA *et* IF'A' *sont tangents en* I.

Soit S le point où la normale en A coupe IB; l'angle RIF, égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, est égal à SAF; les quatre points S, I, A, F sont sur un cercle dont le centre est le milieu de IS; de même les points S', I', A', F' sont sur un cercle dont le centre est le milieu de IS'; ces deux cercles, ayant un point commun I sur la ligne des centres, sont tangents en ce point.

XVI. *Les cercles circonscrits aux triangles* IBF *et* IBF' *se coupent en* I *sous un angle égal à* $FIF' = \frac{FAF' + FA'F'}{2}$.

Soient R et R' les points où L'BL rencontre IA et IA', l'angle RBA étant égal à FIA, il en est de même de l'angle FBR; par suite le quadrilatère FBIR est inscriptible dans un cercle dont le centre est le milieu de IR et dont la tangente en I est évidemment IF'. Pareillement, le quadrilatère F'RIR' est inscriptible dans un cercle dont le centre est au milieu de IR' et dont la tangente en I est IF; d'où la propriété énoncée.

Remarque I. — *La propriété* (I) *résulte de la suivante : FA et F'A' sont deux rayons vecteurs quelconques d'une ellipse:*

IA, IA' *les tangentes en* A *et* A_1 ; *les angles* F'IA *et* FIA' *sont complémentaires de l'angle* FRF' *formé par les rayons vecteurs.*

L'angle A'F'A extérieur au triangle AF'R a pour valeur ARF' + FAF' et

$$IF'A = \frac{AF'A'}{2} = \frac{ARF'}{2} = \frac{FAF'}{2};$$

de plus

$$IAF' = \frac{\pi}{2} - \frac{FAF'}{2}$$

et par suite

$$F'IA = \pi - (IF'A + IAF') = \frac{\pi}{2} - \frac{ARF'}{2}.$$

Et si l'angle FRF' est nul, c'est-à-dire si les deux rayons vecteurs sont parallèles, l'angle F'IA est droit.

Remarque II. — La propriété (II) est générale; elle a lieu quelle que soit la direction des rayons vecteurs.

En effet, d'après la remarque précédente

$$FIF' = \frac{\pi}{2} - \frac{ARF'}{2} - FIA;$$

or $FIA = FAD - IFA = \frac{\pi}{2} - \frac{FAF'}{2} - \frac{FRF'}{2} - \frac{FA'F'}{2}$

et $$FIF' = \frac{FAF' + FA'F'}{2}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Elie, du Collège Stanislas, à Paris, et Lagarde, élève au Collège de Pamiers. Nous leur avons préféré la solution de M. Launoy qui nous donne une série de propriétés nouvelles de la figure, non indiquées dans l'énoncé.

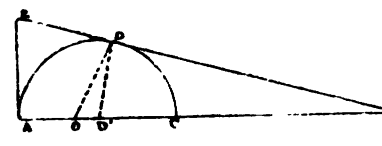
CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

RHETORIQUE

Solution par M. **Andoyer**, du Lycée Saint-Louis.

(*Copie couronnée.*)

Soit AB *une portion de droite de longueur donnée. On prend entre* A *et* B *sur la droite* AB *un point* C, *et sur* AC *comme diamètre on décrit une demi-circonférence. Par le point* B *on mène une tangente à cette demi-circonférence. Soit* D *le point de contact, et soit* E *le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite* AB *par le point* A. *Déterminer le point* C *de telle façon que si l'on fait tourner la figure autour de la droite* AB, *la surface engendrée par l'arc de cercle* AD *et la surface engendrée par la portion de droite* BE *soient dans un rapport égal à un nombre donné* m.



Indiquer la condition de possibilité.

Appliquer dans le cas particulier où $m = \frac{1}{2}$, *et dans ce cas trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions* BD, DE *de la droite* BE.

D'après l'énoncé, on doit avoir, en appelant D′ la projection du point D sur la droite AB :

$$\frac{\pi \times AC \times AD'}{\pi \times AE \times BE} = m,$$

ou, plus simplement :

$$AC \times AD' = m \times AE \times BE.$$

Soit O le milieu de AC, et faisons AB $= a$, AO $= x$.

Dans le triangle rectangle BOD, on a :

$$OD' = \frac{\overline{OD}^2}{OB} = \frac{x^2}{a - x}.$$

Par suite :

$$AD' = AO + OD' = x + \frac{x^2}{a - x} = \frac{ax}{a - x}.$$

Donc enfin, $\quad AC \times AD' = \frac{2ax^2}{a - x}.$

Considérant les triangles rectangles semblables BAE, BOD, ils donnent : $\quad \frac{AE \times BE}{OD \times OB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2}.$

Or :

$$OD \times OB = x (a - x);\ \overline{AB}^2 = a^2;\ \overline{BD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OD}^2$$
$$= (a - x)^2 - x^2 = a (a - 2x).$$

Donc :

$$AE \times BE = \frac{a^2x (a - x)}{a (a - 2x)} = \frac{ax (a - x)}{a - 2x}.$$

L'équation du problème est donc :

$$\frac{2ax^2}{a - x} = \frac{max (a - x)}{a - 2x}.$$

Nous pouvons diviser les deux membres par ax. Il reste

$$\frac{2x}{a - x} = \frac{m (a - x)}{a - 2x}.$$

On supprime ainsi la solution $x = 0$, qui convient, quelle que soit la valeur que l'on attribue à m. Il est facile de s'en rendre compte ; car quand $x = 0$, les points D et E se confondent avec le point A, et les deux surfaces en question deviennent nulles, ce qui rend leur rapport indéterminé.

En chassant les dénominateurs dans l'équation précédente, il vient : $\quad 2ax - 4x^2 = ma^2 - 2max + mx^2,$

et enfin

$$(m + 4)x^2 - 2a (m + 1) x + ma^2 = 0. \qquad (1)$$

On en tire la valeur de l'inconnue :

$$x = a \frac{m + 1 \pm \sqrt{1 - 2m}}{m + 4}.$$

Pour que les racines soient admissibles, il faut qu'elles soient réelles, positives et plus petites que $\frac{a}{2}$, puisque le point C est situé entre A et B.

Elles seront réelles, tant que l'on aura

$$1 \geq 2m, \text{ ou bien } m \leq \frac{1}{2}.$$

Cette condition remplie, elles seront toujours positives, puisque leur somme et leur produit sont positifs. Pour reconnaître si elles sont plus petites que $\frac{a}{2}$, substituons cette quantité dans le premier membre de l'équation (1). On trouve un résultat positif: $\frac{ma^2}{4}$, et comme le coefficient de x^2 est positif, les racines sont toutes les deux ou plus grandes ou plus petites que $\frac{a}{2}$. Elles seront plus petites, si leur demi-somme est plus petite que $\frac{a}{2}$, c'est-à-dire si l'on a:

$$a\frac{m+1}{m+4} < \frac{a}{2},$$

ou bien:

$$m < 2.$$

Cette condition étant contenue dans celle de réalité, la seule condition de possibilité du problème est $m \leq \frac{1}{2}$, et dans ce cas l'on a toujours deux solutions. Dans le cas particulier où $m = \frac{1}{2}$, le problème n'a plus qu'une solution, $x = \frac{a}{3}$.

On peut remarquer que dans ce cas le cône engendré par le triangle rectangle ABE est équilatéral. En effet, OD est la moitié de OB et les triangles ABE, OBD sont semblables; AE est donc la moitié de BE.

Appelons y le rapport des surfaces engendrées par les portions de droite BD, DE. On aura

$$y = \frac{\pi \times BD \times DD'}{\pi \times BE \times AE - \pi \times BD \times DD'}$$
$$= \frac{BD \times DD'}{BE \times AE - BD \times DD'}.$$

Or, dans le cas particulier où $m = \frac{1}{2}$,

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{3}a; \text{ puis } DD' = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a;$$

Il vient donc : $BD \times DD' = \frac{1}{6} a^2$;

d'ailleurs, on obtient en se servant de la formule calculée précédemment : $AE \times BE = \frac{2}{3} a^2$.

Par suite : $AE \times BE - BD \times DD' = \frac{1}{2} a^2$,

et $$y = \frac{1}{3}.$$

On pourrait encore se proposer de calculer y dans le cas général.

Remarquons d'abord que les triangles semblables BAE, BDD' donnent $AE \times BE = BD \times DD' \times \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD'}^2}$;

portant cette valeur dans l'expression de y on obtient :

$$y = \frac{1}{\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD'}^2} - 1}.$$

Or $BD' = AB - AD' = a - \frac{ax}{a-x} = \frac{a(a-2x)}{a-x}$;

donc $\frac{AB}{BD'} = \frac{a-x}{a-2x}$; $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD'}^2} - 1 = \frac{(a-x)^2 - (a-2x)^2}{(a-2x)^2}$

$$= \frac{x(2a-3x)}{(a-2x)^2}$$

et enfin $$y = \frac{(a-2x)^2}{x(2a-3x)}.$$

En faisant $x = \frac{1}{3}a$, on trouverait, comme précédemment, $y = \frac{1}{3}$.

En mettant dans cette formule la valeur de x tirée de l'équation (1), on trouverait, en effectuant les calculs :

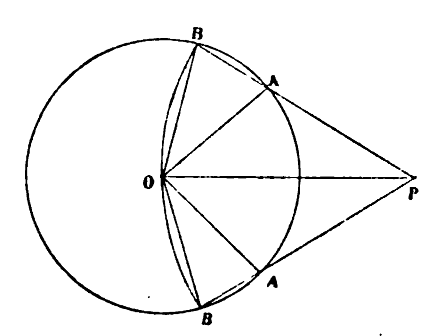
$$y = \frac{8 - 12m + m^2 \pm (4m - 8)\sqrt{1-2m}}{2 + 10m - m^2 \pm (2 - 4m)\sqrt{1-2m}}.$$

QUESTION 153

Solution par M. Duperré de Lisle, élève du Lycée de Versailles.

Étant donné un cercle O, *et un point extérieur* P, *mener par le point* P *une sécante* PAB, *de façon que la partie intérieure* AB *soit vue du centre* O *sous un angle égal à l'angle que fait la sécante* PAB *avec le diamètre* PO.

Supposons le problème résolu et soit PAB la sécante cherchée. Joignons OA, OB. Les triangles OAB et OBP étant semblables et OAB étant isoscèle, il en est de même de OBP, donc PO = PB. De là la construction suivante : Du point P comme centre avec PO pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe la circonférence O en B et B'. Joignant PB, PB'; on obtiendra deux sécantes qui répondront à la question.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Peyrabon, Johannet, de Châteauroux; Ailleret, de Versailles; Bompart, Collège Stanislas; Huet, Gelinet, Manceaux, d'Orléans; Vermond, Corbeau, Schlesser, de Saint-Quentin; Boucheaux, d'Angers; Jacquier, école normale de Charleville; Démaris, de Moulins; Lannes, de Tarbes; Gondy, de Pontarlier; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Combebiac, Chaulet, de Montauban; Barbieux, d'Amiens; Blessel, de Paris; Tupin et Jarron, à Beaume-les-Dames; Longueville, à Charleville; Hoc, à Sainte-Barbe; Deslais, au Mans; Cadot, élève du Lycée Saint-Louis; Dupuy, de Grenoble; Hugot, à Lyon; Martin, à Passy; Gino Loria, à Mantoue; Renaud, à Bordeaux; Vazou, Collège Rollin à Paris.

FORMULES SUR LES BISSECTRICES DES ANGLES

TANT INTÉRIEURS QU'EXTÉRIEURS D'UN TRIANGLE

Énoncées par M. DOSTOR.

1. *Notations.* Soient

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$$

les trois côtés d'un triangle ABC, dans lequel nous supposons l'angle $A > B > C$.

Les bissectrices AA′, BB′, CC′ des angles intérieurs A, B, C rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB respectivement en A′, B′, C′ ; et les bissectrices AA″, BB″, CC″ des angles extérieurs $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ coupent les même côtés en A″, B″, C″. On peut donner à ces points de rencontre le nom de *pieds des bissectrices.*

Posons les bissectrices intérieures,

$$AA' = \alpha',\ BB' = \beta',\ CC' = \gamma';$$

les bissectrices extérieures,

$$AA'' = \alpha'',\ BB'' = \beta'',\ CC'' = \gamma'';$$

et les distances entre les pieds des bissectrices issues d'un même sommet, $A'A'' = \alpha,\ B'B'' = \beta, C'C'' = \gamma$.

Représentons d'ailleurs par S la surface du triangle donné.

On pourra établir sans difficulté les relations et propositions suivantes.

2. *Distances entre les pieds des bissectrices issues d'un même sommet.* On a $\alpha = \dfrac{2\,abc}{b^2 - c^2}$, $\beta = \dfrac{2abc}{a^2 - c^2}$, $\gamma = \dfrac{2abc}{a^2 - b^2}$.

d'où on tire $$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

3. *Longueur des bissectrices intérieures.* Elles sont

$$\alpha' = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c},\ \beta' = \frac{2ca \cos \frac{B}{2}}{c + a},\ \gamma' = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a + b}$$

4. *Longueur des bissectrices extérieures.* On trouve que

$$\alpha'' = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b - c},\ \beta'' = \frac{2ca \sin \frac{B}{2}}{a - c},\ \gamma'' = \frac{2ab \sin \frac{C}{2}}{a - b}$$

5. *Produit des bissectrices issues d'un même sommet.* Ces produits sont

$$\alpha'\alpha'' = \frac{4bcS}{b^2 - c^2}, \quad \beta'\beta'' = \frac{4caS}{a^2 - c^2}, \quad \gamma'\gamma'' = \frac{4abS}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{1}{a\alpha'\alpha''} - \frac{1}{b\beta'\beta''} + \frac{1}{c\gamma'\gamma''} = 0.$$

6. *Produit des trois bissectrices intérieures.*

$$\alpha'\beta'\gamma' = \frac{8abcpS}{(b + c)(c + a)(a + b)},$$

où p est le demi-périmètre du triangle donné ABC.

7. *Produit des trois bissectrices extérieures.*

$$\alpha''\beta''\gamma'' = \frac{8abcS^2}{p(b - c)(a - c)(a - b)}.$$

8. *Surface du triangle A'B'C', ayant pour sommets les pieds des trois bissectrices intérieures :*

$$A'B'C' = \frac{2abcS}{(b + c)(c + a)(a + b)},$$

$$A'B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{a + b + c}.$$

9. *Surface des triangles A'B''C'', B'C''A'', C'A''B'', ayant pour sommets le pied d'une bissectrice intérieure et les pieds des bissectrices extérieures issues des deux autres sommets :*

$$A'B''C'' = \frac{2abcS}{(b + c)(a - c)(a - b)},$$

$$B'C''A'' = \frac{2abcS}{(c + a)(a - b)(b - c)},$$

$$C'A''B'' = \frac{2abcS}{(a + b)(b - c)(a - c)};$$

ou encore

$$A'B''C'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha'\beta''\gamma''}{b + c - a},$$

$$B'C''A'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta'\gamma''\alpha''}{c + a - b},$$

$$C'A''B'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma'\alpha''\beta''}{a + b - c}.$$

10. *Surface des six triangles, ayant pour sommets les pieds de deux bissectrices rectangulaires et le pied de l'une des deux autres bissectrices extérieures :*

$$B'B''C'' = \frac{2abcS}{(a - b)(a^2 - c^2)},$$

$$C'C''B' = \frac{2abcS}{(a-c)(a^2-b^2)},$$

$$C'C'A'' = \frac{2abcS}{(b-c)(a^2-b^2)},$$

$$A'A''C' = \frac{2abcS}{(a-b)(b^2-c^2)},$$

$$A'A''B' = \frac{2abcS}{(a-c)(b^2-c^2)},$$

$$B'B''A' = \frac{2abcS}{(b-c)(a^2-c^2)},$$

11. ***Surface des six triangles, ayant pour sommets les pieds de deux bissectrices rectangulaires et le pied de l'une des deux autres bissectrices.***

$$B'C'C'' = \frac{2abcS}{(c+a)(a^2-b^2)},$$

$$C'B'B'' = \frac{2abcS}{(a+b)(a^2-c^2)},$$

$$C'A'A' = \frac{2abcS}{(a+b)(b^2-c^2)},$$

$$A'C'C'' = \frac{2abcS}{(b+c)(a^2-b^2)},$$

$$A'B'B' = \frac{2abcS}{(b+c)(a^2-c^2)},$$

$$B'A'A' = \frac{2abcS}{(c+a)(b^2-c^2)}.$$

12. ***Surface des triangles, ayant pour sommets le centre du cercle inscrit et les centres de deux cercles ex-inscrits.*** Soient O le centre du cercle inscrit; O', O'', O''' les centres des cercles ex-inscrits compris respectivement dans les angles A, B, C. On a

$$OO''O''' = \frac{1}{2}\,bc\,.\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = R(b+c-a),$$

$$OO'''O' = \frac{1}{2}\,ca\,.\,\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = R(c+a-b),$$

$$OO'O' = \frac{1}{2}\, ab \,.\, \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = R(a+b-c),$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

13. *Surface du triangle, ayant pour sommets les centres* O′, O″, O‴ *des cercles ex-inscrits :*

$$O'O''O''' = \frac{1}{2}\, bc\, \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{1}{2}\, ca\, \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\, ab\, \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}},$$

ou

$$O'O''O''' = R(a+b+c).$$

14. *Rapport des triangles* A′B′C′ *et* O′O″O‴ :

$$\frac{A'B'C'}{O'O''O'''} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

15. *Rapport des triangles* A′B″C″ *et* OO″O‴, *etc. :*

$$\frac{A'B''C''}{OO''O'''} = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)}{2(b+c)(a-b)(a-c)},$$

$$\frac{B'C''A''}{OO'''O'} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{2(c+a)(b-c)(a-b)},$$

$$\frac{C'A''B''}{OO'O''} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)}{2(a+b)(a-c)(b-c)}.$$

16. *Surface des quadrilatères* OO′BC, OO″CA, OO‴AB. On a

$$OBO'C = \frac{2a(b+c)S}{(b+c+a)(b+c-a)},$$

$$OCO''A = \frac{2b(c+a)S}{(c+a+b)(c+a-b)},$$

$$OAO'''B = \frac{2c(a+b)S}{(a+b+c)(a+b-c)};$$

d'où on tire

$$OBO'C \,.\, OCO''A \,.\, OAO'''B = \frac{abc(b+c)(c+a)(a+b)\,S}{2(a+b+c)^2}.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

POITIERS

La surface d'un secteur circulaire est $3^{m},18$. Son angle au centre est $54° 18'$. On demande quel est, à $0^{m},001$ près, le rayon de ce secteur.

— Le volume d'un parallélépipède droit est égal à $4762^{m},7$; ses arêtes sont entre elles comme les nombres 3, 5, 7. Quelle est, en mètres, la grandeur de ces arêtes?

— La surface d'un cylindre droit est a, son volume est b. Calculer le rayon de base et la hauteur.

— Calculer par logarithmes le côté du carré équivalent à la couronne comprise entre deux cercles concentriques donnés par leurs rayons:

$$R = 1^{m},3456; \quad r = 0,3458.$$

— Trouver quatre nombres en proportion géométrique, connaissant la somme des extrêmes 21, la somme des moyens 19, et la somme des carrés des quatre termes 442.

— Résoudre les équations

$$x^2 + y^2 = a; \quad \log x + \log y = b.$$

— Deux points situés sur un même méridien sont distants de 57025 toises. Quel est l'angle des deux verticales en ces deux points? La toise vaut $1^{m},949$; le rayon du méridien est 6366200 mètres. (*Calcul à faire par logarithmes.*)

— On donne une droite AB $= a$. Trouver sur cette droite un point K tel que le produit des deux segments AK et BK soit égal à la moitié du carré de a.

— Un observateur est placé sur une tour à 50 mètres au-dessus du niveau de la mer. Calculer la distance à laquelle sa vue peut s'étendre. Le rayon terrestre est de 6366198 mètres.

— Inscrire dans une sphère de rayon donné un cône droit dont la surface latérale soit maxima.

— Résoudre les deux équations

$$x + y = 63; \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,05.$$

— On donne un cercle et un point sur ce cercle. Par ce point, mener une tangente telle que sa longueur soit double de la partie extérieure d'une sécante passant par le centre et par l'extrémité de la tangente demandée.

— Quel est le rayon de base d'un cylindre équivalent à un tronc de cône de même hauteur dont les rayons de base sont 4 mètres et 22 mètres.

— On fait 371 pas en traversant diagonalement une place carrée. Le pas est de $0^{m},78$. Quelle est la longueur du côté de cette place?

— Résoudre les équations

$$x^2 + y^2 = 132,65; \quad xy = 17.$$

— On a peint le dôme sphérique d'un édifice à raison de 25 fr. 50 c. le mètre carré. Quel est le prix de cette peinture, sachant que le dôme a 18 mètres de rayon.

— Un terrain est compris entre deux routes parallèles distantes de

$319^m,5$. Il a, sur l'une d'elles, un développement de $598^m,7$, et sur l'autre un développement de $623^m,4$. L'hectare de ce terrain vaut 61500 francs. On demande le prix du terrain (*par logarithmes*).

— On donne la hauteur $2^m,4$ et la différence 1 mètre des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. On demande la longueur des trois côtés.

— De 6 ans à 64 ans, la vie probable est donnée approximativement par la formule $y = 59 - \frac{3}{4} x$, x représentant l'âge actuel, et y la vie probable. A quel âge est-on arrivé à la moitié de la vie probable?

— Des sommets d'un triangle comme centres, décrire trois cercles tangents deux à deux, et exprimer les rayons de ces cercles en fonction des trois côtés.

— Quelqu'un donne à trois personnes $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ et $\frac{2}{11}$ de sa fortune, et il lui reste 26200 francs. Quelle était sa fortune totale?

— La France compte 36 millions d'habitants. Quelle est la fraction du nombre de garçons de 20 à 21 ans appelés sous les drapeaux dans une conscription de 80000 hommes, sachant qu'il y a 1045 personnes de 20 à 21 ans sur 65162, et 17 garçons sur 33 personnes?

— Il faut 12 ans pour éteindre une dette par annuités de 1000 francs à 4,75 pour cent par an; on propose au créancier de payer par somme de 500 francs chaque semestre, avec un intérêt de 2 1/3 par semestre. Doit-il accepter?

— On détache d'une pyramide triangulaire, par un plan parallèle à la base mené à 2 mètres du sommet, un tronc dont on demande le volume. Les côtés de la base de la pyramide sont 13, 14 et 15 mètres, et la hauteur de cette pyramide est 16 mètres (*par logarithmes*).

— En supposant que le volume total d'un alliage est la somme des volumes des métaux composants, on demande: 1° le poids de cuivre et d'argent contenu dans une pièce de 5 francs; 2° le volume de chacun de ces métaux; 3° l'épaisseur du cylindre qui devient la pièce de 5 francs, le diamètre de ce cylindre étant $0^m,037$. Densité de l'argent, 10,47; densité du cuivre, 8,85.

— Partager 88° 21′ 13″ en parties proportionnelles à 3,2; 5,3; et 85.

— Un triangle équilatéral a 500 mètres de côté. D'un point pris dans un plan, on voit deux côtés sous le même angle de 120°. Quelle est, en mètres, la distance de ce point à l'un des sommets (*par logarithmes*).

— Evaluer en ares un terrain qui a la forme d'un trapèze isoscèle, dont les côtés non parallèles sont égaux chacun à 50 mètres, les bases étant de 100 mètres et de 40 mètres. — Quelle est, en ares et centiares, la surface du triangle formé par les prolongements des côtés non parallèles?

— Des obligations au porteur, de 1000 francs chacune, rapportent 50 francs par an. On prend ces obligations à 1045 francs. Quel est le taux réel du placement?

— Résoudre les équations

$$5(x + y) = xy; \quad 2x + 3y = 40.$$

— Un vase sphérique de 60 millimètres de diamètre intérieur est plein de mercure jusqu'à la hauteur de 45 millimètres. On demande le poids de mercure qu'il contient, la densité du mercure étant 13,6.

— Etant donné un trapèze quelconque, et un point O sur l'une de ses

bases, indiquer la construction géométrique qu'il faudrait faire pour diviser le trapèze en deux parties équivalentes par une droite partant du point O.

— F et F′ sont les foyers d'une ellipse; deux droites FO et F′I respectivement égales au grand axe et partant des foyers se coupent en M. On suppose que OI = FF′. Prouver que le point M est un point de la courbe.

— Quelle est l'aire d'un trapèze dont la hauteur est égale à la demi-somme des bases? la différence des bases est 1 mètre, et la plus grande base est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont la petite base et la hauteur.

— On retranche 3 des deux termes d'une fraction et elle devient égale à $\frac{1}{4}$; on ajoute 5 à chacun des deux termes de la fraction primitive, et elle devient égale à $\frac{1}{2}$. Quelle est cette fraction?

— Calculer l'angle sous lequel on voit du soleil la ligne qui joint les centres de la terre et de la lune lors de la quadrature.

— Quelle relation doit avoir lieu entre les coefficients des équations générales du 1er degré, à deux inconnues, pour que les deux inconnues soient dans un rapport donné?

— Le côté d'un tronc de cône est égal à la somme des rayons R et r des bases. Démontrer : 1° que $4\,Rr = h^2$, en appelant h la hauteur du cône; 2° que le volume du tronc de cône est égal à la surface totale multipliée par le sixième de la hauteur.

— On donne les trois côtés d'un triangle a, b, c exprimer au moyen des données et de la surface le volume engendré par la rotation de ce triangle autour du côté a.

— Quel serait le maximum du produit $(5 - \sin x)(2 + \sin x)$? — L'équation $5 - \sin x = 2 + \sin x$ a-t-elle une solution?

— Maximum de $\sin x \cos^3 x$.

— Construire un triangle équilatéral équivalent à un hexagone régulier donné.

— Partager géométriquement un quadrilatère quelconque en deux parties équivalentes par une droite partant d'un point pris sur un des côtés.

— Par un point pris dans un angle donné, mener une droite telle que le triangle formé par cette droite et les deux segments des côtés du triangle soit minimum.

— Sur la ligne des centres de deux planètes, déterminer la position d'un point matériel également attiré par chacune d'elles; appliquer au cas de la terre et de la lune où l'on a $d = 60r$; $M = 88$ m.

— Indiquer la hauteur minimum que puisse avoir un miroir plan vertical pour qu'une personne, se tenant debout en face, s'y voie par réflexion de la tête aux pieds.

— Partager $2a$ en deux parties x^2 et $2a - x^2$ telles que la somme de leurs racines carrées soit minima.

— Partager 552 en 3 parties telles que leurs racines carrées soient proportionnelles à 7, 5, et 8.

— Calculer le volume de la sphère circonscrite au cube dont l'arête est $0^m,36$.

— Partager 195 en trois parties en progression géométrique telles que la plus grande surpasse la plus petite de 120.

— On donne un cercle de rayon égal à 2 mètres, et un point extérieur distant de 3 mètres du centre. Quelle est la longueur de la partie extérieure

d'une sécante menée par ce point et telle que la partie intérieure soit de 1 mètre?

— Dans un triangle on connaît deux côtés et l'angle compris. Trouver l'expression du volume engendré par le triangle tournant autour d'un des côtés donnés.

— Sur une sphère de 13 mètres de rayon, on prend une zone à deux bases dont l'une est à 1 mètre du centre. La surface de cette zone vaut 100 mq. Quelle est la surface du cercle formant la seconde base?

— Résoudre $x + y = 5$

$$7x^2 - 3y^2 + 5xy - 2x - 27 = 0.$$

— Le produit de trois nombres formant une proportion continue est 13824; leur somme est 126. Quels sont ces nombres?

— Dans un cercle de 10 mètres de rayon, on donne un arc de 83° 20'. Calculer la surface du triangle formé par la corde de cet arc et les cordes AC et BC qui joignent les extrémités A et B au milieu C de l'arc.

— Résoudre $3 \sin x = 4 \sin y$

$$x + y = 72.$$

— Trouver deux nombres sachant que leur produit plus leur somme donne 31, et la somme de leurs carrés moins leur somme donne 48.

— Volume engendré par un trapèze isoscèle tournant autour d'un axe situé dans son plan et perpendiculaire à ses bases.

— Résoudre

$$\begin{aligned} x + y - z &= a - 1 \\ y + z - u &= 2a - 8 \\ z + u - v &= a + 4 \\ u + v - x &= 6a + 2 \\ v + x - y &= 5a + 3. \end{aligned}$$

— 190 est un nombre écrit dans le système décimal. Il est représenté par 276 dans un système dont la base est inconnue. Quelle est cette base?

TOULOUSE

Dans un cercle dont le rayon OA = 1, on prend le milieu B d'un quadrant AH. On mène par le point B, BC parallèle à OA. On joint BA et CA. On demande d'évaluer à 0,01 près le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de l'axe OA.

— Un vase cylindrique vertical, dont le fond est un cercle horizontal de 5 centimètres de rayon intérieur, est en partie rempli par de l'eau pesant 4 kilogrammes. On y plonge une boule sphérique de 3 centimètres de rayon, et l'eau monte exactement jusqu'au bord du vase. On demande la hauteur du vase.

— Le premier terme d'une progression arithmétique est 1/2 ; la raison est 1/3. Combien faut-il prendre de termes pour que leur somme soit égale à 48?

— Dans une sphère dont le rayon OA = 1 mètre, la zone engendrée par l'arc de grand cercle AB tournant autour de AO a pour base un cercle dont la surface est les 3/4 de celle de la zone. Déterminer à un centimètre près la hauteur de la zone.

— Dans un triangle ABC, rectangle en A, l'angle aigu B est égal à 60° et le côté b, opposé à cet angle, vaut 1 mètre. Calculer l'hypoténuse a et le côté c à un centimètre près, sans faire usage des logarithmes.

— Partager 85 en parties formant une progression arithmétique dont le premier terme soit 7 et la raison $\frac{4}{3}$. On déterminera le nombre des termes et le dernier.

— Dans une progression arithmétique, on connaît la raison r, le dernier terme l et la somme des termes S. On demande le premier terme et le nombre des termes. On appliquera la formule en faisant $r = \frac{1}{3}$, $l = 2 + \frac{5}{6}$, $S = 13 + \frac{1}{3}$.

— Dans un trapèze ABCD, la grande base AB a 18 mètres, les angles A et B sont égaux chacun à 45°, et chacun des côtés non parallèles est égal à 7 mètres. Evaluer : 1° l'aire du trapèze; 2° celle du triangle que l'on forme en prolongeant les côtés non parallèles.

— Dans un triangle ABC, les côtés AB, AC sont égaux chacun à 1 mètre; l'angle A est de 30°. On demande la valeur de la surface qu'engendrerait BC, si le triangle tournait autour d'une droite AK menée dans son plan perpendiculaire à AC.

— En un point A d'une circonférence de 3 mètres de rayon, on mène une tangente sur laquelle on prend une longueur AB = 4 mètres. On joint le centre O à l'extrémité B, et on abaisse du point A sur OB la perpendiculaire AC. On demande : 1° la valeur de la projection BC de la tangente AB sur la droite OB, ainsi que celle de la perpendiculaire AC; 2° la valeur de la surface engendrée par la révolution de AB, en tournant autour de OB.

QUESTIONS PROPOSEES

Mathématiques élémentaires.

206. — Deux mobiles partent d'un point O sans vitesse initiale ; l'un A parcourt la droite Ox d'un mouvement uniforme ; l'autre B parcourt la droite Oy, perpendiculaire à Ox, d'un mouvement uniformément accéléré; démontrer que la droite qui les joint à chaque instant est constamment tangente à une parabole. *(Launoy.)*

207. — Sur une demi-circonférence de diamètre AB, on prend deux points P et Q tels que, les droites AQ et BP se coupant en M, on ait

$$AM \times BM = 2AP \times BQ.$$

Trouver le lieu géométrique du point M. *(Launoy.)*

208. — Soit ABC un triangle ; de part et d'autre de BC on construit les triangles équilatéraux A'BC, A"BC ; soit X

l'angle A'AA'. Soient de même Y et Z les angles obtenus de la même manière en prenant les autres côtés. On a la relation.

$$\cos X + \cos Y + \cos Z = 0.$$ *(E. Lemoine.)*

THÉORIE DES CENTRES DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. **Kœhler**

(*Suite et fin*; voir t. III, p. 354).

Pôles et polaires dans les courbes du troisième ordre.

D'après la remarque de la page 356, les théorèmes VI, VII, VIII, IX et X sont applicables à un lieu quelconque du troisième ordre. Pour compléter l'étude qui précède, nous allons donner les démonstrations de quelques autres théorèmes sur les pôles et polaires dans les cubiques.

Théorème XVII. — *Lorsqu'un lieu du troisième ordre se compose d'une courbe du second degré et d'une droite, la polaire conique d'un point de la droite se compose de cette droite elle-même et de la polaire rectiligne du point par rapport à la conique.*

La démonstration est analogue à celle du théorème XII.

Théorème XVIII. — *Les polaires coniques d'un point par rapport aux courbes d'un faisceau de cubiques forment un faisceau, et il en est de même des polaires rectilignes de ce point.*

Ce qui caractérise un faisceau de courbes, c'est que par un point quelconque du plan on peut faire passer une courbe du faisceau et une seule. Or, si l'on considère le pôle, une seule polaire conique passera par ce point, ce sera la polaire conique de la cubique qui passe au pôle. Cela résulte de ce que, si l'on prend les centres harmoniques q_1, q_2 d'un point p par rapport à trois points a, b, c, l'un de ces centres ne peut se confondre avec p que si l'un des points a, b ou c est le

pôle p lui-même. Le système des polaires coniques jouit donc de la propriété caractéristique de tout faisceau de courbes. Il en est de même des polaires rectilignes; elles passent par un point fixe.

La démonstration s'applique aux polaires successives d'un point par rapport aux courbes d'un faisceau, quel que soit leur degré.

Théorème XIX. — *Étant donnés une cubique* K *et deux points* p, p′ (fig. 13), *si l'on prend les polaires coniques* C *et* C′ *de ces points par rapport à* K, *la polaire rectiligne de* p *par rapport à* C′ *coïncide avec celle de* p′ *par rapport à* C.

La cubique représentée en points ronds (*fig. 13*) se compose d'un ovale et d'une branche infinie. Menons par le point p' une transversale quelconque R qui coupe la courbe en a_1, a_2, a_3 et considérons le faisceau (P) des rayons pa_1, pa_2, pa_3. On démontre dans tous les cours de mathématiques spéciales que, si deux lieux du troisième ordre ont trois points communs en ligne droite, leurs six autres points d'intersection appartiennent à une même conique. Le faisceau (P) et la courbe K ont donc six points communs sur une certaine conique C″; c'est l'hyperbole représentée en traits interrompus (cinq des six points sont visibles sur la figure; le sixième est hors des limites du dessin sur le rayon $a_1 p$ prolongé). Comme la courbe K fait partie du faisceau déterminé par les deux lieux du troisième ordre (P) et (R, C″), la polaire conique de p' par rapport à K appartient au faisceau déterminé par les polaires de p' relativement à (P) et à (R, C″) (théorème XVIII).

La première de ces polaires est le couple de droites pq_1, pq_2, q_1, q_2 étant les centres harmoniques du système a_1, a_2, a_3, par rapport à p'. La deuxième se compose, d'après le théorème XVII, de la droite R elle-même et de la polaire de p' par rapport à C″, qui est la droite $\alpha\beta\gamma$.

On voit ensuite que la polaire de p par rapport à C′ n'est autre chose que celle de p par rapport au couple de droites R et $\alpha\beta\gamma$. C'est une droite $\alpha\pi$ passant en α.

La polaire conique C de p par rapport à K se confond né-

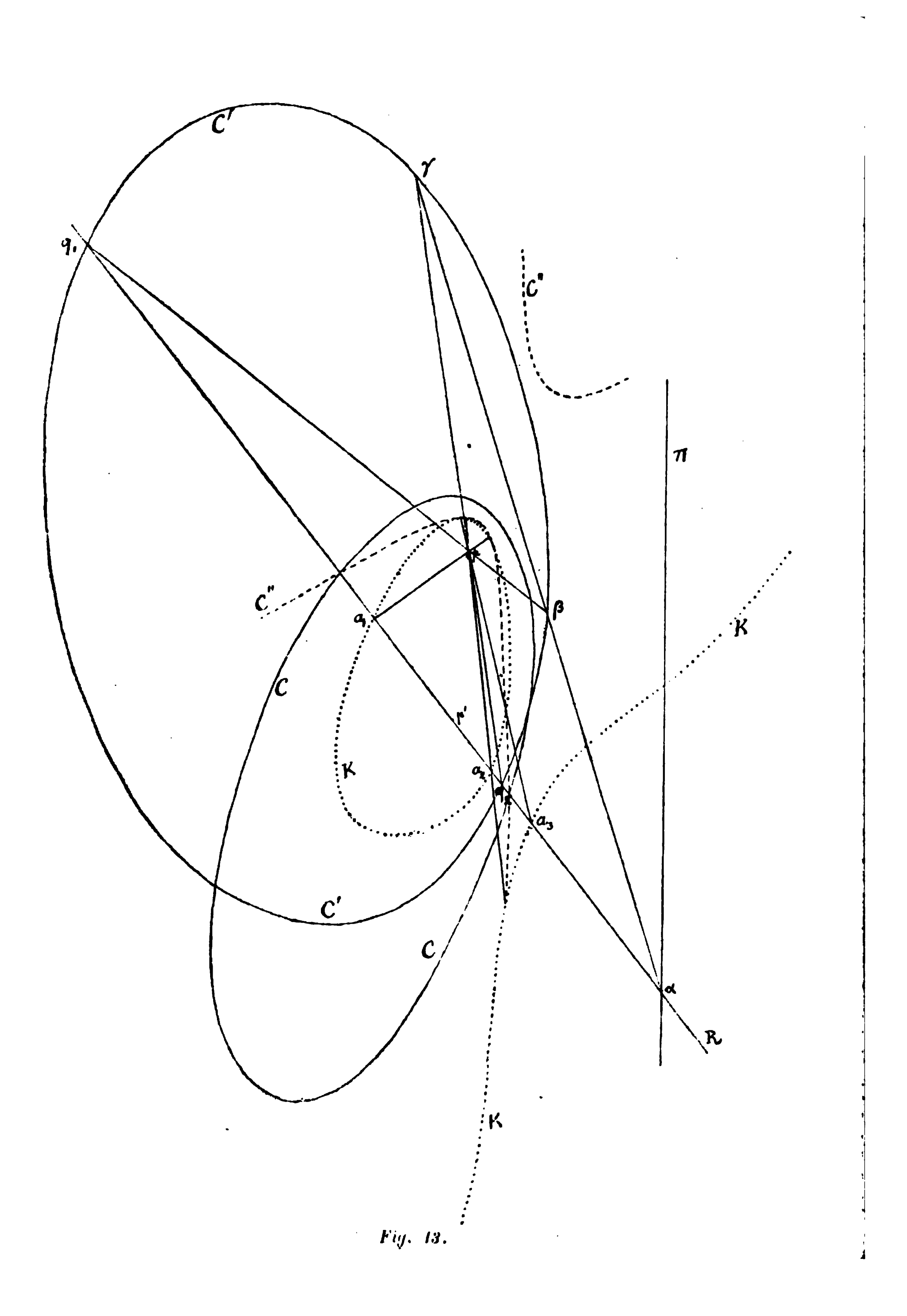


Fig. 13.

cessairement avec celle de p par rapport au lieu (R, C″), car ces deux polaires ont six points communs, deux sur chacune des droites du faisceau (P). Cette conique C passe donc par les points d'intersection de C″ et de R, points doubles du lieu (R, C″), comme la figure l'indique. Il en résulte que la polaire rectiligne de p' par rapport à C passe par le conjugué harmonique de p' relatif aux intersections de C″ et de R, c'est-à-dire par le point α.

Les deux polaires de p' par rapport à C et de p par rapport à C′ ayant un point commun α sur une transversale R *quelconque* issue de p', elles se confondent en une seule et même droite $\alpha\pi$. Cette droite $\alpha\pi$ a été appelée par M. Cremona *seconde polaire mixte* des points p et p'.

Le théorème qui précède donne lieu à de nombreuses conséquences; nous engageons le lecteur à en chercher la démonstration analytique qui est très facile.

Théorème XX. — *Si une courbe du troisième ordre a un point double* δ, *la polaire conique d'un point quelconque* p *a pour tangente en* δ *le rayon conjugué harmonique de* $p\delta$ *par rapport aux tangentes de la cubique.*

Remarquons d'abord que la polaire conique du point double n'est autre chose que le couple des tangentes en ce point; la polaire de p par rapport à cette conique n'est autre que le rayon conjugué harmonique de $p\delta$ par rapport aux deux tangentes. C'est d'ailleurs, d'après le théorème XIX, la polaire δ par rapport à la polaire conique de p, c'est-à-dire la tangente à cette conique.

Corollaire. — Si la conique a un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est tangente aux polaires coniques de tous les points du plan.

Remarque. — Les théorèmes XIX et XX s'étendent aux courbes d'ordre quelconque.

Théorème XXI. — *Si la polaire d'un point* p *est un couple de droites qui se coupent en* p′, *la polaire de* p′ *est aussi un couple de droites qui se coupent en* p.

Désignons par P le couple de droites qui se coupent en p'

et constituent la polaire de p, par P′ la polaire de p'; soit m un point quelconque. La seconde polaire mixte de p et de m passe nécessairement en p'; celle de p' et de m passera donc en p. Car ces deux droites sont les polaires de p et de p' par rapport à une même conique, savoir la polaire de m. Puisque la polaire de m par rapport à P′ passe en p, quel que soit le point m, P′ est un couple de droites qui se coupent en p.

Théorème XXII. — *Le lieu des points dont les polaires coniques par rapport à une courbe du troisième ordre se décomposent en deux droites est une autre courbe du troisième ordre.*

Considérons une droite quelconque; les polaires de tous les points de cette droite forment un faisceau de coniques, d'après le théorème IX étendu aux cubiques ; à chaque point de la droite correspond une conique du faisceau et réciproquement. Comme il y a dans le faisceau trois couples de droites, les trois couples de cordes communes, il y a sur la droite trois points dont les polaires sont décomposables. Le lieu cherché, étant coupé en trois points par une droite arbitraire, est du troisième ordre. Il est évident, d'après le théorème XXI, que si l'on considère un point quelconque de cette courbe, le point de concours des droites qui forment sa polaire appartient aussi à la courbe. Ce lieu remarquable est la *hessienne* de la cubique donnée.

Remarque. — Quand on applique le même procédé de recherche à une courbe d'ordre n, c'est-à-dire quand on cherche le lieu des points dont les premières polaires (d'ordre $m - 1$) ont un point double, on trouve un lieu d'ordre $3(m-2)^2$, appelé courbe de Steiner. La hessienne ne coïncide pas avec cette courbe; c'est le lieu des points doubles des premières polaires ou encore le lieu des points dont les polaires coniques (n — 2mes polaires) sont décomposables; elle est, comme on sait, d'ordre $3(m-2)$. La coïncidence des courbes de Steiner et de Hesse a lieu seulement quand $m = 3$. Nous nous bornons à cette simple indication.

Théorème XXIII. — *La polaire conique d'un point d'inflexion est un couple de droites, et l'une d'elles est la tangente d'inflexion.*

En effet, si par le point d'inflexion i on mène une transversale qui soit la tangente elle-même, elle coupe la courbe en trois points confondus avec le pôle i lui-même; tout point de la tangente peut être considéré comme un centre harmonique, puisque les trois coefficients de l'équation du second degré

$$x^2 (a + b + c) - 2x (ab + bc + ca) + 3abc = 0$$

sont identiquement nuls.

Corollaire I. — Tout point d'inflexion appartient à la hessienne, d'après le théorème XXII, et par suite toute cubique a neuf points d'inflexion (réels ou imaginaires).

Corollaire II. — La droite J qui, avec la tangente d'inflexion, complète la polaire conique du point d'inflexion i, est évidemment le lieu du conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux points où une transversale issue de i coupe la courbe. On reconnaît aisément que le point i possède, par rapport à la courbe et à la droite J, toutes les propriétés qui dans les coniques appartiennent à un point extérieur et à sa polaire rectiligne. Ainsi les tangentes menées du point d'inflexion passent par les trois points où J coupe la courbe.

Corollaire III. — Si trois droites coupent la cubique respectivement en $(a\ a'\ a'')$ $(b\ b'\ b'')$ $(c\ c'\ c'')$ et si $(a\ b\ c)$, $(a'\ b'\ c')$ sont en ligne droite, $(a''\ b''\ c'')$ sont aussi en ligne droite. Si les points $(a\ b\ c)$ coïncident avec un point d'inflexion i, les deux droites $(a'\ b'\ c')$, $(a''\ b''\ c'')$ se couperont sur la droite J; si de plus $(a'\ b'\ c')$ coïncident, il en sera de même de $(a''\ b''\ c'')$, et nous en concluons que la droite qui joint deux points d'inflexion passe par un troisième point d'inflexion.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. E.-J. Boquel.

Définition des formes quadratiques.—Une fonction homogène du second degré de n variables, x_1, x_2, . . . x_n, est nécessairement de la forme $f = \Sigma a_{i,k} x_i x_k$, où la somme Σ porte sur toutes les valeurs de i et de k depuis 1 jusqu'à n, $a_{i,k}$ désignant le coefficient du terme formé par le produit de deux variables x_i et x_k.

Si le coefficient $a_{i,k}$ est égal au coefficient $a_{k,i}$, les deux termes $a_{i,k} x_i x_k$ et $a_{k,i} x_k x_i$ se réunissent en un seul $2a_{ik} x_i x_k$, et la fonction f prend la forme suivante : $f = a_{1,1} x_1^2 + a_{2,2} x_2^2 + \ldots + a_{n,n} x_n^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + \ldots$

Cette dernière fonction porte le nom de *forme quadratique.*

Décomposition des formes quadratiques en somme de carrés. — Une forme quadratique se décompose toujours en somme de carrés. Il peut se présenter deux cas : 1° l'un au moins des carrés des variables existe; 2° tous les carrés manquent.

1° Supposons que l'un au moins des coefficients des carrés ne soit pas nul, par exemple, $a_{11} \gtrless 0$.

La forme considérée peut s'écrire $f = a_{1,1} x_1^2 + 2 P x_1 + Q$, P et Q étant des fonctions des variables x_2, . . . x_n, autres que x_1, telles que $P = a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 + \ldots + a_{1,n} x_n$ et $Q = a_{2,2} x_2^2 + \ldots + a_{n,n} x^2 + 2a_{2,3} x_2 x_3 + \ldots$

On aura alors :

$$a_{1,1} f = a^2_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,1} P x_1 + a_{1,1} Q$$
$$= (a_{1,1} x_1 + P)^2 + a_{1,1} Q - P^2.$$

Il est clair que $a_{1,1} Q - P^2$ est une fonction homogène, et du second degré des variables x_2, x_3, . . . x_n, autres que x_1. En opérant sur cette fonction comme sur la proposée, on la ramènera à un carré renfermant les variables x_2, x_3, . . . x_n, augmenté d'une fonction homogène et du second degré des variables x_3, x_4, . . . x_n, autres que

x_1 et x_2, et en continuant ainsi l'application du même calcul, on ramènera la forme proposée à être la somme de n carrés de fonctions linéaires et homogènes des variables $x_1, x_2 \ldots x_n$, le premier carré renfermant toutes les variables, le second n'en renfermant plus que $n - 1$, le troisième $n - 2$, et ainsi de suite jusqu'au n^{me}, qui n'en renfermera plus qu'une.

2° Si tous les carrés manquent dans la forme proposée, on peut écrire : $f = 2a_{1,2}x_1x_2 + 2Px_1 + 2Qx_2 + R$,
P, Q étant des fonctions du premier degré et R une fonction du second degré ne contenant ni x_1, ni x_2.

Or on a :

$$2a_{1,2}f = 4a_{1,2}^2\, x_1\, x_2 + 4a_{1,2}\,Px_1 + 4a_{1,2}Qx_2 + 2a_{1,2}R,$$

c.-à-d. $2a_{1,2}f = 4(a_{1,2}x_1 + Q)\,(a_{1,2}x_2 + P) + 2a_{1,2}R - 4PQ$

Or on a identiquement :

$$4(a_{1,2}x_1 + Q)\,(a_{1,3}x_2 + P) = (a_{1,2}x_1 + Q + a_{1,2}x_2 + P)^2 - (a_{1,2}x_1 + Q - a_{1,2}x_2 - P)^2$$

et comme la fonction $2a_{1,2}R - 4PQ$ ne contient plus les variables x_1 et x_2, on aura ramené la forme f à être une somme algébrique de 2 carrés, suivie d'une fonction homogène du second degré des $n - 2$ variables $x_3, x_4 \ldots x_n$, autres que x_1 et x_2.

En continuant de proche en proche l'application du même calcul, on voit qu'on aura finalement une somme algébrique de n carrés, dont les deux premiers contiendront les n variables, les deux suivants $n - 2$ variables seulement, les deux suivants $n - 4$ des variables, et ainsi de suite jusqu'au groupe des deux derniers qui contiendront les deux dernières variables.

On peut donc énoncer dans tous les cas la proposition suivante : *Étant donnée une forme quadratique dépendant de* n *variables, on peut toujours la décomposer en une somme algébrique de carrés, dont le nombre est* AU PLUS *égal au nombre des variables.*

Nous disons *au plus :* car il pourra se faire, dans des cas particuliers sur lesquels nous aurons à revenir, que quelques-uns de ces carrés disparaissent.

Il est utile d'observer que les fonctions linéaires entrant

sous les carrés sont généralement indépendantes les unes des autres; car en donnant à ces fonctions des valeurs arbitraires, on en déduira, en remontant, un système de valeurs de x_n, $x_{n-1}, \ldots$ x_2, x_1, uniques et bien déterminées. Il est donc impossible, dans le cas général, qu'il existe entre ces fonctions linéaires $A_1, A_2, \ldots A_n$, une relation identiquement satisfaite, telle que

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n = 0$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ seraient des constantes.

Or c'est précisément l'absence d'une telle relation qui constitue l'indépendance des fonctions linéaires $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Loi de l'inertie des formes quadratiques. — M. Sylvester a démontré que les formes quadratiques jouissent d'une propriété très importante dont voici l'énoncé:

Etant donnée une forme quadratique f, il existe évidemment bien des manières différentes de la décomposer en somme de carrés. Parmi ces carrés les uns sont affectés du signe +, les autres du signe —.

Le théorème consiste en ce que *le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs sont toujours les mêmes, quelle que soit la voie suivie pour la décomposition.*

M. Laurent a donné récemment, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, une démonstration intéressante de cette loi d'inertie. Celle que nous adopterons ici est due à Jacobi; elle ne suppose pas que le nombre des carrés soit précisément égal au nombre des variables; celles-ci peuvent être au contraire en nombre supérieur au nombre des fonctions linéaires entrant sous les carrés.

Supposons donc qu'on ait décomposé la forme considérée de deux manières, et soit

1° $f = R_1^2 + R_2^2 + \ldots + R_i^2 - S_1^2 - S_2^2 - \ldots - S_k^2$,
$i + k$ étant le nombre des carrés, et les fonctions linéaires $R_1, R_2, \ldots S_1, S_2, \ldots$ étant supposées indépendantes les unes des autres;

2° $f = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_m^2 - V_1^2 - V_2^2 - \ldots - V_n^2$,
$m + n$ étant le nombre des carrés de cette seconde

décomposition, et $U_1, U_2, \ldots V_1, V_2, \ldots$ étant ou n'étant pas indépendantes.

Établissons qu'on a $m \geqq i$ et $n \geqq k$.

En effet, si l'on avait $m < i$, on en déduirait $m + k < i + k$. Considérant alors les $i + k$ fonctions indépendantes $R_1 R_2 \ldots R_i$, S_1, $S_2, \ldots S_k$, et en même temps les $m + k$ fonctions dépendantes ou indépendantes $S_1, S_2, \ldots S_k$, $U_1, U_2, \ldots U^m$, on pourrait donner aux variables des valeurs telles que les $m + k$ secondes fonctions seraient nulles sans que les $i + k$ premières le fussent toutes à la fois; on aurait alors

$$f = R_1^2 + R_2^2 + \ldots + R_i^2 = - V_1^2 - V_2^2 - \ldots - V_n^2;$$

ce qui est évidemment absurde.

m ne peut donc pas être moindre que i, et on reconnaîtrait par un raisonnement analogue que n ne peut pas être moindre que K.

Admettons maintenant que les $m + n$ fonctions de la seconde composition soient indépendantes, que les $i + k$ premières le soient ou non, on aura, en vertu du raisonnement précédent, $i \geqq m$ et $k \geqq n$.

Dès lors, si les fonctions obtenues dans les deux décompositions sont indépendantes, ce que nous supposerons, on ne pourra satisfaire aux conditions établies qu'en faisant $i = m$ et $n = K$, ce qui démontre la *loi d'inertie* énoncée.

Définition de l'invariant d'une forme quadratique. — Considérons une forme quadratique $f = \Sigma a_{i,k} x_i x_k$ renfermant n invariables $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Représentons par $f_1, f_2, \ldots f_n$ les demi-dérivées partielles de cette forme par rapport à chacune des variables; on aura évidemment :

$$f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} x_n$$
$$f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

On appelle *invariant* de la forme f le *déterminant* des coefficients des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ dans ces n relations.

Il est facile de voir qu'en vertu de la définition des formes quadratiques, a_{ik} étant égal à a_{ki}, cet invariant est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

Théorème. — *Si l'on fait une substitution linéaire dans une forme quadratique, on obtient une autre forme dont l'invariant est égal à celui de la première forme multiplié par le carré du déterminant de la substitution.*

Rappelons d'abord que, en général, faire une substitution linéaire, c'est remplacer certaines variables x, y, z,... par des fonctions linéaires et homogènes d'autres variables x', y', z',...

Prenons pour exemple le cas de trois variables; les raisonnements se font de la même manière pour un plus grand nombre de variables, et nous aurons une écriture plus simple.

La substitution linéaire sera de la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}\right.$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ que l'on suppose toujours $\lessgtr$ o s'appelle le *déterminant de la substitution.*

Après une première substitution, on peut en faire une seconde déterminée par les relations.

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' \\ y' &= \alpha' x'' + \beta' y'' + \gamma' z'' \\ z' &= \alpha'' x'' + \beta'' y'' + \gamma'' z'' \end{aligned}\right.$$

x, y, z s'expriment alors au moyen des variables x'', y'', z'', et il est facile de voir que le déterminant de la substitution résultante est le produit des déterminants des deux substitutions composantes ; car on a :

$$\begin{aligned} x &= (a\alpha + b\alpha' + c\alpha'')x'' + (a\beta + b\beta' + c\beta'')y'' + (a\gamma + b\gamma' + c\gamma'')z'' \\ y &= (a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'')x'' + (a'\beta + b'\beta' + c'\beta'')y'' + (a'\gamma + b'\gamma' + c'\gamma'')z'' \\ z &= (a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'')x'' + (a''\beta + b''\beta' + c''\beta'')y'' + (a''\gamma + b''\gamma' + c''\gamma'')z'' \end{aligned}$$

et le déterminant de cette substitution finale n'est autre chose que le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

On voit aussi, au moyen d'un raisonnement très usité en mathématiques (logarithme d'un produit, module d'un produit, etc.), que, si l'on fait plusieurs substitutions successives, le déterminant de la substitution résultant sera le produit de tous les déterminants des substitutions considérées.

Cela posé, soit une forme quadratique à trois variables x_1, x_2, x_3; on peut la mettre sous la forme suivante :

$$f = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \quad (1)$$
$$+ x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

Considérons la substitution

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 \\ x_2 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \gamma_2 X_3 \\ x_3 = \alpha_3 X_1 + \beta_3 X_2 + \gamma_3 X_3 \end{cases} \quad (2)$$

Portons d'abord les valeurs (2) dans les fonctions linéaires mises entre parenthèses dans (1); nous aurons :

$$f = x_1(M_{11}X_1 + M_{12}X_2 + M_{13}X_3) + x_2(M_{21}X_1 + M_{22}X_2 + M_{23}X_3) \quad (3)$$
$$+ x_3(M_{31}X_1 + M_{32}X_2 + M_{33}X_3)$$

les quantités ainsi représentées par les lettres M étant les suivantes :

$$M_{11} = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3$$
$$M_{12} = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3$$
$$M_{13} = a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}\gamma_3 \quad \text{etc.}$$

et le déterminant $\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$ étant précisément le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \delta$$

Achevons la substitution en portant les valeurs (2) à la place des variables mises en facteurs dans (1), ou, ce qui revient au même, à la place de ces mêmes variables dans (3) écrite comme il suit :

$$f = X_1(M_{11}x_1 + M_{21}x_2 + M_{31}x_3) + X_2(M_{12}x_1 + M_{22}x_2 + M_{32}x_3)$$
$$+ X_3(M_{13}x_1 + M_{23}x_2 + M_{33}x_3)$$

il vient :

$$F = X_1(P_{11}X_1 + P_{21}X_2 + P_{31}O_3) + X_2(P_{12}X_2 + P_{22}X_2 + P_{32}X_3) + X_3(P_{13}X_1 + P_{23}X_2 + P_{33}X_3)$$

les quantités ainsi représentées par les lettres P étant les suivantes : $P_{11} = M_{11}\alpha_1 + M_{21}\alpha_2 + M_{31}\alpha_3$

$P_{21} = M_{11}\beta_1 + M_{21}\beta_2 + M_{31}\beta_3$, etc.

et le déterminant $\begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}$ qui est l'invariant de la forme nouvelle F,

étant précisément le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \Delta\delta \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \delta$$

c.-à-d. le produit $\Delta\delta^2$.

Or Δ est ce que nous avons défini l'invariant de la forme f, et δ est le déterminant de la substitution. Donc le théorème est démontré.

(A suivre.)

RECHERCHE DES FACTEURS COMMENSURABLES

D'UNE ÉQUATION DE DEGRÉ QUELCONQUE,

Par M. **G. de Longchamps**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Lorsqu'un polynôme entier $F(x)$, est le produit de deux facteurs, dont l'un

$$f = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha_p$$

est de degré p et a tous ses coefficients commensurables, on dit que f est *un facteur commensurable d'ordre* p, de l'équation

$$F(x) = 0.$$

La recherche de ces facteurs se fait ordinairement par la méthode de Lagrange, laquelle, comme on le sait, consiste à diviser F par f et à écrire que le reste, polynôme de degré $(p - 1)$, est identiquement nul. Le procédé que nous allons exposer nous paraît remplir le même but, par des calculs

plus simples. Le principe qui leur sert de base, et qui est des plus élémentaires, nous a été inspiré par la lecture d'une note de M. Landry (*), dans laquelle ce géomètre expose une manière ingénieuse de trouver les facteurs de la forme $(x^p - a)$, a étant un nombre commensurable.

1. M. Landry, dans le mémoire cité, part de cette remarque évidente que l'équation proposée peut s'écrire:

$$\varphi_1(x^p) + x\varphi_2(x^p) + \ldots + x^{p-1}\varphi_p(x^p) = 0.$$

Il faut remarquer pour apprécier la simplicité de la méthode, que ces fonctions φ_1, φ_2, ... φ_p, sont immédiatement déterminées, à la seule inspection de l'équation proposée. Soit α une racine quelconque de l'équation $x^p - a = 0$; elle est donc racine de l'équation proposée, ce qui donne l'égalité

$$\varphi_1(a) + \alpha\varphi_2(a) + \ldots + \alpha^{p-1}\varphi_p(a) = 0.$$

Considérons maintenant l'équation

$$\varphi_1(a) + X\varphi_2(a) + \ldots + X^{p-1}\varphi_p(a) = 0 \quad (1)$$

qui est de degré $p - 1$ et satisfaite par p *nombres différents*, savoir les p racines de l'équation binôme $x^p - a = 0$; l'équation (1) est donc une *identité*, et l'on a

$$\varphi_1(a) = 0 \quad \varphi_2(a) = 0 \ldots \quad \varphi_p(a) = 0. \qquad (2)$$

Il faut remarquer que parmi ces équations, deux ou trois sont *distinctes*; autrement les fonctions

$$\varphi_1(x^p), \quad \varphi_2(x^p) \ldots \quad \varphi_p(x^p)$$

seraient identiques à des facteurs constants près, et l'équation se décomposerait en deux facteurs,

$$\varphi_1(x^p) = 0$$

$$A_1 + A_2x + \ldots + A_p x^{p-1} = 0;$$

et en posant $x^p = y$, les facteurs commensurables de la forme $(x^p - a)$ sont donnés par les racines commensurables de l'équation $\varphi_1(y) = 0$.

Ce cas exceptionnel, et d'ailleurs favorable, étant mis de côté, on voit donc que le nombre cherché a doit être racine des p équations (2). On cherchera le p. g. c. d. des polynômes,

$$\varphi_1(y), \quad \varphi_2(y) \ldots \quad \varphi_p(y),$$

(*) *Équations numériques; Racines commensurables de tous les degrés*. Librairie Hachette, 1870.

soit $\Psi(y)$ ce p. g. c. d. et a une racine commensurable de l'équation $\Psi(y) = 0$.
$(x^p - a)$ est un facteur de l'équation donnée.

En résumé, *ayant formé, chose qui se fait immédiatement, les fonctions* $\varphi_1(y)$ $\varphi_2(y) \ldots \varphi_p(y)$:

1° *Si elles n'ont pas de p. g. c. d., on peut affirmer que l'équation proposée n'a pas de facteur (commensurable ou non) de la forme* $(x^p - a)$;

2° *Si elles ont un p. g. c. d.* $\Psi(y)$ *et si l'équation* $\Psi(y) = 0$ *admet des racines commensurables* a, b,. . . *l'équation donnée admet les facteurs commensurables* $(x^p - a)$, $(x^p - b)$. . . ;

3° *Si l'équation* $\Psi(y) = 0$ *n'a pas de racine commensurable, l'équation donnée n'a pas de facteur commensurable de la forme* $(x^p - a)$, *mais elle se décompose en deux facteurs commensurables dont l'un est* $\Psi(x^p)$.

2. — Telle est, rapidement exposée, cette méthode de M. Landry qui nous paraît d'une pratique commode; il nous reste à dire comment nous l'avons étendue à la recherche d'un facteur commensurable d'ordre p et *quelconque*.

Nous ferons d'abord la remarque qu'après avoir posé

$$y = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots \alpha_{p-1} x \qquad (1)$$

on peut toujours écrire *identiquement* l'équation donnée $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = f_1(y) + x f_2(y) + \ldots + x^{p-1} f_p(y). \qquad (2)$$

En effet de (1) on tire

$$x^p = y - \alpha_1 x^{p-1} \ldots - \alpha_{p-1} x$$

et, par suite,

$$x^{p+1} = yx - \alpha_{p-1} x^2 \ldots - \alpha_1 x^p$$

ou,

$$x^{p+1} = yx - \alpha_{p-1} x^2 \ldots - \alpha_2 x^{p+1} - \alpha_1 (y - \alpha_1 x^{p-1} \ldots - \alpha_{p-1} x) ;$$

x^{p+1} est donc comme x^p donné par une expression de la forme,

$$A_1 + A_2 x \ldots + A_p x^{p-1} ; \qquad (3)$$

$A_1, A_2, \ldots A_p$ étant fonction des lettres $y, \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}$, mais pas de la lettre x. De x^{p+1}, on déduira par un calcul semblable et de proche en proche pour x^{p+2}, x^{p+3}, . . .

des expressions de la forme (3); substituant alors dans F, x^p, x^{p+1}, . . . x^m par ces expressions ainsi calculées, F prendra bien la forme indiquée.

3. — Ceci posé, soit

$$f = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1} x - \alpha_p ,$$

un facteur commensurable de l'équation $F(x) = 0$, qui est supposée n'avoir que des racines simples; et désignons par α une racine *quelconque* de $f = 0$, α sera aussi racine de $F = 0$ et en remplaçant x par α, dans (3), remarquant en même temps que

$$\alpha^p + \alpha^1, \alpha^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\alpha = \alpha_p ,$$

que par suite la lettre y qui figure dans cette identité prend pour $x = \alpha$ la valeur α_p, il vient

$$0 = f_1(\alpha_p) + \alpha f_2(\alpha_p) + \ldots + \alpha^{p-1} f_p(\alpha_p),$$

et si l'on considère l'équation,

$$X^{p-1} f_p(\alpha_p) + \ldots + X f_2(\alpha_p) + f_1(\alpha_p) = 0.$$

Celle-ci, étant satisfaite par les p racines différentes de l'équation $f = 0$, *est une identité* et l'on a, pour déterminer les p inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, les p équations

$$f_1(\alpha_p) = 0,\ f_2(\alpha_p) = 0 \ldots f_p(\alpha_p) = 0.$$

L'élimination de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$, si elle se fait sans introduction de facteurs étrangers, conduira à une équation en α_1 de degré $C_m{}^p$, parce que $(-\alpha_1)$ représente la somme de *p racines quelconques* de l'équation donnée. On cherchera, par la méthode ordinaire, les racines commensurables de cette équation; ayant trouvé l'une de ces racines α_1, la détermination des autres inconnues $\alpha_2, \ldots \alpha_p$, se fait *généralement* par des équations qui ne sont *que du premier degré*. En effet, considérons α_2 par exemple; il y a entre α_1 et α_2 deux équations, et par des combinaisons connues et généralement possibles on pourra obtenir une équation en α_1 et α_2, ne renfermant α_2 qu'au premier degré.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques spéciales.

209. — a, b, c, d, désignant des nombres entiers et positifs $(1+x)^{6a+1} + (1+x)^{6b+2}$ est divisible par x^2+x+1;

$$x^{3a-1} + x^{3b} + x^{3c+1} \text{ est divisible par } x^2 + x + 1\,;$$

$$x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3} \text{ est divisible par } x^3 + x^2 + x + 1.$$

(H. Laurent.)

210. — La valeur de la série

$$\frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)} + \frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} + \dots$$

est *un* si le produit

$$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots$$

est infini, ce qui a lieu en particulier si la série à termes positifs $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
est divergente.

La série précédente est convergente si le produit tend vers une limite déterminée; elle est divergente si le produit est nul ou indéterminé. *(H. Laurent.)*

211. — L'équation

$$Kx^m + \frac{x^{m-1}}{1} + \frac{x^{m-2}}{2} + \frac{x^{m-3}}{3} + \dots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires si m est pair, et une seule racine réelle si m est impair. K est quelconque.

(H. Laurent.)

212. — Soit V un polynôme entier en x; V_1 sa dérivée. On peut toujours trouver un polynôme X tel que $XV_1 - 1$ soit divisible par V; soit V_2 le quotient, on détermine V_3 à l'aide de V_1 et de V_2 comme on a déterminé V_2 à l'aide de V et V_1, etc. La suite V, V_1, V_2, V_3... peut remplacer la suite de Sturm si $V = 0$ n'a pas de racines égales.

(H. Laurent.)

213. — Soit l'équation à coefficients positifs

$$x - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \dots = 0,$$

il y aura des racines imaginaires si l'une des conditions suivantes est remplie : $b > \frac{m-1}{1.2.m} a^2$;

$$c > \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.m^2} a^3 \ldots$$

(H. Laurent.)

214. — Faire voir, à l'aide de la seule théorie des logarithmes que si l'on trace les courbes représentées par les équations $y = a^x$, $y = b^x$,
l'une d'elles deviendra la projection de l'autre si on fait tourner son plan d'un angle convenable autour de l'axe des y. — Exprimer cet angle en fonction du module relatif des deux systèmes de logarithmes correspondants. *(Picquet.)*

215. — Démontrer que pour trouver la dérivée d'un déterminant dont tous les éléments sont fonction d'une même variable, il suffit de faire la somme des déterminants obtenus en remplaçant dans le déterminant proposé tous les éléments d'une colonne par leurs dérivées. *(Picquet.)*

216. — Trouver les dérivées des fonctions circulaires inverses *arc sin* x, *arc cos* x, *arc tg* x
en s'appuyant seulement sur la définition de la dérivée et sur les formules inverses de l'addition des arcs :

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin } (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$
$$\text{arc cos } x + \text{arc cos } y = \text{arc cos } (xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$
$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } x = \text{arc tg } \frac{x+y}{1-xy}.$$

(Picquet.)

217. — Étant données deux circonférences C et C' tangentes entre elles, et une de leurs tangentes extérieures AB, on mène une circonférence C'' tangente aux deux circonférences proposées et à AB, puis une circonférence C''' tangente à C, à C'' et à AB, et ainsi de suite. On propose d'étudier les séries formées par les rayons de ces circonférences successives et par les surfaces des mêmes cercles. On donne AB $= 2a$, et AC $=$ R.

218. — Soit la série

$$1+\frac{x}{x+p+1}+\frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)}+\dots$$
$$+\frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{(x+p+1)(x+p+2)\dots(x+p+n+1)}+\dots$$

on demande d'établir que cette série est convergente quand p est positif, divergente quand p est négatif, et de déduire de la considération de cette suite une démonstration du théorème de Duhamel. Examiner aussi le cas intermédiaire où $p = 0$.

219. — Démontrer la règle de Leibnitz pour trouver la dérivée n^{me} d'un produit uv de deux fonctions de x :

$$y_{(n)} = vu_{(n)} + C_1^n v' u_{(n-1)} + C_2^n v'' u_{(n-2)} + \dots$$

en démontrant que, si cette règle est vraie pour la dérivée d'ordre $(n - 1)$, elle est encore vraie pour la dérivée d'ordre n. Appliquer ce théorème à la recherche de la dérivée n^{me} de la fonction $y = e^{px} \cos (mx + p)$.

220. — Soit la fonction $y = \dfrac{x - a}{x^2 + 1}$.

1° Démontrer qu'en désignant par $y', y'', \dots y_{(n)}$ les dérivées successives de y, on a entre trois dérivées consécutives la relation

$$(x^2 + 1)\, y_{(n)} + 2nxy_{(n-1)} + n\,(n - 1)\, y_{(n-2)} = 0.$$

2° Démontrer que si l'on pose

$$y_{(n)} = (-1)^n\, 1.2.3\dots n \frac{V_{n+1}}{(1+x^2)^{n+1}},$$

V_{n+1} est un polynôme en x du degré $(n + 1)$, dont le premier terme est x^{n+1}, et que, entre trois polynômes consécutifs, on a la relation

$$V_n - 2xV_{n-1} + (1 + x^2)\, V_{n-2} = 0.$$

3° En faisant $V = 1$, le théorème de Sturm s'applique à la suite des polynômes V_n, V_{n+1}, etc. et les racines de l'équation $V_n = 0$ séparent celles de l'équation $V_{n-1} = 0$.

4° Les coefficients de V sont des fonctions linéaires de la constante a, et en posant

$$V_n = P_n - aQ_n, \text{ on a, si } x = \text{cotg. } \varphi;$$

$$\text{cotg } n\varphi = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Conclure de là des expressions trigonométriques des racines de l'équation $V_n = 0$.

Remarque. — On pourra établir cette relation en posant :

$$u_n = \frac{\cos n\varphi}{\sin^n \varphi} - a \frac{\sin^n \varphi}{\sin^n \varphi},$$

et prouvant que u_n est un polynôme entier en x de degré n où l'on fait $x = \cotg \varphi$, et que trois polynômes consécutifs sont liés par la relation

$$u^n - 2xu_{n-1} + (1 + x^2)\, u_{n-2} = 0.$$

5° On propose d'établir que les polynômes V_n satisfont aux deux équations suivantes :

$$nV_{n+1} = 2\, nxV_n - (2 + x^2)\, V'_n\ ;$$

$$(1 + x^2)\, V''_n - 2\,(n - 1)\, x\, V'_n + n\,(n - 1)\, V_n = 0.$$

ERRATUM

Dans l'énoncé de la question 202, il s'est glissé une erreur ; la seconde équation doit être écrite comme il suit :

$$xy + xz - yz = b\,[(a + c)\,(a - c)\,(2a - b) + 2ab^2].$$

Cette correction est indispensable pour obtenir des valeurs commensurables de x, y, z, ce qui est tout l'intérêt de la question.

AVIS

Il reste à résoudre les questions : 175, 184, 185, 186, 192, 193, 200, 201, 202, 203, 204.

Toutes les autres questions sont déjà insérées, ou le seront prochainement.

A ce sujet, nous rappellerons les avis que nous avons déjà donnés pour la solution des questions proposées.

Chaque solution doit être mise sur une feuille séparée, portant le nom de celui qui a résolu la question, l'établissement auquel il appartient, le numéro de la question et l'énoncé.

La figure doit être faite à part avec beaucoup de soin, de façon à ce qu'elle puisse être reproduite directement en cas de besoin.

Toute solution qui ne remplirait pas ces conditions peut parfaitement échapper à notre examen, et nous ne répondons pas de son insertion.

Nous rappelons que, à moins d'avis contraire, nous n'acceptons pas de solution de professeurs pour les questions proposées.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KOEHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 24080-9.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au lycée Louis-le-Grand.

I. **Définition**. — *Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à une droite fixe et à un point fixe est constant, est une* ellipse *ou une* hyperbole, *suivant que ce rapport est plus grand ou plus petit que l'unité.*

Dans le cas où ce rapport est égal à l'unité, la courbe est une parabole, et l'étude de cette courbe est faite, d'après cette définition, dans tous les traités de géométrie élémentaire.

Soient *(fig. 1)*, M un point du lieu, D la droite et F le point fixe, FD, MP perpendiculaires sur la droite D, h la distance des deux parallèles MP et FD, FD $= d$, $\frac{m}{n}$ le rapport donné.

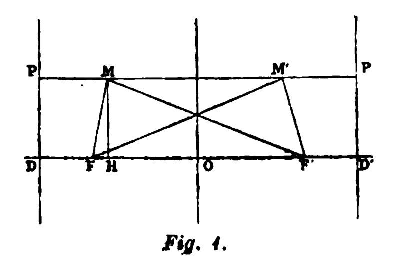


Fig. 1.

En prenant pour inconnue la distance MP $= x$, on déterminera le nombre des points du lieu situés sur une parallèle à FD.

On a, par définition, $\frac{\text{MP}}{\text{MF}} = \frac{m}{n}$.

En abaissant la perpendiculaire MH sur FD, on a le triangle rectangle MFH qui donne

$$\overline{\text{MF}}^2 = h^2 + (x - d)^2,$$

d'où, en vertu de la proportion précédente,

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + (x - d)^2}} = \frac{m}{n}.$$

Élevant au carré et développant par rapport à x, on obtient

l'équation

$$x^2(m^2 - n^2) - 2dm^2x + m^2(h^2 + d^2) = 0. \qquad (1)$$

Cette équation est du second degré; elle indique qu'il existe deux points M et M′ du lieu sur la ligne MP, et si l'on convient d'appeler *degré* d'une courbe le nombre des points où elle est coupée par une droite, on dira que l'ellipse et l'hyperbole sont des courbes du second degré.

II. *L'ellipse et l'hyperbole ont deux axes de symétrie.* — L'équation (1) est indépendante du signe de h; donc il existe une seconde parallèle à FD, symétrique de la première MP par rapport à FD; cette parallèle renferme également deux points du lieu donnés par la même équation (1), ce qui prouve que ces deux points sont exactement à la même distance de D que les points M et M′; la ligne FD est donc un axe de *symétrie*.

Soient x' et x'' les racines de l'équation (1); on a

$$x' + x'' = \frac{2dm^2}{m^2 - n^2},$$

relation indépendante de h;

Si l'on prend sur DF, et à partir du point D, une longueur DO égale à $\frac{x' + x''}{2}$, c'est-à-dire égale à $\frac{dm^2}{m^2 - n^2}$, et si au point O on élève une perpendiculaire à FD, les points M et M′ seront symétriquement placés par rapport à cette perpendiculaire. Comme la somme $x' + x''$ est indépendante de h, il en sera de même des points de chaque parallèle à FD. La courbe possède donc un second axe de symétrie, perpendiculaire au premier; on sait qu'alors elle possède un *centre*, qui est le point d'intersection des deux axes.

Corollaire I. — Il existe par suite un second point F′ et une seconde droite D′, symétriques du point F et de la droite D et possédant par rapport à tous les points du lieu les mêmes propriétés que ce point F et cette droite D.

Corollaire II. — On a, par définition,

$$\frac{MP}{MF} = \frac{M'P}{M'F} = \frac{m}{n};$$

or, à cause de la symétrie,

$$\frac{M'P}{M'F} = \frac{MP'}{MF'},$$

et par suite : $$\frac{MP}{MF} = \frac{MP'}{MF'} = \frac{MP' \pm MP}{MF' \pm MF} = \frac{m}{n}. \qquad (2)$$

III. — Les propriétés précédentes sont communes à l'ellipse et à l'hyperbole; comment, partant de la définition, peut-on caractériser chacune de ces courbes?

L'équation (1) donne pour le produit de ces racines :

$$x'x'' = \frac{m^2(h^2 + d^2)}{m^2 - n^2},$$

et ce produit est positif si $m > n$, négatif si $m < n$.

1° $m > n$; *ellipse.* — Dans le premier cas, $m > n$, la courbe est une ellipse ; de ce que la somme $x' + x''$ est également positive, on en conclut que les deux valeurs x' et x'' sont positives. Si l'on porte à droite du point P les valeurs positives, on voit que les points M et M' sont compris entre les deux droites D et D' ; en prenant dans la dernière proportion (2) le signe +, on a

$$\frac{MP' + MP}{MF' + MF} = \frac{m}{n};$$

or $$MP' + MP = \frac{2dm^2}{m^2 - n^2},$$

et par suite $$MF + MF' = \frac{2dmn}{m^2 - n^2}.$$

Cette somme est constante; donc, *l'ellipse est aussi le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.*

Les points F et F' sont les *foyers* de l'ellipse ; MF et MF', les *rayons vecteurs* ; les droites D et D', les *directrices.*

L'ellipse est une courbe fermée. — En effet le produit $x'x''$ ne peut dépasser un certain maximun qui a lieu lorsque $x' = x''$, puisque la somme $x' + x''$ est constante ; alors

$$x' = x'' = \frac{dm^2}{m^2 - n^2},$$

Pour avoir la distance de ce point à la droite FD, il faut dans le produit $x'x''$ remplacer x et x' par cette valeur, ce

qui donne $\frac{d^2m^4}{(m^2-n^2)^2} = \frac{m^2(h^2+d^2)}{m^2-n^2}$,

d'où l'on tire $h^2 = \frac{d^2n^2}{m^2-n^2}$.

La parallèle menée à cette distance à la droite FD est tangente à l'ellipse ; et cette valeur de h est la longueur du demi-petit axe.

Quant à la valeur minimum du produit $x'x''$, elle a lieu pour $h = 0$, ce qui donne les deux points de la courbe situés sur FD ; les perpendiculaires à FD menées par ces deux points sont évidemment tangentes à l'ellipse ; leur distance constitue la longueur du grand axe de l'ellipse. La courbe est donc renfermée entre quatre droites perpendiculaires deux à deux et constituant un rectangle, dont les côtés ont même longueur que les axes de la courbe.

2° $m < n$; *hyperbole.* — Le produit $x'x''$ est négatif ; les deux points M et M' sont de part et d'autre de la droite D. Soit x' la racine positive, x'' la racine négative ; la différence de ces racines est

$$x' - x'' = \frac{2dmn}{m^2-n^2};$$

elle est essentiellement positive ; comme $m < n$, il faut que l'on ait $d < 0$; alors la somme

$$x' + x'' = \frac{2dmn}{m^2-n^2}$$

est positive ; donc la racine positive est plus grande en valeur absolue que la racine négative. Il est facile de conclure de ce qui précède que les foyers F et F' sont en dehors de l'intervalle compris entre les deux droites D et D' comme l'indique la *figure 2.*

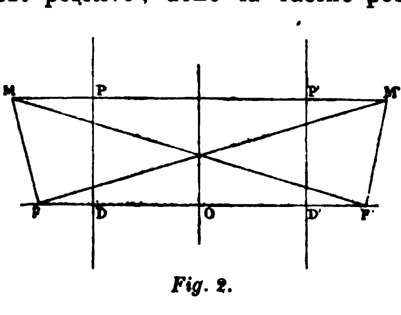


Fig. 2.

Dans ce cas, on prendra le signe — dans la dernière proportion (1) et on aura

$$\frac{MP' - MP}{MF' - MF} = \frac{MP - MP'}{MF - MF'} = \frac{m}{n}.$$

or $$MP - MP' = \frac{2dm^2}{n^2 - m^2},$$

d'où $$MF - MF' = \frac{2dmn}{n^2 - m^2}.$$

Cette différence est constante; donc, *l'hyperbole est le lieu des points tels que la différence de leurs distances à deux points fixes est constante.*

L'hyperbole est une courbe à branches infinies. — En effet, x' et x'' peuvent avoir des valeurs aussi grandes que possible, pourvu que la différence $x' - x''$ reste constante; h pourra également prendre toutes les valeurs possibles, ce qui prouve que la courbe a des points sur toute parallèle à FD.

Comme pour l'ellipse, le minimum du produit $x'x''$ en valeur absolue a lieu pour $h = 0$; à cette valeur correspondent les deux points de la courbe situés sur l'axe FD; et si par ces points on élève des perpendiculaires à FD, on obtient deux tangentes qui limitent la courbe.

IV. **Théorème.** — *La tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact.*

Pour le démontrer, on s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme. — M *est un point d'une ellipse ou d'une hyperbole,* F *un foyer et* N *le point où la tangente en* M *rencontre la directrice correspondante; l'angle* MFN *est droit.*

Fig 3.

Soient *(fig. 3)* M et M' deux points voisins, MP, M'P' les perpendiculaires abaissées de ces points sur la directrice et N le point où la corde MM' rencontre cette directrice; on a, par définition,

$$\frac{MP}{MF} = \frac{M'P'}{M'F'};$$

mais les triangles semblables NPM et NP'M' donnent

$$\frac{MP}{NM} = \frac{M'P'}{NM'};$$

d'où, en divisant ces deux expressions membre à membre,

$$\frac{MN}{MF} = \frac{MN'}{M'F}.$$

Cette proportion montre que le point N appartient à la bissectrice extérieure de l'angle MFM'. Si le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la corde MM' deviendra la tangente en M à la courbe, et le point N occupera sur la directrice une position telle que la ligne NF sera perpendiculaire à MF, puisque c'est avec MF que coïncidera, à la limite, la bissectrice intérieure de l'angle MFM'.

Cela étant, soient *(fig. 4)* MN une tangente limitée aux directrices; PMP' une parallèle à l'axe FD; l'angle NFM étant droit, le quadrilatère NFMP est inscriptible dans un cercle et par suite les angles NMF et NPF sont égaux.

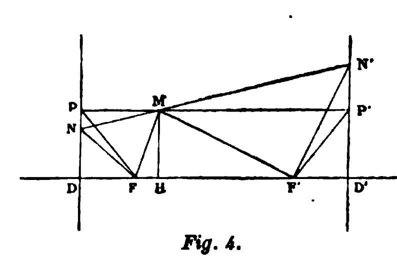


Fig. 4.

De même, le quadrilatère MF'P'N' est inscriptible dans un cercle, et il est facile de voir qu'on a

$$N'MP' = N'F'P'$$

et $$F'MP' = F'N'P';$$

d'où par addition $$N'MF' = N'F'P' + F'N'P';$$

or à cause du triangle F'P'N' pour lequel l'angle F'P'D' est un angle extérieur, on a

$$N'F'P' + F'N'P' = F'P'D',$$

d'où $$N'MF' = F'P'D';$$

mais, par raison de symétrie, les angles F'P'D' et FPD sont égaux, donc il en est de même des angles FMN et F'MN'.

Corollaire. — La normale est alors bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

De ce théorème résultent les constructions connues de la tangente à l'ellipse et à l'hyperbole, et quelques propriétés

simples qu'on démontre dans les cours et qu'il est utile de rappeler ici.

I

ELLIPSE

1° *Propriétés des tangentes.*

V. — Pour introduire dans les relations obtenues jusqu'ici les paramètres qui définissent ordinairement une ellipse, savoir les longueurs des axes, on devra poser :

$$\text{MF} + \text{MF}' = \frac{2dmn}{m^2 - n^2} = 2a \text{ et } \frac{d^2n^2}{m^2 - n^2} = b^2.$$

En divisant ces deux expressions membre à membre, après avoir élevé la première au carré, on a :

$$\frac{m^2}{m^2 - n^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

d'où l'on tire
$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2},$$

et
$$\frac{m}{n} = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{d}{c},$$

en posant
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

En divisant membre à membre les expressions posées, on a
$$\frac{m}{dn} = \frac{a}{b^2},$$

d'où
$$d = \frac{b^2}{a} \times \frac{m}{n} = \frac{b^2}{c};$$

Et enfin, la figure 4 montre que

$$\text{FO} = \text{OD} - \text{DF} = \frac{dm^2}{m^2 - n^2} - d = \frac{dn^2}{m^2 - n^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - b^2} = c.$$

On a alors, par substitution,

$$x'x'' \text{ ou MP} \times \text{M'P ou MP} \times \text{MP}' = \frac{a^2}{b^2}\left(h^2 + \frac{b^2}{c^2}\right).$$

Ceci posé, soit 2α l'angle des rayons vecteurs d'un point de la courbe *(fig. 4)*; l'angle NMF est égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, et comme les angles NMF et DPF sont égaux, il en résulte

que $$\widehat{PFO} = \frac{\pi}{2} - \widehat{DPF} = \alpha,$$

et aussi que $$MH = PD = \frac{b^2}{c}\ \mathrm{tg}\ \alpha.$$

On a aussi, par définition,

$$\frac{MP}{MF} = \frac{a}{c}, \frac{MP'}{MF'} = \frac{a}{c},$$

d'où $$\frac{MP \times MP'}{MF \times MF'} = \frac{a^2}{c^2},$$

et comme

$$MP \times MP' = \frac{a^2}{b^2}\left(h^2 + \frac{b^4}{c^2}\right) = \frac{a^2b^2}{c^2 \cos^2 \alpha},$$

il vient $$MF \times MF' = \frac{b^2}{\cos^2 \alpha}.$$

VI. **Théorème.** — *Le produit des distances des foyers à une tangente est constant et égal au carré du petit axe.*

En effet, la relation

$$MF \times MF' = \frac{b^2}{\cos^2 \alpha}$$

peut s'écrire $(MF \cos \alpha) \times (MF' \cos \alpha) = b^2$,
et les deux facteurs du premier membre représentent précisément les distances des foyers à la tangente considérée.

Remarque. — La somme de ces deux facteurs est

$$(MF + MF') \cos \alpha = 2a \cos \alpha$$

et si OQ représente la distance du centre à la tangente en M, on a $OQ = a \cos \alpha$.

Si du centre on abaisse une perpendiculaire sur la normale en M, la distance du point M à cette perpendiculaire est précisément égale à OQ. Cette perpendiculaire prolongée coupe les rayons vecteurs du point M en deux points distants de M d'une longueur égale à a.

VII. **Théorème d'Apollonius.** — 1° *La somme des carrés construits sur deux diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés construits sur les axes ;* 2° *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une surface constante est égal à celle du rectangle construit sur les axes.*

Soit (*fig.* 5) γ l'angle du diamètre OM avec la tangente en ce point M, OQ la distance du centre à la tangente.

Le triangle rectangle OMQ donne

$$OQ = OM \sin \gamma,$$

et (VI) par suite $\quad a \cos \alpha = OM \sin \gamma.$

Le triangle FMF' donne

$$\overline{FM}^2 + \overline{F'M}^2 = 2c^2 + 2\overline{OM}^2$$

et comme (V) $\quad 2FM \times F'M = \dfrac{2b^2}{\cos^2 \alpha},$

on a, en additionnant ces deux expressions membre à membre

$$(FM + F'M)^2 \text{ ou } 4a^2 = 2\overline{OM}^2 + 2c^2 + \frac{2b^2}{\cos^2 \alpha},$$

ou $\quad \overline{OM}^2 = a^2 + b^2 - \dfrac{b^2}{\cos^2 \alpha},$

ou encore, puisque

$$\cos \alpha = \frac{OM \sin \gamma}{a},$$

$$\overline{OM}^4 \sin^2 \gamma - (a^2 + b^2) \sin^2 \gamma \times \overline{OM}^2 + a^2 b^2 = 0.$$

Or, il existe deux angles ayant même sinus pouvant convenir à la relation précédente; ces deux angles sont supplémentaires; à chacun d'eux correspondent un diamètre et une tangente et la figure formée par ces quatre lignes est un parallélogramme. Les diamètres, pris deux à deux, jouissant de cette propriété, à savoir que la tangente à l'extrémité de l'un est parallèle à l'autre, sont dits *conjugués*. Les longueurs de deux pareils diamètres et l'angle qu'ils font avec leurs tangentes sont liés par la relation précédente; en la considérant comme une équation du 2e degré par rapport à $\overline{OM}^2$ et désignant par a'^2 et b'^2 les racines, on obtient les deux relations:

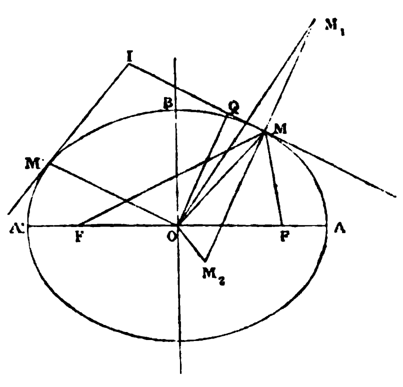


Fig. 5.

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$
$$a' b' \sin \gamma = ab,$$

qui constituent les deux théorèmes d'Apollonius.

VIII. **Théorème.** — *Le produit des rayons vecteurs d'un point est égal au carré du diamètre conjugué de celui du point considéré.*

Soit *(fig. 5)* $OM = a'$ le demi-diamètre du point M; le deuxième théorème d'Apollonius donne

$$a' \sin \gamma = \frac{ab}{b'},$$

et comme (VII) $\cos \alpha = \frac{OM \sin \gamma}{a} = \frac{b}{b'},$

on peut écrire $MF \times MF' = \frac{b^2}{\cos^2 \alpha} = b'^2.$

Remarque. — La relation

$$\cos \alpha = \frac{b}{b'}$$

qu'on vient d'obtenir permet de déterminer facilement les variations de l'angle des rayons vecteurs d'un point M d'une ellipse. Le point M étant en A, $b' = b$ et $\alpha = 0$; le point M parcourant l'arc AB, b' augmente, $\cos \alpha$ diminue et α augmente; le cosinus aura sa valeur minimum ou l'angle sa valeur maximum lorsque b' aura sa plus grande valeur a; alors $\cos \alpha = \frac{b}{a}$.

IX. **Théorème.** — *Si l'on porte sur la normale en un point* M (fig. 5) *de part et d'autre de ce point une longueur égale au demi-diamètre conjugué de* OM, *les points* M_1 *et* M_2 *obtenus décrivent des cercles lorsque le point* M *parcourt l'ellipse.*

Dans le triangle OMM_1 on a

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MM_1}^2 - 2OM \times MM_1 \cos OMM_1;$$

or, d'après les notations usitées

$$OMM_1 = \frac{\pi}{2} + \gamma$$

et $$\cos OMM_1 = -\sin \gamma,$$

et par suite, si l'on pose OM $= a'$, MM_1 sera égal à b' et

$$\overline{OM_1}^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin \gamma,$$

ou, en vertu des théorèmes d'Apollonius,

$$\overline{OM_1}^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

Donc le point M_1 décrit un cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $a + b$.

De même, d'après la figure

$$\overline{OM_2}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin \gamma = (a - b)^2$$

et le point M_2 décrit un cercle de même centre que l'ellipse et de rayon $a - b$.

X. **Théorème.** — *La tangente en un point* M *rencontre les tangentes aux extrémités du grand axe en deux points* R *et* R' *tels que*

$$MR \times MR' = b'^2$$

b' *étant le demi-diamètre conjugué de* OM.

Sans entrer dans les détails de construction de la *figure 6*

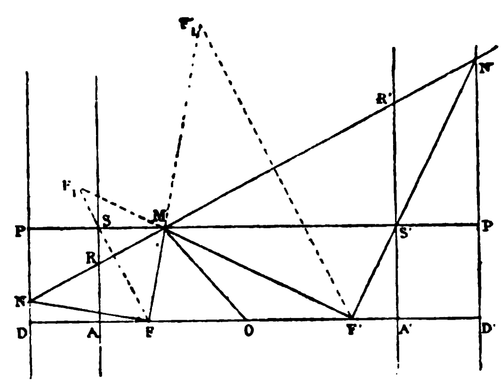


Fig. 6.

que l'on connaît, on voit que les triangles semblables MPN et MSR donnent la proportion

$$\frac{MR}{MN} = \frac{MS}{MP}.$$

On a, de même
$$\frac{MR'}{MN'} = \frac{MS'}{MP'},$$

et, en multipliant ces deux proportions membre à membre,

$$\frac{MR \times MR'}{MN \times MN'} = \frac{MS \times MS'}{MP \times MP'}$$

Or les triangles MFN et MF'N' étant rectangles, on a

$$MN \times MN' = \frac{MF \times MF'}{\sin^2 \alpha} = \frac{b'^2}{\sin^2 \alpha}.$$

et (V) $\quad MP \times MP' = \dfrac{a^2b^2}{c^2 \cos^2 \alpha}.$

Si l'on remarque que la distance comprise entre les droites ARS et DNP est égale à $\dfrac{a^2}{c} - a$, on a

$$MS \times MS' = \left[MP - \left(\frac{a^2}{c} - a\right)\right]\left[MP' - \left(\frac{a^2}{c} - a\right)\right] = \frac{a^2 b^2}{c^2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

et par suite :

$$MR \times MR' = \frac{b'^2}{\sin^2 \alpha} \times \frac{a^2b^2 \sin^2 \alpha}{c^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{a^2b^2} = b'^2.$$

Remarque. — Soient F'_1 le symétrique de F' par rapport à la tangente en M, F_1 celui du point F, on a, comme il est facile de le voir,

$MF \times MF'_1 = MF' \times MF_1 = MR \times MR' = \overline{MM_1}^2 = \overline{MM_2}^2 = b'^2$

M_1 et M_2 étant les points définis dans le théorème précédent et construits *figure 5*.

On conclut de cette suite d'égalités que les huit points R, R', F, F', F_1, F'_1, M_1, M_2, sont sur un même cercle ; son centre est évidemment au point où la tangente en M rencontre le petit axe. *(A suivre.)*

QUESTION 155.

Solution par M. Élie, élève au Collège Stanislas.

Étant donné un parallélogramme ABCD, *on prolonge* AB *d'une longueur* BB' *et* AD *d'une longueur* DD' *égale à* BB' ; *on construit avec* AB' *et* AD' *un parallélogramme. Soit* C' *son quatrième sommet. Démontrer que les droites* B'D, BD' *se coupent sur la droite* CC'. (De Longchamps.)

Soit R le point de rencontre. Joignons BD', EF. Les deux

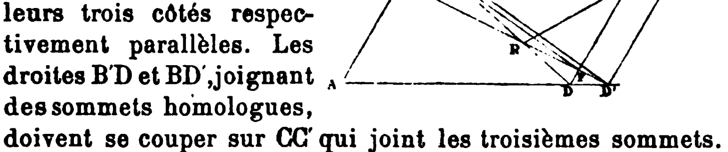
triangles équiangles RBB', RDF donnent $\frac{RB'}{RD} = \frac{RB}{RF}$.

De même les triangles REB, RDD' donnent $\frac{RE}{RD} = \frac{RB}{RD'}$

Divisant membre à membre ces deux égalités, on a

$$\frac{RB'}{RE} = \frac{RD'}{RF}.$$

Les deux triangles REF, RB'D' sont dès lors semblables et B'D' est parallèle à EF.



De sorte que les deux triangles C'B'D', CEF ont leurs trois côtés respectivement parallèles. Les droites B'D et BD', joignant des sommets homologues, doivent se couper sur CC' qui joint les troisièmes sommets. On voit que cette démonstration ne s'appuie pas sur ce que BB' = DD'.

La propriété a donc lieu indépendamment de cette condition.

Si BB' = DD', la figure CGC'H est un losange et CC' est la bissectrice de l'angle C. C'est donc une droite fixe.

D'où l'énoncé de ce lieu géométrique. — *Étant donné un parallélogramme* ABCD, *on prolonge* AB, AD *de longueurs* BB', DD' *égales entre elles. On forme sur* AB' *et* AD' *le parallélogramme* AB'C'D'. *On joint* B'D *et* BD', *et on demande le lieu du point de rencontre de ces droites.*

Dans ce cas on peut démontrer directement que la droite CR est bissectrice de l'angle C et par suite passe par le point C'.

En effet BRD' est une transversale dans le triangle AB'D

et l'on a
$$\frac{BB' \times AD' \times DR}{AB \times DD' \times RB'} = 1,$$

d'où
$$\frac{AD'}{AB} = \frac{RB'}{RD}.$$

Les deux triangles ABD' et BFC sont semblables et l'on a

$$\frac{AD'}{AB} = \frac{BC}{CF},$$

et d'après l'égalité démontrée on a

$$\frac{RB'}{RD} = \frac{RB}{BF}.$$

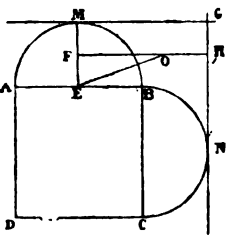
Comparant entre elles ces trois dernières égalités, on voit que $\frac{BC}{FC} = \frac{RB}{RF}$. Le point R divise la base du triangle BCF en parties proportionnelles aux côtés adjacents ; il est donc sur la bissectrice de l'angle C.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, de Grenoble; Jacquier, École normale de Charleville ; Manceau, d'Orléans; Hoc, de Sainte-Barbe; Pasquier, Institut Léopold, Bruxelles; Chareton, Collège Stanislas; Vazou, Collège Rollin; Renaud, de Bordeaux; Delais, du Mans; Gondy, Collège de Pontarlier; Montérou, Lycée de Pau.

QUESTION 156.

Solution par M. DUPUY, élève au Lycée de Grenoble.

Sur deux côtés consécutifs d'un carré ADCD, *on décrit des circonférences ayant pour diamètres ces côtés, et l'on mène des tangentes* MQ, NQ *parallèles au côté du carré. Démontrer que le rayon du cercle* O *tangent aux deux premiers et à* MQ, NQ *est égal au double du côté du carré diminué de deux fois le côté du triangle équilatéral inscrit dans l'un des cercles précédents.*



Soit le problème résolu et $2a$ le côté du carré; joignant ME, OE et menant HOF parallèle à MQ, on a le triangle rectangle EFO. Soit x le rayon du cercle cherché, et a le rayon des circonférences données, on a

$$\overline{OE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FO}^2$$
$$(a + x)^2 = (a - x)^2 + (2a - x)^2,$$

d'où

$$x = 4a - 2a\sqrt{3}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Tessier, d'Angers; Schlesser, Corbeaux, Vermand, de Saint-Quentin; Peyrabon, de Châteauroux; Elie, Cha-

reton, Collège Stanislas; Gondy, de Pontarlier; Dumur, de Chartres; Manceau. Gélinet, Huet, d'Orléans; Pombart, École normale de Charleville; Hoc, de Sainte-Barbe; Deslais, au Mans; Hugot, de Lyon; Demaris, de Moulins; Lannes, de Tarbes.

QUESTION 157.

Solution par M. Lannes, élève au Lycée de Tarbes.

Une droite de longueur et de direction constantes appuie ses extrémités sur deux sphères données. On demande la courbe décrite par chaque extrémité sur la sphère correspondante.

(Amigues.)

Soient O et O′ les centres des deux sphères. Par le point O menons une droite parallèle à la direction donnée et égale à la longueur donnée; soit O″ l'extrémité de cette droite. En désignant par A et A′ les extrémités de l'une des droites, on a OA = O″A′; les extrémités des droites se trouvent donc sur la sphère ayant pour centre O″ et un rayon égal à O; elles se trouvent aussi sur la sphère O′ : elles se trouvent donc à leur intersection, et comme cette intersection est une circonférence, la courbe décrite est une circonférence.

Il en est de même pour la circonférence O.

Nota. — M. Hoc, de l'École Sainte-Barbe, a résolu la même question.

QUESTION 158.

Solution par M. Genin, Collège de Charleville.

Soient O *le centre d'un cercle,* ABC *un triangle circonscrit,* A′, B′, C′ *les points de contact des côtés* BC, CA, AB; *si l'on désigne par* R *le rayon du cercle, par* S *et* S′ *les aires des triangles* ABC, A′B′C′, *on a*

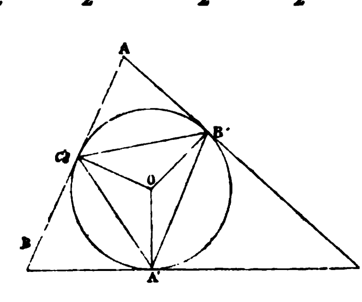
$$4S = R^4 \frac{S'^2}{OA'R' \,.\, OA'C' \,.\, OB'C'}.$$

On a $S' = OA'B' + OA'C' + OB'C' = \frac{R^2}{2}$ (sin A + sin B + sin C),

ou $$S' = 2R^2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

et $$OA'B' \,.\, OA'C \,.\, OB'C' = \frac{R^6}{8} \sin A \sin B \sin B$$

$$= R^6 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{B}{2} \cos\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{C}{2}$$



d'où $$R^4 \frac{S'^2}{OA'B' \,.\, OA'C' \,.\, OB'C'} = 4R^2 \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} ;$$

or $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-c)}} \,.$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\, p-b)}{p(p-c)}} \,;$$

d'où $$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p^3(p-(a)-b)\,(-c)}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}}$$

$$= \frac{p^2}{S} = \frac{p}{R} \,;$$

dès lors $$R^4 \frac{S'^2}{OA'B' \,.\, OA'C' \,.\, OB'C'} = 4R^2 \,.\, \frac{p}{R} = 4S.$$

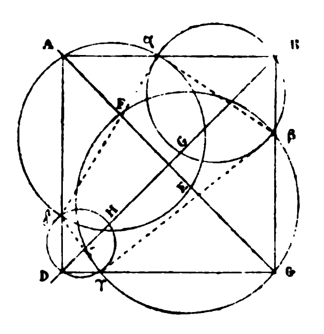
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Demaris, de Moulins ; Lannes, de Tarbes ; Hoc, de Sainte-Barbe ; Gelinet, d'Orléans ; Élie, de Stanislas ; Longueville, à Charleville ; Vermand, à Saint-Quentin ; Dupuy, à Grenoble ; Deslais, au Mans.

QUESTION 159.

Solution par M. Léopold Babu, élève au Lycée de Niort.

Construire un carré dont les côtés passent par quatre points donnés.

Soient α, β, γ, δ les points donnés et ABCD le carré répondant à la question. Circonscrivons des cercles aux triangles $\delta A\alpha$, $\alpha B\beta$, $\beta C\gamma$, $\gamma D\delta$. La diagonale AC du carré est bissectrice des angles droits DAB, BCD; elle passe donc par les points connus F et E, milieux des deux demi-circonférences $\gamma F\beta$, $\delta E\alpha$ décrites sur $\beta\delta$ et $\delta\alpha$ comme diamètres, et par suite cette droite AC peut être construite ainsi que les points A et C. Un raisonnement semblable montre que l'on peut déterminer facilement les points B et D. Pour avoir le carré on n'aura donc qu'à joindre ces quatre points.



La même construction s'applique encore au cas où 1, 2, 3 ou 4 des points doivent être situés sur les prolongements des côtés du carré.

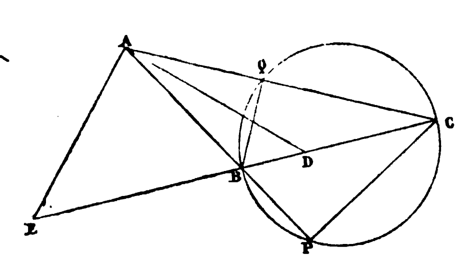
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Thual, à Lorient ; Pasquier, Institut Léopold, à Bruxelles ; Gélinet, à Orléans ; Henry, à Nice ; Deslais, au Mans ; Dupuy, à Grenoble ; Lannes, à Tarbes ; Fontaine, à Lille ; Jolly, au Collège de Vassy ; Coignard, au Lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 160.

Solution par M. Pecquery, élève du Lycée du Havre.

Soit ABC *un triangle dans lequel les deux bissectrices de l'angle* A *sont égales. Démontrer que le cercle décrit sur* BC *comme diamètre rencontre les côtés* AB, AC *en deux points* P *et* Q *tels que* CP = CQ.

Les triangles BCP, BCQ sont rectangles en P et Q; je dis qu'ils sont égaux. En effet, ils ont l'hypoténuse commune et de plus les angles PBC, QBC sont égaux. Car, le triangle EAD est rectangle et isoscèle; et en appelant α l'angle BAC du triangle donné, on a



$$PBC = ABE = \frac{a}{2} + 45^\circ;$$

de même $$BCQ = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Par suite le troisième angle QBC du triangle BCQ est égal à $45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Donc $$PBC = QBC$$
et par suite $$CP = CQ.$$

NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Fontaine, à Lille; Gelinet, à Orléans; Libmann, Élie, à Stanislas; Barbieux, à Amiens; Combebiac, Chaulet, à Montauban; Schlesser, Corbeaux, à Saint-Quentin; Hugot, à Lyon; Henry, à Nice; Thual, à Lorient; Huet, à Orléans; Gondy, à Pontarlier; Deslais, au Mans; Peyrabon, Johannet, à Châteauroux; Objois, à Moulins; Marin, à Agen; Pasquier, Institut Léopold, à Bruxelles; Longueville à Charleville; Arthus et Vail, École Albert-le-Grand, à Arcueil.

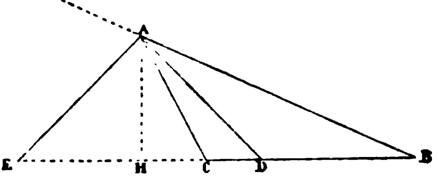
QUESTION 161.

Solution par M. GENIN, Collège de Charleville.

Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent à ce côté, et sachant que les bissectrices de cet angle sont égales.

Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle dont on connaît le côté AB, l'angle BAC, et soient AD = AE les

bissectrices égales de l'angle A. Soit AH la perpendiculaire sur EC. Cette droite est bissectrice de l'angle EAD, le triangle ADE étant isoscèle. De là la construction suivante.



On construit l'angle BAC et l'on mène les bissectrices AE et AD de cet angle ainsi que la bissectrice AH de l'angle EAD. Comme AB est donné, du point B abaissons la perpendiculaire BH sur AH. Cette ligne coupe AC en C et détermine le triangle cherché ABC.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gélinet, Huet, à Orléans ; Lannes, à Tarbes ; Tupin et Jarron, à Beaume-les-Dames ; Barbieux, école primaire supérieure d'Amiens ; Combebiac, Chaulet, à Montauban ; Corbeaux, Vermand, Schlesser, à Saint-Quentin ; Hugot, à Lyon ; Thual, à Lorient ; Gondy, à Pontarlier ; Blessel, à Paris ; Deslais, au Mans ; Tessier, à Angers ; Renaud, à Bordeaux ; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier ; Peyrabon, Johannet, à Châteauroux ; Longueville, à Charleville ; Gino Loria, à Mantoue (Italie) ; Marin, à Agen ; Breuillé, à Sainte-Barbe ; Pecquery, au Havre ; Detraz, à Bourg ; Libman, Élie, Collège Stanislas ; Dupuy, à Grenoble ; Arthur et Vail, école Albert le Grand, à Arcueil ; Rondeau, lycée Fontanes, à Paris.

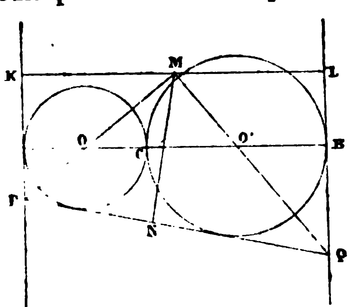
QUESTION 163.

Solution par M. DUPUY, du Lycée de Grenoble.

On donne une droite AB ; *un point* C *se déplace entre* A *et* B. *Sur* AC *et* BC *comme diamètres on décrit les circonférences* O *et* O′. *On mène une des tangentes communes extérieures qui rencontre en* P *et* Q *les tangentes en* A *et* B. *On mène* PO, QO′ ; *ces deux droites se coupent en un point* M *dont on demande le lieu géométrique.* (Julliard.)

Par M menons une perpendiculaire KML aux tangentes AP, BQ et abaissons MN perpendiculaire sur PQ. Les droites MQ, MP sont bissectrices des angles PQL, QPK ; il

suit que ML = MN et que MK = MN ; par suite MK = ML.



Le point M se trouvant équidistant des tangentes PK, QL, son lieu géométrique est la perpendiculaire élevée au milieu de AB. On démontre facilement que la longueur de cette perpendiculaire ne dépasse pas le quart de AB de part et d'autre de cette droite, selon que l'on considère l'une ou l'autre des tangentes extérieures.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Elie, du Collège Stanislas; Corbeaux, de Saint-Quentin; Hugot, de Lyon; Barbieux, École primaire supérieure d'Amiens; Mallet, Petit Séminaire de Belley; Vermand, de Saint-Quentin.

QUESTION 164.

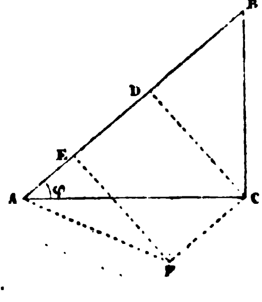
Solution par M. CADOT, élève du Lycée Saint-Louis.

Construire graphiquement l'angle x *donné par l'équation.*

$$tg\ x = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{3 \cos^2 \varphi - 1}$$

où φ *est un angle donné.* (Launoy.)

Prenons une droite AB de longueur 3 faisant avec une autre droite AC un angle φ, et formons le triangle rectangle ABC.



On a

$$BC = AB \sin \varphi = 3 \sin \varphi.$$

Soit CD perpendiculaire sur AB.

On a

$$CD = BC \cos \varphi = 3 \sin \varphi \cos \varphi.$$

D'autre part

$$AC = 3 \cos \varphi;$$

donc

$$AD = AC \cos \varphi = 3 \cos^2 \varphi.$$

Prenant sur DA une longueur $DE = 1 = \frac{1}{3}AB$,

on a $$AE = 3\cos^2\varphi - 1.$$

Élevons maintenant en E une perpendiculaire à AB et par le point C menons CF parallèle à AB; alors

$$EF = CD = 3\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$AE = 3\cos^2\varphi - 1;$$

dès lors $$\frac{EF}{AE} = \operatorname{tg} x = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{3\cos^2\varphi - 1};$$

or $$\frac{EF}{AE} = \operatorname{tg} BAF:$$

d'où $$BAF = x.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Bucheron, à Moulins; Dupuy, à Grenoble; Élie, collège Stanislas; Landres, à La Flèche; Gino Loria, à Mantoue, Italie; Longueville, à Charleville.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

(Toutes ces questions ont été proposées en 1879 dans les examens de l'Université de Dublin.)

221. Si x, y, z sont les côtés d'un carré inscrit dans un triangle dont les côtés sont a, b, c, on a la relation

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} - 1\right)^2 = 4\left(\frac{bc}{yz} + \frac{ca}{zx} + \frac{ab}{xy}\right).$$

222. Mener par un point trois droites de longueurs données, telles que leurs extrémités soient les sommets d'un triangle équilatéral.

223. Les six axes radicaux des quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle pris deux à deux sont les bissectrices des angles du triangle formé en joignant les milieux des côtés.

224. Construire un triangle rectangle connaissant les côtés des deux carrés inscrits.

225. Trouver le plus grand des triangles inscrits dans un cercle donné pour lesquels la différence de deux angles est constante.

RECHERCHE DES FACTEURS COMMENSURABLES

DE DEGRÉ QUELCONQUE D'UNE ÉQUATION

Par M. **G. de Longchamps,** professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

(*Suite* et *fin*, voir page 41 et suiv.).

---

4. — Nous nous proposons maintenant d'appliquer les idées précédentes à la détermination des *facteurs commensurables du second degré.* On sait que si a et b désignent des nombres commensurables, *positifs* ou *négatifs*, $\sqrt{b}$, étant incommensurable, une équation n'admet pas la racine $(a + \sqrt{b})$ sans admettre par cela même la racine $(a - \sqrt{b}$. Dans ces conditions, qui sont très générales, puisqu'elles correspondent aux racines imaginaires $\alpha + \beta i$, quand α et β sont commensurables, ou même seulement α et β^2, l'équation admet des facteurs commensurables du second degré qu'on peut se proposer de déterminer *exactement.*

Posons $$y = x^2 - px;$$
on en tire successivement :

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} x^2 &= y + px,\\ x^3 &= py + (y + p^2)x,\\ x^4 &= (y + p^2)y + (2py + p^3)x,\\ x^5 &= (2py + p^3)y + (y^2 + 3p^2y + p^4)x,\\ x^6 &= (y^2 + 3p^2y + p^4)y + (3py^2 + 4p^3y + p^5)x,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Posons généralement
$$x^k = S_k y + T_k x \qquad (1)$$
S_k, T_k désignant des polynômes entiers en y et p, que nous nous proposons de déterminer. De l'égalité (1), on déduit
$$x^{k+1} = xyS_k + (y + px)T_k)$$
ou
$$x^{k+1} = yT_k + x(yS_k + pT_k);$$

par conséquent $S_{k+1} = T_k$; (2)

$T_{k+1} = yS_k + pT_k$; (3)

on en déduit $S_{k+2} - pS_{k+1} - yS_k = 0$ (4)

qui lie trois fonctions S consécutives et permet de les calculer *successivement*, quand on a déterminé les deux premières, qui sont d'ailleurs $S_2 = 1$; $S_3 = p$.

L'égalité (2) prouve de plus que la fonction T est connue quand on a calculé la fonction S d'indice immédiatement supérieur. On peut dire encore, si l'on préfère, que x^{k-1} est donné par la formule

$$x^{k-1} = yS_{k-1} + xS_k.$$

5\. — Nous allons chercher l'expression algébrique de S_k. Posons, d'après l'observation à laquelle donnent lieu les formules (α),

$$S_k = p^{k-2} + A_k^1 p^{k-4} y + A_k^2 p^{k-6} y^2 + \ldots$$

le second membre représentant une suite nécessairement finie dont le dernier terme est

$$y^{\frac{k-2}{2}} \text{ quand } k \text{ est pair,}$$

$$A_k^{\frac{k-3}{2}} p y^{\frac{k-3}{2}} \text{ quand } k \text{ est impair.}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients.

L'égalité (4), qui est fondamentale dans ce calcul, donne

$$A_k^1, A_k^2, \ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_{k+2}^1 = 1 + A_{k+1}^1 \\ A_{k+2}^2 = A_k^1 + A_{k+1}^2 \\ A_{k+2}^3 = A_k^2 + A_{k+1}^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \quad (5)$$

il suffit d'écrire qu les coefficients de $p^{k-2}y$, $p^{k-4}y^2$, $p^{k-6}y^3$, ... sont nuls, là comme dans toutes les identités.

Occupons-nous d'abord de la première, elle donne successivement

$$A_{k+2}^1 = 1 + A_{k+1}^1$$

$$A_{k+1}^1 = 1 + A_k^1$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$A_5^1 = 1 + A_4^1$$

Ajoutons et remarquons que, d'après la troisième égalité (α)

$A_4^1 = 1$, et on aura $A_{k+2}^1 = K - 1$,

ou si l'on préfère, $A_k^1 = K - 3$ (6)

Considérons maintenant la seconde des égalités (5), elle donne $A_{k+2} = A_k^1 + A_{k-1} + \ldots + A_4^1 + A_5^2$,

ou, d'après (6) et en remarquant que $A_5^2 = 0$,

$$A_{k+2}^2 = \frac{(K-2)(K-3)}{2}.$$

ou encore
$$A_k^2 = \frac{(K-4)(K-5)}{1.2}. \qquad (7)$$

6. — Pour terminer ce calcul nous nous servirons d'une identité due à M. *Haton* (*) ; nous devons dire d'ailleurs que la démonstration de cette identité est des plus élémentaires ; elle s'établit comme dans beaucoup d'autres cas analogues : 1° en vérifiant qu'elle est vraie pour $n = 1$; 2° en reconnaissant que, si elle est établie pour une certaine valeur de n, elle subsiste pour la valeur $(n + 1)$.

L'identité en question est

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n) + (m+1)(m+2)\ldots(m+n+1) + \ldots + (p-n)(p-n+1)\ldots(p-1)p$$
$$= \frac{(p+1)p\ldots(p-n) - (m+n)\ldots m(m-1)}{n+2} \qquad (8)$$

Se reportant à la troisième des égalités (5), se servant de l'identité précédente dans laquelle on supposera

$$m = 1 \quad n = 1 \quad p = k - 4,$$

on trouve, par un calcul identique à celui que nous venons de faire tout à l'heure et à deux reprises différentes,

$$A_{k+2}^3 = \frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{1.2.3},$$

ou,
$$A_k^3 = \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3};$$

et ainsi de suite; la loi des coefficients devient évidente et sa généralisation se fait sans peine, grâce à l'identité de M. Haton, et l'on peut écrire

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, *1872*, p. 476.

$$S_k = p^{k-2} + (k-3)p^{k-4}y + \frac{(k-4)(k-5)}{1.2}p^{k-6}y^2$$
$$+ \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3}p^{k-8}y^3 + \ldots \qquad (9)$$

le second membre est une suite nécessairement finie renfermant $\frac{k}{2}$ termes si k est pair, et $\frac{k-1}{2}$ si k est impair.

7. — Nous ferons remarquer, en terminant, qu'on peut déduire des calculs précédents une conséquence qui est peut-être nouvelle et qui ne nous paraît pas sans intérêt. Nous voulons parler des *conditions de divisibilité d'un polynôme entier de degré quelconque,*

$$f(x) = x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

par un trinôme du second degré,

$$x^2 - px - q.$$

S_k désignant la fonction que nous avons calculée, la formule
$$x^{k-1} = yS_{k-1} + S_k$$
donne
$$x^m = yS_m + xS_{m+1}$$
$$x^{m-1} = yS_{m-1} + xS_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^2 = yS_2 + xS_3$$
on aura donc :
$$f(x) = [yS_m + A_1yS_{m-1} + \ldots + A_{m-2}yS_2 + A_m]$$
$$+ x[S_{m+1} + A_1S_m + \ldots + A_{m-2}S_3 + A_{m-1}] \quad (10)$$
$f(x)$ s'annule pour les deux racines de l'équation
$$x^2 - px - q = 0$$
et pour *l'une et l'autre de ces deux racines*, la fonction $(x^2 - px)$, ou y, prend la même valeur q, par conséquent les deux parenthèses de l'égalité (10), elles aussi, conservent dans ces deux cas la même valeur, et une équation du premier degré
$$Px + Q = 0$$
ne peut s'annuler pour *deux valeurs différentes de* x, si l'on n'a pas
$$P = 0 \quad Q = 0.$$
Concluons donc,

Théorème. — *Le polynôme*
$$x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$$
est divisible exactement par le trinôme
$$x^2 - px - q$$

quand on a,

$$S_m + A_1 S_{m-1} + \dots + A_{m-2} S_2 + \frac{A_m}{q} = 0$$

et, $S_{m+1} + A_1 S_m + \dots + A_{m-2} S_3 + A_{m-1} = 0,$

les fonctions S *étant données par la formule*

$$S_k = p^{k-2} + (k-3)\, p^{k-4} q + \frac{(k-4)(k-5)}{1.2} p^{k-6} q^2 + \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3} p^{k-8} q^3 + \dots$$

et satisfaisant aussi à l'égalité,

$$S_{k-2} - p\, S_{k-1} - q\, S_k = 0,$$

avec les conditions initiales

$$S_2 = 1 \quad S_3 = p.$$

RECHERCHES
SUR LES
COURBES PLANES DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **J. Collin**, ancien élève de l'Ecole polytechnique,
Professeur de Mathématiques.

Nous nous proposons de trouver un moyen pour construire facilement par points toutes les *courbes planes du troisième degré qui ont au moins une asymptote à distance finie.*

Dans ce but, nous considérerons successivement celles qui ont un point singulier et celles qui en sont dépourvues. Nous ferons d'ailleurs complète abstraction des cas particuliers où les équations générales ne représentent plus réellement une courbe du troisième degré, mais simplement l'ensemble d'une droite et d'une conique ou de trois droites.

Courbes à point singulier.

Rapportées au point singulier, ces courbes sont représentées par une équation de l'une des formes suivantes :

$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x) = Ay^2 + Bxy + Cx^2$ (1,). o Asympt. à l'infini.

$(y - mx)^2 (y - m''x) = Ay^2 + Bxy + Cx^2$ (2,). 2 Asympt. à l'infini.

Du reste, dans les courbes (1_3), parmi les trois directions asymptotiques, il peut y en avoir soit 3 réelles, soit 2 imaginaires m et m', et 1 réelle m''.

Théorème I. — *Toute courbe, à point singulier, ayant au moins une asymptote à distance finie, peut être mise sous la forme mi-décomposée :*

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{d''}{y - m''x}$$

où $m' = m$, *s'il s'agit d'une courbe* (2_3).

Ce n'est qu'une application de la théorie de la décomposition des fractions rationnelles.

Remarque. — Si m et m' sont réels et inégaux, on pourra mettre la courbe sous la forme annoncée, de trois manières différentes; on pourra aussi continuer la décomposition et arriver à la forme la plus simple :

$$1 = \frac{d}{y - mx} + \frac{d'}{y - m'x} + \frac{d''}{y - m''x}.$$

Théorème II. — *Toute courbe, à point singulier, ayant au moins une asymptote à distance finie, peut se construire par points à l'aide d'une conique et d'une droite fixes.*

En effet, si nous supposons cette courbe mise sous la forme indiquée par le théorème précédent, que nous passions aux coordonnées polaires, et que nous posions

$$\rho_1 = \frac{a \cos \omega + b \sin \omega}{(\sin \omega - m.\cos \omega)(\sin \omega - m'.\cos \omega)}$$

et $\rho_2 = \dfrac{d''}{\sin\omega - m''\cos\omega}$,

nous aurons

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

De là la construction suivante :

On construira d'abord les éléments nécessaires de la *conique directrice*

$$(y - mx)(y - m'x) = ax + by,$$

qui passe par l'origine et qui a pour asymptotes les asymptotes de direction m et m' de la courbe elle-même ; puis la droite *asymptote directrice* $y - m''x = d''$. Cela fait, par le point singulier O, on mènera autant de rayons OR que l'on voudra; on construira leurs points d'intersection respectifs M_1 et M_2 avec la conique et la droite directrices; l'on prendra $OM = OM_1 + OM_2$.
Les points M ainsi obtenus seront des points de la courbe.

Remarque I. — Dans le cas où la conique directrice est une ellipse, comme cela a lieu pour le *Folium de Descartes*, on pourra, si on le veut, considérer la courbe à construire comme la projection d'une autre courbe dont la conique directrice serait un cercle.

Remarque II. — Si la conique directrice est une hyperbole, la courbe peut se mettre sous la forme décomposée

$$1 = \frac{d}{y - mx} + \frac{d'}{y - m'x} + \frac{d''}{y - m''x}$$

c.-à-d. $$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$$

et ainsi, le triangle des asymptotes étant tracé, il suffit, pour avoir un point M de la courbe, de mener un rayon quelconque OR, marquer ses points d'intersection respectifs M_1, M_2, M_3, avec les asymptotes, et prendre

$$OM = OM_1 + OM_2 + OM_3.$$

Théorème III. — *La sous-normale en un point* M *de la courbe est égale à la somme algébrique des sous-normales aux points correspondants* M_1 *et* M_2 *de la conique et de la droite directrices.*

En effet, de $\rho = \rho_1 + \rho_2$,
on déduit $\rho' = \rho'_1 + \rho'_2$.

Si la conique directrice est une hyperbole, on peut faire la même remarque que ci-dessus.

Sachant construire la sous-normale, on sait donc tracer la tangente.

Cette méthode, non seulement permet de déterminer graphiquement la courbe et d'une manière très simple; mais

elle en rend aussi évidemment la discussion très rapide; elle en fait apercevoir de suite la forme.

Le point où la courbe rencontre l'asymptote directrice se trouve sur la tangente en O à la conique directrice.

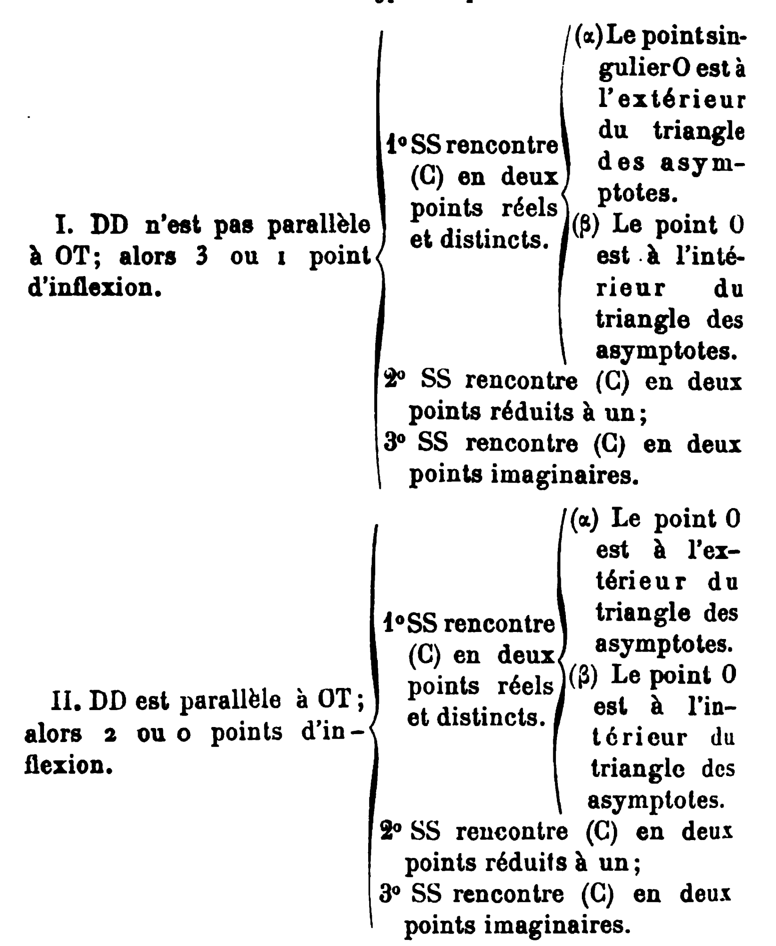
Les tangentes au point singulier O sont les rayons vecteurs nuls. Donc, pour les obtenir, on tracera la symétrique de l'asymptote directrice par rapport à O, et l'on déterminera les points d'intersection N_1 et N_2 de cette droite avec la conique; les rayons ON_1 et ON_2 seront les tangentes cherchées. Donc, suivant que cette symétrique rencontre la conique en deux points N_1 et N_2 réels et distincts, réels et confondus, ou imaginaires, le point singulier est un point double réel, un point de rebroussement, ou un point double isolé.

Cela posé, si nous convenons d'appeler *elliptiques*, *hyperboliques* ou *paraboliques* les courbes que nous étudions, suivant qu'elles ont pour conique directrice une ellipse, une hyperbole, ou une parabole; — et si nous désignons par DD l'asymptote directrice, SS sa symétrique par rapport à O, OT la tangente en O à la conique directrice (C), on peut établir la classification des courbes planes du troisième degré à point singulier, et ayant au moins une asymptote à distance finie, d'après les caractères suivants :

Courbes elliptiques.

I. DD n'est pas parallèle à OT; alors 3 ou 1 point d'inflexion.	1° SS rencontre (C) en deux points distincts; 2° SS rencontre (C) en deux points confondus; 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires;
II. DD est parallèle à OT; alors 2 ou 0 point d'inflexion.	1° SS rencontre (C) en deux points distincts; 2° SS rencontre (C) en deux points confondus; 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

Courbes hyperboliques.



I. DD n'est pas parallèle à OT; alors 3 ou 1 point d'inflexion.
- 1° SS rencontre (C) en deux points réels et distincts.
  - (α) Le point singulier O est à l'extérieur du triangle des asymptotes.
  - (β) Le point O est à l'intérieur du triangle des asymptotes.
- 2° SS rencontre (C) en deux points réduits à un;
- 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

II. DD est parallèle à OT; alors 2 ou 0 points d'inflexion.
- 1° SS rencontre (C) en deux points réels et distincts.
  - (α) Le point O est à l'extérieur du triangle des asymptotes.
  - (β) Le point O est à l'intérieur du triangle des asymptotes.
- 2° SS rencontre (C) en deux points réduits à un;
- 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

III. Le point O est centre de gravité du triangle des asymptotes.

On arrive du reste très facilement par l'analyse à cette même classification.

Courbes paraboliques.

I. DD n'est pas parallèle à OT. 1 ou 3 points d'inflexion.	1° SS rencontre (C) en deux points distincts; 2° SS rencontre (C) en deux points confondus; 3° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.
II. DD est parallèle à OT. 0 ou 2 points d'inflexion.	1° SS rencontre (C) en deux points distincts. 2° SS rencontre (C) en deux points imaginaires.

Il y a donc en tout 18 espèces de courbes du troisième degré à point singulier et ayant au moins une asymptote à distance finie.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE,

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir p. 35 et suiv.)

Pour appliquer immédiatement le théorème que nous venons d'établir, soit la forme quadratique binaire (c'est-à-dire à deux variables) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, qui forme l'ensemble des termes du deuxième degré dans l'équation générale des coniques.

L'invariant de cette forme (qui en est en même temps le discriminant, car nous reconnaîtrons plus tard que les formes quadratiques n'ont d'autre invariant que leur discriminant) est le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Si l'on fait dans la forme proposée la substitution linéaire $\begin{cases} x = ax' + by' \\ y = a'x' + b'y' \end{cases}$, on obtiendra une autre forme qua-

dratique binaire $A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2$, dont l'invariant sera $A'C' - B'^2$.

Or, d'après le théorème établi pages 39, 40 et 41, on aura :

$$A'C' - B'^2 = (AC - B^2)(ab' - ba')^2.$$

Il en résulte que le signe du discriminant (ou invariant) nouveau est le même que celui du premier.

Or, on sait que le signe de la quantité $AC - B^2$ définit le genre de la courbe représentée par l'équation générale de deuxième degré à deux variables; on retrouve donc ce résultat, évident *à priori* au point de vue géométrique, que le genre d'une conique est indépendant des axes auxquels elle est rapportée.

C'est là un premier exemple, remarquable en raison de sa simplicité même, de la connexité constante qui existe entre les propriétés purement algébriques des formes et les propriétés géométriques des figures dans les équations desquelles entrent ces formes.

— Soit de même la forme quadratique ternaire (c.-à-d. à trois variables) $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$, qui forme l'ensemble des termes du second degré dans l'équation générale des surfaces du second ordre.

Son invariant (ou déterminant) est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

si l'on fait dans la forme proposée la substitution linéaire

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}$$

ce qui, au point de vue géométrique, signifie que l'on rapporte la surface dans l'équation de laquelle entre la forme proposée à d'autres axes de coordonnées, on obtiendra une autre forme quadratique ternaire

$$A_1x'^2 + A'_1y'^2 + A''_1z'^2 + 2B_1y'z' + 2B'_1z'x' + 2B''_1x'y',$$

dont l'invariant est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B''_1 & B'_1 \\ B''_1 & A'_1 & B_1 \\ B'_1 & B_1 & A''_1 \end{vmatrix} = A_1A'_1A''_1 + 2B_1B'_1B''_1 - A_1B_1^2 - A'_1B'^2_1 - A''_1B''^2_1$$

et d'après le théorème fondamental, on a :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B''_1 & B'_1 \\ B''_1 & A'_1 & B_1 \\ B'_1 & B_1 & A''_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$$

Le signe du nouveau discriminant est donc le même que celui du premier.

Or, on sait que ce signe fixe la variété à laquelle appartient le cône représenté par l'équation $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$, variété qui est d'ailleurs intimement liée à la nature même de la surface représentée par l'équation générale du second ordre à trois variables ; on retrouve donc encore ici l'explication purement algébrique d'un fait géométrique évident *à priori*.

— Reprenons la relation

$$A'C' - B'^2 = (AC - B^2)(ab' - ba')^2.$$

On sait que, dans un changement de coordonnées obliques, on a

$$a = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, b = \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}, a' = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}, b' = \frac{\sin\alpha'}{\sin\theta}$$

par suite

$$ab' - ba' = \frac{\sin(\theta - \alpha)\sin\alpha' - \sin(\theta - \alpha')\sin\alpha}{\sin^2\theta},$$

ou $$ab' - ba' = \frac{\sin\alpha'\sin\theta\cos\alpha - \sin\theta\cos\alpha'\sin}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin\theta}.$$

Or $\alpha' - \alpha$ est l'angle θ' que font entre eux les nouveaux axes ; on a donc

$$A'C' - B'^2 = (AC - B^2).\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta},$$

d'où résulte la relation remarquable

$$\frac{A'C' - B'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{AC - B^2}{\sin^2\theta}$$

qui exprime que la quantité $\frac{AC - B^2}{\sin^2\theta}$ est indépendante du choix des axes de coordonnées, c'est-à-dire conserve une valeur constante dans tous les systèmes.

— Si nous considérons la forme quadratique ternaire

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

obtenue en rétablissant l'homogénéité dans le polynôme général du deuxième degré à deux variables au moyen de la variable apparente $z = 1$, on obtiendra une autre forme analogue

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x'z' + 2E'y'z' + F'z'^2$$

au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{cases} x = ax' + by' + cz' \\ y = a'x' + b'y' + c'z' \\ z = a''x' + b''y' + c''z' \end{cases}$$

et nous savons qu'on a, en vertu du théorème fondamental :

$$\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$$

Or la substitution considérée revient à un changement général de coordonnées planes, si l'on pose

$a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$, et si l'on suppose $z' = 1$.

Dans ce cas, le déterminant de la substitution (auquel on donne aussi le nom de *module de la transformation*) se réduit à

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (ab' - ba') = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}.$$

D'où résulte la relation remarquable

$$\frac{F\ (AC - B^2) + 2BDE - AE^2 - CD^2}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{F'\ (A'C' - B'^2) + 2B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2}{\sin^2\theta'},$$

qui exprime que le quotient de la quantité connue en géométrie analytique sous le nom de Δ, par le carré du sinus de l'angle des coordonnées, a une valeur indépendante du choix des axes.

Or, on sait que le signe de la quantité Δ fixe la variété à laquelle appartient la conique représentée par l'équation générale du second ordre; au point de vue géométrique, on sait donc *à priori* que ce signe ne peut dépendre du choix des axes; mais nous avons en même temps reconnu

algébriquement quelque chose de plus, à savoir que non seulement le signe de Δ ne peut changer, mais que la valeur même de $\frac{\Delta}{\sin^2 \theta}$ est constante dans tous les systèmes.

— Nous pourrions rappeler ici les applications de l'important théorème démontré dans notre premier article, et nous en trouverions de nombreux exemples dans l'étude des coordonnées trilinéaires; mais nous sommes forcés d'abréger, pour passer en revue d'autres propriétés des formes quadratiques, et nous nous bornerons pour le moment à engager les lecteurs à pousser d'eux-mêmes plus avant dans cet ordre d'idées.

— Soit une forme quadratique à trois variables décomposée en somme de carrés.

$$F = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2$$

son invariant sera, d'après la définition donnée précédemment :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' & \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' & \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 \end{vmatrix}$$

On voit qu'il est égal au carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

formé avec les coefficients des fonctions linéaires entrant sous les carrés.

— Si l'on a, dans la décomposition, un ou plusieurs carrés précédés du signe —, on remplacera, dans le calcul précédent, les coefficients des variables sous ces carrés par leurs produits par $\sqrt{-1}$; c'est ainsi que l'invariant de la forme

$$F = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2$$

sera le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'\sqrt{-1} & \beta'\sqrt{-1} & \gamma'\sqrt{-1} \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

— Si la forme quadratique considérée est la somme de $n-p$ carrés dépendant de n variables, son invariant sera nul, comme ayant un certain nombre de lignes nulles.

Soit, par exemple, $F = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2$ son invariant sera, d'après ce qui précède, le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et sera, par suite, nul.

— D'une manière générale, il est facile de voir que *pour que le nombre des carrés obtenus en décomposant une forme quadratique en somme de carrés, soit précisément égal au nombre des variables, il faut et il suffit que l'invariant de cette forme soit différent de zéro.*

1° La condition est nécessaire; car si l'on considère n carrés de n fonctions linéaires distinctes, l'invariant est égal au carré du déterminant formé avec les coefficients des fonctions sous les carrés, et comme ces fonctions sont supposées distinctes, leur déterminant est différent de zéro : il en est donc de même de son carré;

2° Elle est suffisante; car si Δ est $\gtrless 0$, la décomposition donnera un nombre de carrés précisément égal au nombre des variables, puisque, si l'on pouvait obtenir moins de carrés que de variables, il faudrait que Δ fût nul, en vertu de la remarque faite plus haut.

— *Application à une question d'examen.* — *La condition pour qu'un polynôme homogène du deuxième degré à trois variables, ou, en d'autres termes, pour qu'une forme quadratique ternaire soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires est que l'invariant de cette forme soit nul.*

En effet, un produit de deux facteurs linéaires est une somme ou une différence de deux carrés, suivant que les coefficients de ces facteurs sont réels ou imaginaires; car on a : $P^2 + Q^2 = (P + Q\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1})$
et $P^2 - Q^2 = (P + Q)(P - Q)$.

Or nous venons de démontrer que pour qu'une forme

quadratique se réduise à une somme d'un nombre de carrés moindre que le nombre des variables, il faut que l'invariant de cette forme soit nul.

— En rendant homogène le polynôme général du deuxième degré à deux variables, on voit par conséquent que pour que l'équation générale du deuxième degré à deux variables représente deux droites, il faut qu'on ait :

$$AE^2 + CD^2 - 2BDE + F(B^2 - AC) = 0.$$

En effet, le polynôme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

devient par le rétablissement de l'homogénéité ($t = 1$) :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2.$$

C'est là une forme quadratique ternaire dont l'invariant est :

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

et cet invariant développé donne la condition énoncée.

Il résulte également des mêmes considérations que, pour que la forme quadratique ternaire entrant dans l'équation générale des surfaces du deuxième ordre se décompose en un produit de deux facteurs linéaires, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire que les surfaces considérées n'aient pas un centre unique.

De la forme adjointe. (Gauss.) — Prenons encore pour exemple une forme ternaire, c'est-à-dire à trois variables, et soit :

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3$$

On aura $\frac{1}{2} f_{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$

$$\frac{1}{2} f_{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$\frac{1}{2} f_{x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Appelons X_1, X_2, X_3 ces trois fonctions linéaires; nous

aurons trois équations du premier degré d'où nous pouvons tirer, en supposant $\Delta \lessgtr 0$, les valeurs de x_1, x_2, x_3, en fonction de X_1, X_2, X_3. Si nous reportons ces valeurs dans la fonction f, elle prendra la forme $\frac{F}{\Delta}$, F étant une fonction homogène et du deuxième degré dépendant de X_1, X_2, X_3; c'est cette fonction qu'on appelle la forme adjointe de la forme donnée f. Sa formation est simple; car, en vertu du théorème d'Euler, on a :

$$x_1 f'x_1 + x_2 f'x_2 + x_3 f'x_3 = 2f(x_1, x_2, x_3)$$

c.-à-d. $\quad X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = f$

et en remplaçant dans cette expression x_1, x_2, x_3 par leurs valeurs en X_1, X_2, X_3, on a bien $f = \frac{F}{\Delta}$.

— Il est facile de voir, et nous laisserons au lecteur le soin de le reconnaître lui-même, que cette définition s'applique sans modifications à une forme quadratique renfermant un nombre quelconque de variables. Il en est d'ailleurs de même des considérations qui vont suivre.

— *Propriété fondamentale de la forme adjointe.* — Soit, comme précédemment, la forme $f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$. Considérons la forme $\varphi = \theta f - (x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3)^2$, où X_1, X_2, X_3 sont les fonctions définies plus haut; nous allons établir que, *si l'on prend l'invariant de* φ, *cet invariant contiendra* θ^2 *en facteur, et que ce facteur étant supprimé, si l'on égale ce qui reste à zéro, on aura la relation* $\theta = \frac{F}{\Delta}$, *dans laquelle* F *désigne la forme adjointe de* f, *et* Δ *l'invariant de* f.

En effet, nous avons vu qu'on a :

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = X_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = X_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = X_3 \end{cases}$$

Or posons $\theta = x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3$; le calcul dont il s'agit revient à l'élimination de x_1, x_2, x_3 entre cette dernière équation et les relations (1). Le résultat de cette élimination s'obtiendra en rendant les équations homogènes, et

égalant à zéro le déterminant des coefficients des indéterminées. Pour cela, multiplions les trois premières par la dernière ; il vient :

$$\theta\,(a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3) - X_1\,(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3) = 0$$
$$\theta\,(a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3) - X_2\,(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3) = 0$$
$$\theta\,(a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3) - X_3\,(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3) = 0$$

Le déterminant des coefficients de x_1, x_2, x_3 égalé à zéro est le résultat de l'élimination. Or, ce déterminant est le suivant :

$$(P)\qquad \begin{vmatrix} \theta a_{11} - X_1^2 & \theta a_{12} - X_1X_2 & \theta a_{13} - X_1X_3 \\ \theta a_{21} - X_1X_2 & \theta a_{22} - X_2^2 & \theta a_{23} - X_2X_3 \\ \theta a_{31} - X_1X_3 & \theta a_{32} - X_2X_3 & \theta a_{33} - X_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

Il est facile de voir que ce déterminant, qui n'est autre que l'invariant de φ, est décomposable en une somme de 2^3 déterminants obtenus en prenant les termes de toutes les manières possibles.

On a d'abord le déterminant formé des premiers termes des premières colonnes

$$\begin{vmatrix} \theta a_{11} & \theta a_{12} & \theta a_{13} \\ \theta a_{21} & \theta a_{22} & \theta a_{23} \\ \theta a_{31} & \theta a_{32} & \theta a_{33} \end{vmatrix}$$

qui contient θ^3 en facteur devant l'invariant Δ de la forme f elle-même.

On a ensuite le déterminant formé avec les seconds termes de la première colonne et les premiers termes des autres

$$\begin{vmatrix} X_1^2 & \theta a_{12} & \theta a_{13} \\ X_1X_2 & \theta a_{22} & \theta a_{23} \\ X_1X_3 & \theta a_{32} & \theta a_{33} \end{vmatrix}$$

lequel contient θ^2 en facteur.

Il y a deux autres déterminants analogues à celui-là ; quant aux quatre autres, ils sont nuls, comme contenant chacun deux colonnes identiques.

En effet, prenons par exemple le déterminant formé par les seconds termes des deux premières colonnes et les premiers de la troisième ; il sera

$$\begin{vmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & \theta a_{13} \\ X_1X_2 & X_2^2 & \theta a_{23} \\ X_1X_3 & X_2X_3 & \theta a_{33} \end{vmatrix} = X_1X_2 \begin{vmatrix} X_1 & X_1 & \theta a_{13} \\ X_2 & X_2 & \theta a_{23} \\ X_3 & X_3 & \theta a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (P) = o se réduit donc à la suivante :

$$\theta^2(\theta\Delta - F) = o \qquad \text{d'où } \theta = \frac{F}{\Delta}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(A suivre.)

NOTE SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Par M. H. Laurent, répétiteur à l'École Polytechnique.

Il est souvent difficile en analyse de s'affranchir des considérations géométriques ; au point de vue philosophique il y a un vice de forme : on conçoit en effet que les vérités de l'algèbre soient indépendantes des propriétés de l'étendue.

La trigonométrie, telle qu'on l'enseigne, et telle qu'elle doit être enseignée (car on ne doit jamais cacher les méthodes d'invention), a l'inconvénient de reposer sur tous les postulata de la géométrie, et en particulier sur le postulatum d'Euclide. Il est facile de refaire la trigonométrie à un point de vue purement algébrique et de l'affranchir de toute considération géométrique ; c'est ce que nous allons faire.

1° *De l'exponentielle.* — Nous poserons

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad (1)$$

la fonction e^x sera alors finie et continue pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires, de x. On aura d'ailleurs

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \dots \frac{y^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad (2)$$

en multipliant les formules (1) et (2) membre à membre on a :

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} \dots$$

$$\dots + \left(\frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \frac{y}{1} + \dots\right) + \dots$$

ou bien $$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}y^2 \ldots\right] + \ldots$$

ou enfin
$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \ldots \frac{(x+y)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots = e^{x+y}$$

Ainsi se trouve établie la propriété fondamentale de l'exponentielle, et au besoin sa continuité ; car si y est très petit, e^y est voisin de l'unité, et $e^{x+y} = e^x e^y$ est très voisin de e^x. Les autres propriétés de l'exponentielle se déduisent de là.

2° *Sinus et cosinus.* — On posera comme définition :
$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad \sin x =; \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad (3)$$

ou ce qui revient au même
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots \quad (4)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots \quad (5)$$

et on en conclura d'ailleurs
$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \quad (6)$$

3° *Formules d'addition.* — Si dans les formules
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (7)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (8)$$

on remplace $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$, $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ par leurs valeurs tirées de (3), on constate qu'elles se réduisent à des identités, ces formules (7) et (8) sont donc exactes.

4° *Autres formules fondamentales.* — Les formules (4) et (5) donnent $\sin 0 = 0$, $Lim \frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$ et $\cos 0 = 1$, $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = +\cos x$; si donc on fait $x = y$ dans la formule (8) on a :
$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x. \quad (9)$$

5° *Racines réelles de sin* x = o, *cos* x = o. Soient $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi'}{2}$ deux racines de cos x = o comprises entre 1 et 2 ; s'il peut en exister plus d'une, il y aura nécessairement entre ces limites un nombre fini de racines; sans quoi il y aurait des racines de cos x = o infiniment voisines l'une de l'autre. Supposons donc $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi'}{2}$ très petit ; d'après la formule (7) on aura : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi'}{2}\right) = o$ et $\frac{\pi - \pi'}{2}$ sera racine de sin x = o ; appelons cette quantité α : en vertu de (7), si l'on fait $x = \alpha$, $y = \alpha$, on aura sin 2α = o, on aurait de même sin 3α = o . . . or ceci est absurde ; car

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

or la quantité entre parenthèses ne s'annule pas pour des valeurs de x moindres que l'unité, car pour $x < 1$ la série

$$\frac{x^2}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2....7} - \ldots$$

est moindre que $\frac{1}{6}$; sin x ne saurait donc l'annuler pour de très petites valeurs α, 2α, . . . de x ; donc enfin cos x n'a qu'un nombre limité de racines comprises entre 1 et 2 ; $\frac{\pi}{2}$ sera la plus petite de toutes ; on voit aussi que la différence de deux racines est au moins égale à un.

6° *Périodicité, suite de la recherche des racines.* — Les formules (7), (8) donnent :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad (10)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x \quad (11)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (12)$$

Donc sin x et cos x ont pour période 2π. Les formules (11) montrent que sin x s'annule pour $x = o, \pm\pi, \pm 2\pi$, etc., et cos x pour $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$, etc ; sin x = o, cos x = o n'ont pas d'autres racines, car si

cos $= 0$ avait une racine comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π, à savoir $\frac{\pi'}{2}$, $\pi - \frac{\pi'}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi'}{2}$ seraient racines de $\sin x = 0$; or l'une de ces différences est au plus égale à 1, puisque $\frac{\pi}{2} < 2$, et nous avons vu que $\sin x$ n'a pas de racines entre 0 et 1.

7° *Racines imaginaires.* — $e^{x+y\sqrt{-1}}$ est égal à e^x (cos y $+ \sqrt{-1}$ sin y), donc $e^z = 0$ n'a pas de racines finies, car cos y et sin y ne peuvent être nuls à la fois en vertu de (9). Pour que cos $z = 0$, il faut que en vertu de (3) on ait

$$e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{2z\sqrt{-1}} + 1 = 0$$

ou en remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$

$$e^{2x\sqrt{-1} - 2y} = -1$$

ou enfin $\cos 2x + \sqrt{-1} \sin 2x = -e^{2y}$.

Cette équation exige que $\sin 2x = 0$; donc $\cos 2x = \pm 1 = -e^{2y}$; donc $y = 0$, donc z ne saurait être imaginaire si $\cos x = 0$; on verrait de même que $\sin x = 0$ n'a pas de racines imaginaires.

8° *Variations de sin* x *et cos* x. — Si l'on suppose y très petit, les formules (7), (8) montrent que $\sin x$ croît ou décroît suivant que $\cos x$ est positif ou négatif; en effet la formule (7) peut s'écrire

$$\sin(x + y) = \sin x\left(1 - \frac{y^2}{2}\ldots\right) + \cos x\left(y - \frac{y^3}{1.2.3}\ldots\right)$$

le terme qui donne son signe à la partie qui dépend de y, c'est-à-dire à l'accroissement de $\sin x$, est $y \cos x$; donc, etc... On verrait de même que $\cos x$ croît ou décroît suivant que $\sin x$ est négatif ou positif; donc, etc.

9° *Calcul de* π. — $\frac{\pi}{2}$ est compris entre 1 et 2 d'après ce que l'on a vu; en substituant entre 1 et 2 des moyens, on conçoit que l'étude des signes que prendra $\cos x$ permettra de resserrer les limites entre lesquelles reste compris $\frac{\pi}{2}$.

10° *Conclusion.* — Toutes les formules de la trigonométrie analytique se déduisent des propriétés que nous venons d'établir; ces propriétés sont donc indépendantes du postulatum d'Euclide et même de toute notion sur les propriétés de la ligne droite. Une construction de tables de sinus et de cosinus conduira d'ailleurs au calcul de $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est 1. La théorie que nous venons de faire était utile pour la perfection même de la science; malheureusement elle ne dispense pas de refaire la théorie géométrique du sinus et du cosinus : car il reste à calculer les lignes qui sont les coordonnées d'un point quelconque du cercle, ce que l'on ne peut faire qu'en démontrant que les propriétés de ces lignes sont précisément celles du sinus et du cosinus.

SUR LA SOMME

DES PUISSANCES SEMBLABLES DES *n* PREMIERS NOMBRES

Par M. **de Longchamps**

M. G. Dostor a donné récemment dans ce journal une méthode élémentaire pour calculer la somme des carrés, des cubes, ... des *n* premiers nombres. Le procédé employé par ce géomètre est certainement ingénieux; mais, peut-être, peut-on lui reprocher d'exiger pour le calcul des quantités S_2, S_3, ... un artifice qui varie avec chacune d'elles. On peut, comme nous allons le montrer ici, et comme nous l'enseignons depuis plusieurs années, lier par une relation simple la somme des puissances *p* des *n* premiers nombres, somme que nous représenterons par S_n^p aux quantités de *même espece,* mais qu'on pourrait nommer d'*ordre inférieur;* nous entendons par là les fonctions

$$S_{n-1}^p,\ S_{n-1}^p \dots$$

ou encore $\quad S_p^{n-1},\ S_p^{n-1}$

Nous montrerons ensuite comment de cette relation on peut déduire de proche en proche S_n^2, S_n^3 . . . . comme on le fait dans les cours de mathématiques spéciales, lorsqu'on a établi la formule qui donne la somme des puissances p des termes d'une progression arithmétique en fonction des quantités de même espèce mais d'ordre inférieur. Cette dernière formule exige, comme l'on sait, la connaissance du binôme de Newton; la méthode que nous allons donner est au contraire intuitive; elle n'a d'autre base que l'évidence même.

1. — Disposons dans un carré dont les côtés ont été partagés en n parties égales, et comme nous l'avons fait ailleurs (*), les nombres,

$$1^p,\ 2^p,\ \ldots\ldots\ n^p$$

Ce qui donne le tableau suivant:

1^p	2^p	3^p	. . . .	n^p	A
1^p	2^p	3^p			
1^p	2^p	3^p	. . . .	n^p	
1^p	2^p	. . . .		n^p	
C					B

La somme totale des nombres renfermés dans ce tableau est évidemment: $n\ S_n^p$. Comptons maintenant ces mêmes nombres en suivant l'ordre indiqué par le trait ABC; la colonne AB donne $n\ .\ n^p = n^{p+1}$, puis dans la ligne BC on trouve encore:

$$1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p = S^p_{n-1}.$$

La tranche brisée ABC renferme donc finalement n^{p+1} $+ S^p_{n-1}$; appliquant cette remarque aux tranches brisées successives, jusqu'à la dernière qui est formée par 1^p , qu'on peut écrire 1^{p+1}, on a l'*identité:*

$$\text{(A)}\qquad n\ S_n^p = S_n^p + \ + S^p_{n-1} + S^p_{n-2} + \ldots + S^p_1;$$

c'est la relation annoncée.

2. — Nous allons maintenant montrer comment de cette

(*) Mémoire sur les nombres de Bernoullli (*Annales de l'école normale supérieure, 1879*).

relation on peut tirer successivement S_n^2, S_n^3,....; dans ce but nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *La somme* S_n^p, *est une fonction entière et de degré* (p + 1), *en* n; *mais ne renfermant pas de constante.*

On sait que $S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

Ce qui vérifie la proposition pour $p = 1$. Nous allons, conformément au procédé connu, supposer que cette loi est vraie pour les quantités

$$S_n{}^1, S_n{}^2, \ldots \; S_n^p,$$

et nous ferons voir qu'elle subsiste pour la fonction supérieure S_n^{p+1}.

Posons donc $S_n^p = An^{p+1} + Bn^p + \ldots + Kn$,

on en tire $S_{n-1}^p = A(n-1)^{p+1} + B(n-1)^p \ldots + K(n-1)$

. . . .

$$S_1^p = A.1^{p+1} + B.1^p + \ldots + K.1;$$

d'où

$$S_1^p + S_2^p \ldots + S_n^p = AS_n^{p+1} + BS_n^p \ldots + KS_n^1.$$

D'autre part, la formule (A) peut s'écrire :

$$(n+1)\,S_n^p = S_n^{p+1} + [S_n^p + \ldots + S_1^p.$$

Par conséquent

$$\text{(B)}\quad (1+A)\,S_n^{p+1} = (n+1-B)\,S_n^p - CS_n^{p-1} + \ldots - KS_n^1.$$

3. — De cette identité on peut déduire plusieurs conséquences; et d'abord le théorème énoncé plus haut: car cette expression de S_n^{p+1}, et l'hypothèse qu'on a faite sur les fonctions S_n^p, $S_n^p \ldots S_1^n$, prouvent que S_n^{p+1} est bien : 1° une fonction entière de n; 2° une fonction de degré $(p+2)$; 3° qu'elle est dépourvue de constante. On peut aussi en déduire le théorème suivant.

Théorème. — *Dans le développement de* S_n^p, *suivant les puissances de* n, *le coefficient de* n^{p+1}, *est égal à* $\frac{1}{p+1}$.

La loi est vraie pour S_n^1; posons

$$S_n^p = A_n^{p+1} + \ldots$$

$$S_n^{p+1} = A'_n{}^{p+2} + B'_n{}^{p+1} + \ldots$$

on suppose, $A = \frac{1}{p + 1}$;

il faut démontrer que $A' = \frac{1}{p+2}$.

Or l'identité (B) donne, en égalant les coefficients de n^{p+2},

$$A' = \frac{A}{1 + A} \text{ d'où } A' = \frac{1}{p+2}.$$

4\. — Nous chercherons encore à déterminer le second coefficient du développement, celui de n^p.

Théorème. — *Dans le développement de* S_n^p, *le second coefficient, celui de* n^p, *est toujours égal à* $\frac{1}{2}$.

L'identité (B) peut s'écrire

$$\text{(C)}\quad \frac{p+2}{p+1} S_n^{p+1} = (n+1-B)\left(\frac{n^{p+1}}{p+1} + B\, n^p + \ldots\right)$$
$$- C S_n^{p-1} = \ldots - K S_n^1.$$

en égalant les coefficients de n^{p+1},

$$B' \frac{p+2}{p+1} = B + \frac{1 - B}{p+1};$$

d'où,
$$B' = \frac{Bp + 1}{p+2}.$$

Si $B = \frac{1}{2}$ on a $B' = \frac{1}{2}$.

Or dans S_1 $B = \frac{1}{2}$; donc la loi est générale.

5\. — La détermination des coefficients suivants ne peut se faire que par des considérations que nous avons développées dans le mémoire cité, mais qui sortiraient du cadre élémentaire de cette note. Nous donnerons seulement en terminant le calcul des premières formules S_n^2, S_n^3.

La relation (C), si l'on y fait $p = 1$, donne :

$$\frac{3}{2} S_n^2 = \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) S_n^1$$

ou,
$$3S_n^2 = (2n + 1) S_n^1$$

ou,
$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

L'hypothèse $p = 2$ donne :

$$\frac{4}{3} S_n^2 = \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) S_n^2 - \frac{1}{6} S_n^1,$$

et par des réductions évidentes

$$S_n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (S_n^1)^2;$$

et ainsi de suite. Nous croyons, en résumé, avoir résolu par une méthode simple et élémentaire le problème qui consiste à calculer de proche en proche les quantités S_n^2, S_n^3.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques spéciales.

(Toutes ces questions ont été proposées en 1879 dans les examens de l'Université de Dublin.)

226. Si l'on a la relation

$$(fl)^{\frac{1}{3}} + (gm)^{\frac{1}{3}} + (hn)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

les coniques

$$fyz + gzx + hxy = 0$$

$$\sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{xz} = 0$$

sont tangentes. Déterminer leur point de contact.

227. Trouver les racines communes aux équations du système

$$(\beta - \gamma)^3 (x - \alpha)^3 = (\gamma - \alpha)^3 (x - \beta)^3 = (\alpha - \beta)^3 (x - \gamma)^3.$$

228. Lieu du centre d'un triangle équilatéral dont les côtés passent par trois points donnés.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KOEHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 622-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 49 et suiv.)

XI. **Théorème.** — *Le cercle qui passe par les deux foyers et par le point de rencontre d'une tangente à l'ellipse et d'une parallèle au grand axe menée par l'une des extrémités du petit a pour tangente en ce dernier point la tangente considérée de l'ellipse.*

Soit *(fig. 6)* β l'angle que fait la tangente au point M avec l'axe focal de la courbe ; on a

$$PP' = NN' \cos\beta$$

or $$NN' = NM + MN' = \frac{MF + MF'}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\sin\alpha}$$

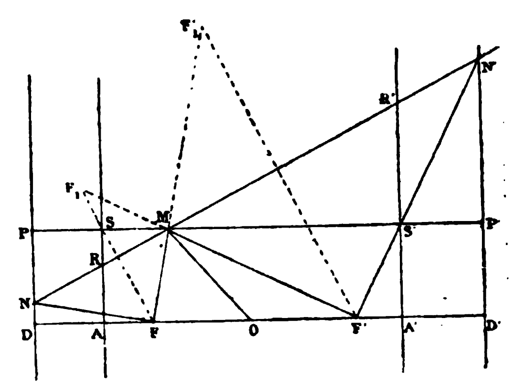


Fig. 6.

et comme $$PP' = \frac{2a^2}{c}$$

il en résulte que $$c\cos\beta = a\sin\alpha \qquad (1)$$

Ceci posé, soit *(fig. 7)* T le point où la tangente en un point M d'une ellipse rencontre le grand axe, OM le demi-

diamètre du point M; le triangle OMT donne

$$\frac{OM}{OT} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

γ étant toujours l'angle OMT; d'où

$$OT \sin \beta = OM \sin \gamma$$

et comme (VII) $\quad OM \sin \gamma = a \cos \alpha$

$$OT \sin \beta = a \cos \alpha \qquad (2)$$

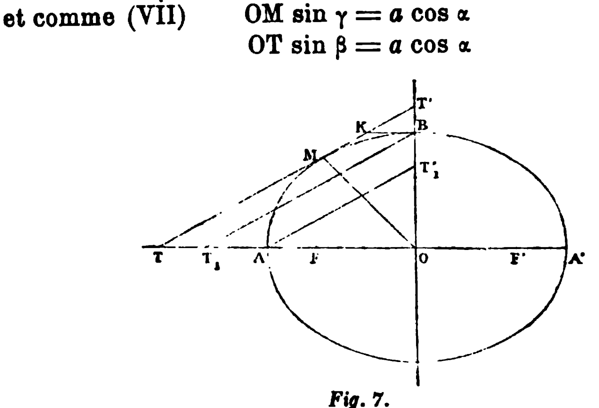


Fig. 7.

En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2), après les avoir élevées au carré, il vient

$$\overline{OT}^2 \sin^2 \beta + c^2 \cos^2 \beta = a^2$$

ou en remplaçant $\cos^2\beta$ par $1 - \sin^2 \beta$

$$(\overline{OT}^2 - c^2) \sin^2 \beta = a^2 - c^2 = b^2$$

ou enfin $\qquad (OT - c)(OT + c) = \dfrac{b^2}{\sin^2 \beta}$

Soit BT_1 parallèle à MT et BK parallèle au grand axe, il est facile de voir que $TK = BT_1 = \dfrac{b}{\sin \beta}$

et par suite $\qquad \overline{TK}^2 = TF \times TF'$

ce qui donne le théorème énoncé.

Remarque. — A l'autre extrémité B' correspond un second point K' et partant un second cercle tangent en K' à MT.

XII. **Théorème** — *La puissance du point* T (fig. 7) *par rapport au cercle décrit du point* O *comme centre avec* OT_1 *pour rayon, est constante et égale au carré du demi-grand axe, quel que soit le point* M.

On vient de voir (XI) que

$$\overline{OT}^2 = c^2 + \frac{b^2}{\sin^2 \beta}$$

ou en remplaçant c^2 par $a^2 - b^2$

$$\overline{OT}^2 = a^2 - b^2 + \frac{b^2}{\sin^2 \beta} = a^2 + b^2 \cot^2 \beta;$$

d'où l'on déduit

$$(OT - b \cot \beta)(OT + b \cot \beta) = a^2;$$

d'après la figure $\quad OT_1 = b \cot \beta$

donc $\quad (OT - OT_1)(OT + OT_1) = a^2. \qquad$ c. q. f. d.

XIII. **Théorème.** — *La droite qui joint un foyer d'une ellipse au point où une tangente rencontre le petit axe, est égale à la portion comprise entre les deux axes de la parallèle à cette tangente menée par une extrémité du grand axe.*

Le triangle OMT' *(fig. 7)* donne

$$\frac{OT'}{\sin \gamma} = \frac{OM}{\cos \beta};$$

d'où $\quad OT' \cos \beta = OM \sin \gamma = a \cos \alpha$

et comme (XI) $\quad c \cos \beta = a \sin \alpha,$

il vient en ajoutant les deux dernières expressions après les avoir élevées au carré,

$$\overline{OT}'^2 + c^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta}.$$

Soit AT'_1 une parallèle à MT, il est évident que

$$AT'_1 = \frac{a}{\cos \beta};$$

de plus $\quad \overline{FT}'^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OT}'^2 = c^2 + \overline{OT}'^2;$

donc $\quad FT' = AT'_1$

Remarque. — De ce théorème résulte une construction de la tangente parallèlement à une direction donnée ; par le sommet A on mènera AT'_1 parallèle à cette direction, on prendra $FT' = AT'_1$ et par le point T' on mènera une nouvelle parallèle à la direction donnée.

XIV. **Théorème.** — *La puissance du point* T' (fig. 7) *par rapport au cercle décrit du point* O *comme centre avec* OT'_1 *pour rayon est constante et égale au carré du demi-petit axe.*

On a, d'après le théorème précédent

$$\overline{OT'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2\beta} - c^2$$

ou, comme $c^2 = a^2 - b^2$,

$$\overline{OT'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2\beta} - a^2 + b^2 = b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2\beta$$

et comme, d'après la figure,

$$OT'_1 = a \operatorname{tg}\beta$$

on en conclut

$$(OT' - OT'_1)(OT' + OT'_1) = b^2. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

XV. **Théorème.** — *Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une ellipse est un cercle,*

Soient OQ et OQ' les distances du centre à deux tangentes rectangulaires, on a (XI)

$$\sin\alpha = \frac{c\cos\beta}{a};$$

d'où

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{c^2\cos^2\beta}{a^2}},$$

et par suite

$$OQ = a\cos\alpha = a\sqrt{1 - \frac{c^2\cos^2\beta}{a^2}}$$

β étant l'angle de la tangente correspondante avec le grand axe; l'angle de l'autre tangente avec la même direction sera complémentaire du premier et l'on aura

$$OQ' = a\sqrt{1 - \frac{c^2\sin^2\beta}{a^2}};$$

d'où, en additionnant après avoir élevé au carré

$$\overline{OQ}^2 + \overline{OQ'}^2 = a^2 + b^2$$

M étant le point considéré du lieu, on peut voir sans figure que

$$\overline{OM}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OQ'}^2 = a^2 + b^2$$

et que par suite le lieu cherché est un cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

XVI. — *Minimum de la portion d'une tangente comprise entre les axes.*

On a obtenu (XII et XIV) et en se reportant à la figure 8

$$\overline{OT}^2 = a^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta$$
$$\overline{OT'}^2 = b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \beta$$

et en ajoutant

$$\overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 = a^2 + b^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta + a^2 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Le premier membre de cette égalité représente $\overline{TT'}^2$ et le second sera minimum en même temps que la somme

$$b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta + a^2 \operatorname{tg}^2 \beta;$$

or le produit $b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta \times a^2 \operatorname{tg}^2 \beta$

est constant et égal à a^2b^2; donc le minimum aura lieu lorsque $a^2 \operatorname{tg}^2 \beta = b^2 \operatorname{cotg}^2 \beta$

ou lorsque $\operatorname{tg}^4 \beta = \frac{b^2}{a^2}$,

et comme tg β est une quantité réelle, on devra prendre

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{b}{a}, \operatorname{cotg}^2 \beta = \frac{a}{b}.$$

Alors la valeur de $\mathrm{TT'}^2$ sera

$$a^2 + b^2 + ab + ab = (a + b)^2$$

d'où $\mathrm{TT'} = a + b.$

Remarque. — De cette valeur de $\operatorname{tg}^2 \beta$, on déduit

$$\frac{\sin^2 \beta}{b} = \frac{\cos^2 \beta}{a} = \frac{1}{a+b},$$

d'où pour la distance du centre à cette tangente minima, en vertu de (XV),

$$\mathrm{OQ} = a\sqrt{1 - \frac{c^2 \cos^2 \beta}{a^2}} = \sqrt{ab}.$$

XVII. **Théorème.** — *Le carré construit sur une tangente est équivalent à la somme des carrés construits sur les parallèles à cette tangente menées par les extrémités des axes, ces trois droites étant limitées aux axes.*

En effet, de ce que (XI et XIII)

$$\overline{OT}^2 - c^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}$$
$$\overline{OT'}^2 + c^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta},$$

il vient, par addition

$$\overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \beta} + \frac{b^2}{\sin^2}$$

or, d'après la figure 8, on voit facilement que cette expression n'est autre que la suivante

$$\overline{TT'}^2 = \overline{AT'_1}^2 + \overline{BT_1}^2$$

qui donne l'énoncé.

Remarque. — Soient OQ′ perpendiculaire à AT'_1 *(fig. 7)*, OQ″ perpendiculaire à BT_1 on a, d'après la figure

$$OQ' = a \sin \beta$$
$$OQ'' = b \cos \beta,$$

d'où $\overline{OQ'}^2 + \overline{OQ''}^2 = a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta = a^2 - c^2 \cos^2\beta;$
or (XV) OQ désignant la distance du centre à la tangente TT′, on a $\overline{OQ}^2 = a^2 - c^2 \cos^2 6;$
donc $\overline{OQ}^2 = \overline{OQ'}^2 + \overline{OQ''}^2$

2° Propriétés de la normale.

La construction graphique de la normale dans les différents cas qui peuvent se présenter ayant été donnée dans le Journal (voir 3e année, p. 197), il est inutile d'y revenir.

XVIII. **Théorème.** — b *et* c *étant deux côtés d'un triangle faisant entre eux l'angle* A, *et* l *la longueur de la bissectrice intérieure de cet angle, on a*

$$l = \frac{2\,bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

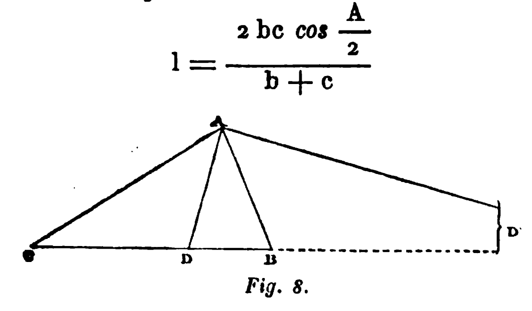


Fig. 8.

Soit *(fig. 8)* ABC le triangle considéré, AD la bissectrice intérieure de l'angle A ; la surface du triangle a pour expression d'une part $\frac{1}{2} bc \sin A$

et d'autre part, en considérant le triangle comme formé des deux triangles partiels ADC et ADB,

$$\frac{bl\sin\frac{A}{2}}{2}+\frac{cl\sin\frac{A}{2}}{2}=\frac{l(b+c)\sin\frac{A}{2}}{2};$$

en égalant ces deux expressions, il vient

$$bc\sin A = l(b+c)\sin\frac{A}{2},$$

et, si l'on remplace $\sin A$ par $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, on trouve

$$l=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Remarque. — Une méthode analogue conduirait à l'expression suivante de la bissectrice extérieure :

$$l'=\frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b-c}$$

XIX. — *Longueur, limitée au grand axe, de la normale en un point d'une ellipse.*

Si l'on suppose que le triangle ABC représente celui des rayons vecteurs d'un point d'une ellipse dont les foyers seraient les points C et B, on voit que

$$bc = MF \times MF' = b'^2$$
$$b+c = MF + MF' = 2a$$

et si l'on désigne par N la longueur définie dans l'énoncé, on trouve en vertu du théorème précédent :

$$N=\frac{b'^2\cos\alpha}{a},$$

et comme (VIII, *Remarque*)

$$\cos\alpha=\frac{b}{b'}$$

on a aussi $$N=\frac{bb'}{a}.$$

XX. **Théorème.** — *La projection de* N *sur les rayons vecteurs du point* M *est constante, quel que soit le point* M.

Si dans la première valeur de N (XIX) on élimine b' au lieu de $\cos\alpha$, on obtient $N=\dfrac{b^2}{a\cos\alpha}$

ou $$N \cos \alpha = \frac{b^2}{a}$$

expression qui montre que cette projection est égale à $\frac{b^2}{a}$.

XXI. **Théorème.** — *Le produit de la longueur* N *de la normale par la distance du centre à la tangente correspondante est constant et égal à* b^2 *pour tout point de l'ellipse.*

En effet, OQ désignant la distance du centre à une tangente, on sait (VI, *Remarque*) que

$$OQ = a \cos \alpha,$$

d'où $$N \times OQ = \frac{b^2}{a \cos \alpha} \times a \cos \alpha = b^2.$$

XXII. **Théorème.** — *D'un point pris dans le plan d'une ellipse, on peut, en général, mener quatre normales à la courbe.*

Soit (*fig. 9*) M point d'une ellipse de foyers F et F' où aboutit une normale issue du point P, RP une perpendiculaire sur FF', MH une seconde perpendiculaire sur FF' et enfin D le point où la normale PM rencontre FF'.

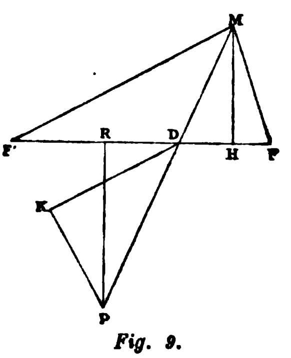


Fig. 9.

MD étant bissectrice de l'angle FMF', on a la suite des rapports

$$\frac{F'D}{MF'} = \frac{FD}{MF} = \frac{F'D + FD}{MF' + MF} = \frac{c}{a};$$

d'où l'on tire

$$MF' = \frac{a}{c} F'D.$$

De plus, le triangle MDF' permet d'écrire la relation

$$\overline{F'D}^2 = \overline{MF'}^2 + \overline{MD}^2 - 2MF' \times MD \cos \alpha$$

et en y remplaçant MF' par sa valeur trouvée ci-dessus et MD par $\frac{b^2}{a \cos \alpha}$ (XX), on trouve, après réductions,

$$\overline{F'D}^2 - 2cF'D + \frac{b^2 c^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

Le point P étant donné par sa distance PR, la normale PM sera déterminée par la longueur RD qui sera l'inconnue

du problème ; si l'on pose $F'R = l$, on a

$$F'D = l + RD$$

et en remplaçant F'D par cette valeur dans la relation précédente, il vient

$$(l + RD)^2 - 2c\,(l + RD) + \frac{b^2c^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 0;$$

d'où l'on tire

$$a^2 \cos^2 \alpha = \frac{b^2c^2}{(l + RD)\,[2c - (l + RD)]}.$$

Cela étant, les triangles semblables PRD et MDH donnent

$$\frac{PR}{RD} = \frac{MH}{DH};$$

d'où

$$RD = PR.\frac{DH}{MH},$$

et si l'on remarque que, dans le triangle rectangle MDH

$$\overline{DH}^2 = \overline{MD}^2 - \overline{MH}^2$$

ou

$$\frac{DH}{MH} = \sqrt{\frac{\overline{MD}^2}{\overline{MH}^2} - 1},$$

et si l'on pose $PR = d$, il vient

$$RD = d\sqrt{\frac{\overline{MD}^2}{\overline{MH}^2} - 1}.$$

En se reportant aux valeurs de MD (XX) et MH (V) on trouve que

$$\frac{MD}{MH} = \frac{c}{a \sin \alpha},$$

d'où

$$RD = d\sqrt{\frac{c^2}{a^2 \sin^2 \alpha} - 1}.$$

Remplaçant dans cette expression $\sin^2 \alpha$ par $1 - \cos^2 \alpha$, élevant au carré, et résolvant par rapport à $\cos^2 \alpha$, on trouve facilement

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2\overline{RD}^2 + b^2d^2}{a^2(\overline{RD}^2 + d^2)},$$

et en égalant les deux valeurs de $\cos^2 \alpha$ ainsi obtenues, puis ordonnant par rapport à l'inconnue RD, on a l'équation

$$a^2\overline{RD}^4 + 2a^2\,(l - c)\,\overline{RD}^3 + [b^2(d^2 + c^2) - a^2l\,(2c - l)]\,\overline{RD}^2$$
$$+ 2b^2d^2(l - c)\,RD + b^2d^2(l - c)^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré ; elle admet donc en général quatre racines ; on peut donc en conclure que du

point P on peut mener, en général, quatre normales à l'ellipse. Il est évident que les valeurs l et d, qui déterminent le point P, peuvent être telles que l'équation admette ou des racines égales ou des racines imaginaires, auquel cas le nombre des normales est inférieur à quatre. *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par **L. Guéroult**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Lorsque deux plans se coupent et qu'un cercle est situé dans l'un d'eux, l'angle formé par les droites qui joignent le centre de ce cercle aux deux foyers de l'ellipse qui en est la projection sur l'autre plan, est indépendant de l'angle des deux plans. Il ne varie qu'avec la distance du centre du cercle à l'intersection des deux plans.

Considérons deux plans AP, AQ, coupés perpendiculairement par le plan du tableau (*fig. 1*), et le centre O d'un cercle situé dans le plan AP; un diamètre BC de ce cercle se confond avec la ligne de plus grande pente passant par le point O. On sait que la projection de BC est le petit axe de l'ellipse, et que le grand axe est égal au diamètre. Soient $OB = a$, $BG = b$, $AO = a + d$, et menons OO′ perpendiculaire et BG parallèle à AQ,

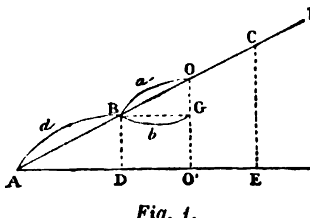


Fig. 1.

J'exprime la distance OO′ en fonction de a, b, d, à l'aide des données suivantes :

Dans le triangle OGB, on a $OG = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Dans les deux triangles semblables BAD, OGB, on a la

relation : $$\frac{AD}{AB} = \frac{BG}{BO},$$

ou bien $$\frac{AD}{d} = \frac{b}{a}.$$

D'où enfin $$AD = \frac{bd}{a}.$$

Mais dans le triangle rectangle BAD,

$$BD = \sqrt{d^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{d^2 - \frac{b^2d^2}{a^2}} = \frac{d}{a}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Posons $\sqrt{a^2 - b^2} = c$; la longueur OO′ se compose de OG et de O′G, égal lui-même à BD;

donc $$OO' = c + \frac{dc}{a} = \frac{(a+d)c}{a}.$$

Imaginons le point O joint aux deux foyers F, F′ de l'ellipse ainsi qu'au point O′ (*fig. 2*) et soit x la moitié de l'angle cherché; dans le triangle rectangle OO′F′, O′F′ $= c$ et nous avons trouvé $OO' = \frac{(a+d)c}{a}$;

on a donc en simplifiant :

$$\operatorname{tg} x = \frac{O'F'}{OO'} = \frac{a}{a+d} \qquad (1)$$

Fig. 2.

Cette valeur de tg x est indépendante de l'angle des deux plans et ne se compose que des facteurs constants a et d; par conséquent le théorème est démontré.

Il y a lieu de considérer le cas où, dans leur mouvement de rotation, les deux plans deviennent perpendiculaires l'un à l'autre (*fig. 3*); on sait qu'alors la projection du cercle est une ligne droite égale au diamètre. Or, toute droite DC peut être considérée comme la limite vers laquelle tend une ellipse lorsque ses deux foyers s'écartent respectivement jusqu'aux extrémités C et D du grand axe. Si donc nous trouvons pour l'angle AOC la même valeur que précédemment (1), le théorème sera encore vrai.

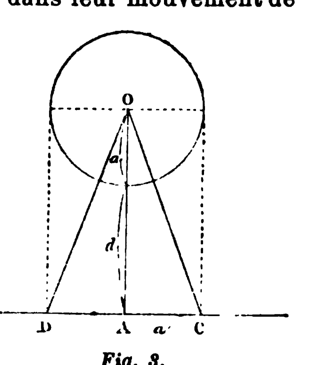


Fig. 3.

Or $$OA = a + d, \quad AC = a.$$

Donc $$\operatorname{tg} x = \frac{a}{a+d}.$$

Si enfin dans la formule générale $\operatorname{tg} x = \frac{a}{a+d}$ on fait $d = 0$, le cercle sera tangent à l'intersection des deux plans; on aura $$\operatorname{tg} x = 1$$ et $$2x = 90^\circ.$$

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Solution du problème donné pour l'admission en 1877.

Par M. **B. Malloizel,** ancien élève de l'École polytechnique, professeur à Sainte-Barbe.

On donne un triangle ABC *rectangle en* A; *on considère toutes les coniques circonscrites à ce triangle et telles que les tangentes en* B *et* C *concourent sur la hauteur du triangle. On demande :*

1° *Le lieu des points de rencontre des normales en* B *et* C;

2° *Le lieu des centres de ces coniques ; on séparera la partie du lieu qui correspond aux ellipses et aux hyperboles;*

3° *Le lieu des pôles d'une droite quelconque* D. *Ce lieu est une conique; la droite* D *étant telle que cette conique soit une parabole, trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur cette droite.*

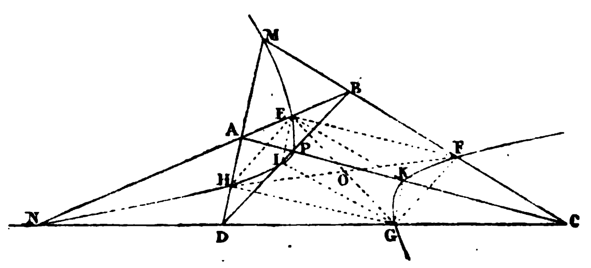
Je rappellerai tout d'abord les théorèmes suivants sur lesquels je m'appuierai plus loin :

Théorème I. — *Le lieu des centres des coniques passant par quatre points* A, B, C, D, *est une conique qu'on appelle la conique des neuf points.*

Ces neuf points sont les centres M, N, P des trois couples de droites passant par les quatre points et les points E, F, G, H, I, K, milieux des droites AB, BC, CD, DA, BD, AC. Les trois droites EG, HF, IK se coupent en un même point O qui est leur milieu. Ce point O est le centre de la conique.

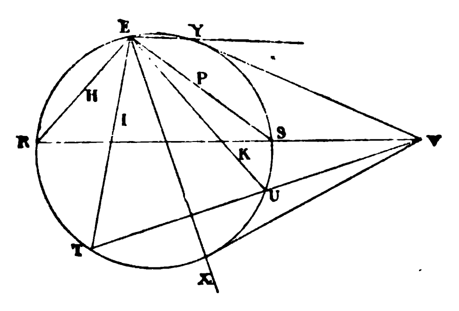
Cette conique est une ellipse, si on ne peut pas former

avec les quatre points un quadrilatère convexe. Elle est une hyperbole dans le cas contraire, comme dans la figure ci-contre. Je ferai remarquer que l'on peut déterminer facilement les asymptotes de cette hyperbole, ainsi qu'il suit :



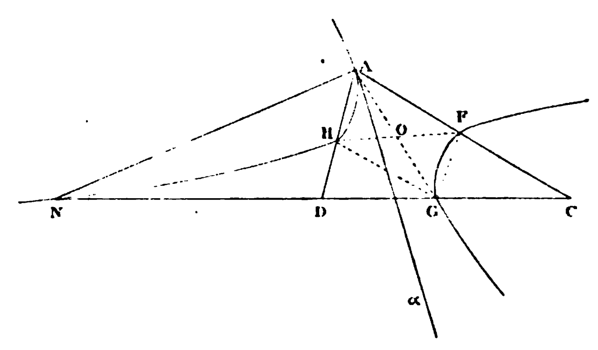
HF est un diamètre, donc les cordes supplémentaires HE, EF sont parallèles à deux diamètres conjugués; il en est de même de IE et EK. Les systèmes de diamètres conjugués forment un faisceau en involution dont les asymptotes sont les droites doubles.

Si donc je décris un cercle quelconque passant par le point E, et si je prolonge les quatre droites EH, EF, EI, EK jusqu'à ce cercle, les deux droites RS, TU se coupent en un point fixe V. En menant les tangentes VX, VY, les lignes EX, EY sont les directions asymptotiques. On obtient les asymptotes en me-



nant par le point O des parallèles à ces directions. Remarquons encore que la ligne ME est la droite conjuguée de la parallèle MZ à AB par rapport aux deux droites MA et MB. Si les deux points A et B viennent à se confondre, on a des coniques tangentes en A à la droite AN; le lieu des centres est une hyperbole dont les points M et E sont venus se confondre en A, et la limite de ME, où la tangente en A est la droite Aα conjuguée de AN par rapport aux deux droites AD et AC.

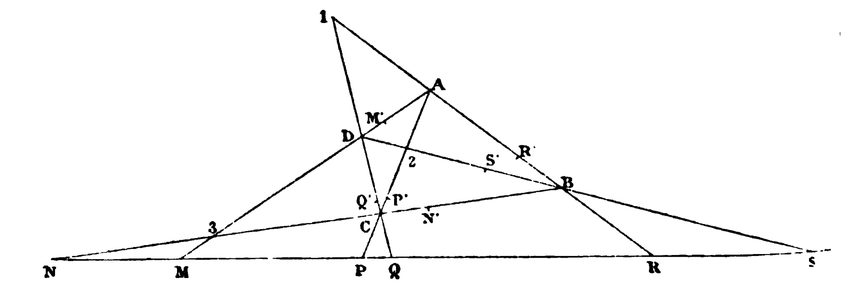
Nota. — En revenant à notre première figure, ou en considérant celle-ci, on voit immédiatement que les points de la branche GF sont des centres d'ellipses, tandis que les points de la branche NH sont des centres d'hyperboles. Car les points M, N, P de la première figure sont les centres de



couples de droites passant par les quatre points, c'est-à-dire d'hyperboles. Il en sera de même pour les points voisins et par suite pour toute la branche. D'ailleurs, en prenant un de ses points comme centre et joignant à trois des quatre points donnés, pour avoir leurs symétriques, on a un hexagone non convexe. Le contraire a lieu pour l'autre branche.

Théorème II. — *Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques qui passent par quatre points, est une conique.*

Par les quatre points donnés A, B, C, D, on peut mener trois couples de droites qui coupent la droite fixe X aux



points N, M, P, Q, R, S. Je prends le point M′ conjugué harmonique du point M par rapport aux points A et D; de même N′, P′, Q′, R′, S′. La conique, lieu des pôles, passe par ces six points, ainsi que par les points 1, 2, 3 de concours des trois couples de droites.

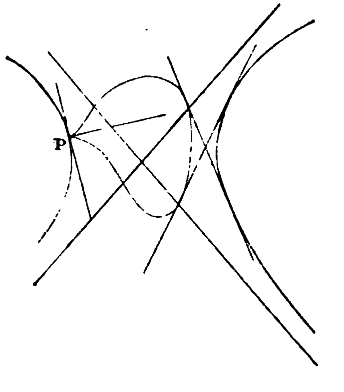
On déduit d'ailleurs le lieu précédent de celui-ci, en supposant que la droite X s'éloigne à l'infini.

Théorème III. — *La podaire d'un point par rapport à une courbe du second degré, est une courbe du quatrième degré, ayant pour point double ce point.*

En particulier, si ce point est sur la courbe, le point double devient un point de rebroussement dont la tangente est la normale à la conique en ce point. De plus si la conique est une hyperbole, la podaire est une courbe fermée ayant la forme ci-contre, quel que soit le point P pris sur l'hyperbole.

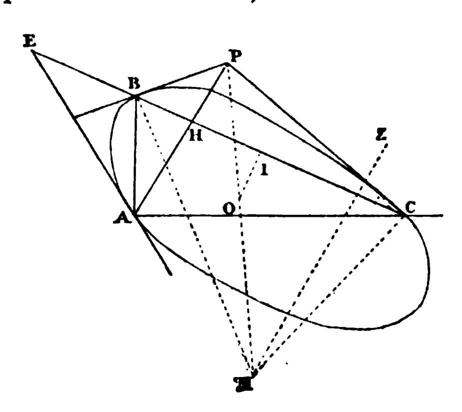
Je reviens maintenant à la question que je me suis proposé de traiter.

1re Partie. — Si je prends un point P sur la hauteur AH et que je joigne BP et CP, la conique tangente à ces deux droites en B et C et passant en A est une des coniques de l'énoncé; les deux normales en B et C se coupent au point M dont on demande le lieu quand P varie sur la hauteur AH. Le quadrilatère MCPB est inscriptible, puisque les angles en B et C sont droits; PM est un diamètre du cercle circonscrit et son milieu O est le centre qui se trouve aussi sur la perpendiculaire élevée à BC en son milieu I qui est fixe. Comme OM = OP, le lieu du point M est donc la perpendiculaire à BC, symétrique de la hauteur AH par rapport au point I.

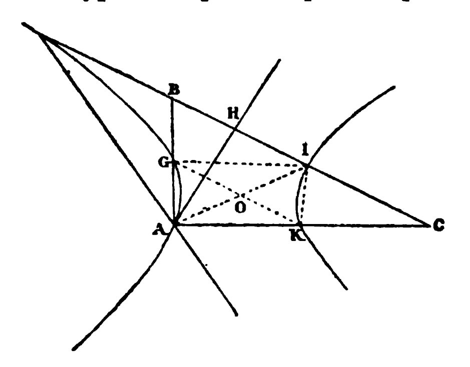


2e Partie. — Considérons une conique remplissant les conditions données et menons sa tangente AE en A. Le point

E de rencontre de cette tangente avec BC a évidemment pour polaire la droite AP, c'est-à-dire la hauteur du triangle, et les quatre points E, B, H, C sont conjugués harmoniques. J'en conclus que le faisceau ACHBE est harmonique et, comme l'angle BAC est droit, la droite AB est bissectrice de l'angle EAH. La droite AE est donc une droite fixe, faisant avec AB un angle égal à BAH, quelle que soit la conique de l'énoncé. On peut donc considérer ces coniques comme tangentes en A à une droite fixe AE et passant par deux points fixes B et C.



Nous savons que le lieu des centres de ces coniques est une hyperbole passant par les points I, K, G milieux de BC, CA, AB, et par les points E et A. La tangente en A est d'ailleurs la ligne conjuguée de AE par rapport aux droites AB et AC, c'est-à-dire la hauteur AH du triangle ABC. Le centre de l'hyperbole est d'ailleurs le centre ω du rectangle AKIH et les axes sont les parallèles aux côtés menées par le point ω.



D'ailleurs, la branche EGA correspond à des centres d'hyperboles et la branche IK à des centres d'ellipses, comme nous l'avons dit précédemment.

3e Partie. — Considérons une droite quelconque D fixe.

Cette droite a un pôle par rapport à chaque conique de l'énoncé.

Le lieu de ce pôle est une conique, d'après le théorème 2. Ce pôle est à distance finie tant que la droite D ne passe pas par le centre de la conique. Le lieu des centres des coniques étant l'hyperbole précédente, la droite D coupe cette hyperbole en deux points; il y a donc deux coniques ayant leurs centres sur la droite D et par suite deux pôles rejetés à l'infini. Le lieu des pôles est donc une ellipse si la droite D ne coupe pas l'hyperbole lieu des centres en des points réels. C'est une hyperbole si D coupe le lieu des centres en des points réels.

Enfin le lieu des centres sera une parabole si la droite D est tangente à l'hyperbole. — Les différentes positions de la droite D qui correspondent à une parabole sont donc les tangentes à l'hyperbole du lieu précédent.

Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point A sur ces droites n'est donc autre que la podaire de cette hyperbole par rapport au point A.

Ce lieu est une courbe du quatrième degré, fermée, ayant un point de rebroussement au point A. La tangente en ce point est la normale à l'hyperbole, c'est-à-dire la perpendiculaire à AH ou la parallèle à BC.

NOTE RELATIVE AU THÉORÈME DE PAPPUS

SUR LE QUADRILATÈRE COMPLET

Par **P.-A.-G. Colombier.**

Théorème de Pappus. — *Dans un quadrilatère complet chaque diagonale est divisée harmoniquement par les points où elle est rencontrée par les autres.*

Démonstration. — Dans un quadrilatère complet, il y a trois diagonales. Pour chaque diagonale il y a quatre manières de présenter la démonstration. Chaque manière comporte

un certain choix à faire, ce qui peut causer quelque embarras. Voici une règle générale et simple, qui permet d'arriver au but sans hésitation, *quelle que soit la diagonale que l'on considère.*

Supposons que l'on ait écrit, dans un ordre quelconque, sur une même ligne horizontale, les six lettres qui désignent les six sommets du quadrilatère complet: A, B, C, D, E, F.

Supposons qu'on demande de démontrer le théorème pour une diagonale déterminée: AC par exemple. Je joins aux deux lettres A et C *une quelconque des quatre lettres restantes*; soit la lettre B. Les trois lettres A, C, B déterminent le *triangle* ABC. Des trois lettres restantes D, E, F, il y en a deux, et deux seulement, qui déterminent une des deux autres diagonales. C'est la *diagonale* EF. Enfin il reste la lettre D qui désigne le sixième sommet du polygone, c'est-à-dire *un point*.

Cela posé j'applique le théorème de Jean de Céva au *triangle* ABC et au *point* D; il vient:

$$\frac{GA}{GC} \cdot \frac{EB}{EA} \cdot \frac{FC}{FB} = -1.$$

J'applique le théorème de Ménélaüs au *même triangle* ABC, et à la *diagonale transversale* EF. Il vient :

$$\frac{PA}{PC} \cdot \frac{EB}{EA} \cdot \frac{FC}{FB} = +1.$$

Si l'on divise l'avant-dernière égalité par la dernière, on trouve:

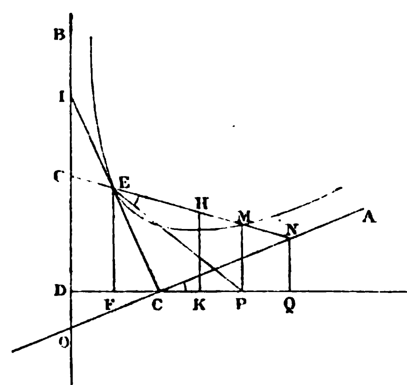
$$\frac{GA}{GC} : \frac{PA}{PC} = -1. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE

Par M. **J. Cernesson**, professeur au Lycée de Bourges.

Théorème. — *Soient une hyperbole et ses deux asymptotes* OA, OB. *On mène la tangente* CEI *perpendiculairement à* OA. *Du pied* C *de cette perpendiculaire, on abaisse une perpendiculaire* CD *sur* OB. — *Toute ordonnée* MP *de la courbe, relative à* CD, *sera vue du point de contact* E *sous un angle constant.*

Démonstration. — Je prolonge CE jusqu'à sa rencontre en I avec OB et EM jusqu'à ses rencontres respectives en N et en G avec OA et OB. Des points E, M, N, et du point H, milieu de EM, j'abaisse les perpendiculaires EF, MP, NQ, HK sur DC. En vertu d'une propriété connue de l'hyperbole, EI = EC, et par suite DF = FC. De même EG = MN, et par suite DF = PQ. Par conséquent FC = PQ, et le point K, milieu de FQ, est aussi le milieu de CP. Le point H est donc également distant des points C et P; d'autre part, il est le centre d'une circonférence passant par E, N, C, puisqu'il est le milieu de EN et que l'angle ECN est droit. Donc les quatre points E, N, P, C sont sur une même circonférence. Il en résulte que NEP est égal à l'angle ACP, qui est constant,



c. q. f. d.

NOTE SUR L'INTERSECTION

DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND ORDRE DONT LES AXES SONT DANS UN MÊME PLAN

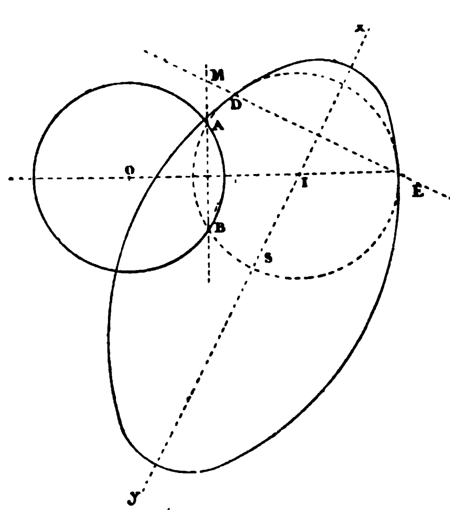
Par **A. Janin**, élève de Mathématiques spéciales à Sainte-Barbe.

Théorème. — *La projection de l'intersection de deux surfaces de révolution du second ordre dont les axes sont parallèles sur un plan parallèle au plan des axes est une parabole.*

Il est d'abord évident que cette projection est une conique.

Nous démontrerons le théorème d'abord dans le cas où l'une des surfaces de révolution est une sphère.

Soient O la sphère donnée, S la surface de révolution. Par le point O je mène une droite OI rencontrant l'axe xy de la surface S, et je considère la sphère O et la surface S comme des surfaces de révolution dont les axes se rencontrent en I.



Pour construire un point de la projection de l'intersection j'applique la méthode indiquée en géométrie descriptive en coupant les deux surfaces par des sphères ayant leur centre au point I.

Je considère en particulier la sphère inscrite dans la surface S. Cette sphère coupe cette surface suivant un parallèle double qui se projette suivant la droite DE, et cette sphère coupe la sphère O suivant des parallèles; l'un se

projette suivant AB, l'autre est le cercle de l'infini commun à toutes les sphères : il se projette suivant la droite de l'infini du plan de projection.

On a démontré que la projection de l'intersection des deux surfaces est tangente aux projections des parallèles suivant lesquels la sphère limite coupe la surface pour laquelle elle est sécante.

La projection de l'intersection est donc tangente à la droite AB et à la droite de l'infini de son plan. Cette projection est d'ailleurs une conique. Nous avons démontré le théorème énoncé.

Construction de l'axe de la parabole.

Remarquons d'abord que la droite DE qui rencontre la parabole en un point M et en un point à l'infini est un diamètre et que les cordes qui lui sont conjuguées sont parallèles à la tangente AB menée au point M, extrémité du diamètre.

Remarquons en outre que DE est perpendiculaire à l'axe xy et que AB est perpendiculaire à la droite arbitraire OI.

Si nous voulons obtenir l'axe de la parabole, nous remarquerons que l'axe est un diamètre perpendiculaire à ses cordes; il faudra donc déterminer sur l'axe un point I tel qu'en appliquant la construction précédente on obtienne des droites A'B', D'E' perpendiculaires l'une sur l'autre.

Or D'E' a une direction fixe, cette droite est perpendiculaire à l'axe xy; A'B' est perpendiculaire à OI'; pour qu'il soit également per-

pendiculaire sur D'E', il faut que OI' soit parallèle à D'E', c'est-à-dire soit perpendiculaire à l'axe xy.

De là résulte la construction suivante :

On projette le centre de la sphère sur l'axe xy. Soit I' cette projection. On mène la sphère inscrite dans la surface S et ayant son centre au point I' ; cette sphère coupe la surface S suivant un parallèle double dont la projection D'E' est l'axe de la parabole projection de l'intersection.

En construisant par la méthode indiquée un autre point de la parabole et sa tangente, on aura tous les éléments nécessaires à la construction de cette courbe.

« Considérons maintenant le cas de deux surfaces de révolution à axes parallèles.

» Le théorème sera démontré si l'on fait voir que l'on peut faire passer une sphère par l'intersection de ces deux surfaces.

» Remarquons d'abord que deux surfaces de révolution à axes parallèles sont deux surfaces ayant leurs *deux* directions de plans cycliques parallèles.

» Je dis maintenant que par l'intersection de deux surfaces du second ordre S, S', ayant leurs deux directions de plans cycliques parallèles, on peut toujours faire passer une sphère.

» Soient en effet C, C' les sections de ces deux surfaces par le plan de l'infini, et soit T le cercle de l'infini.

» Pour obtenir les plans cycliques de la surface S, je ferai passer des plans par un point I de l'espace situé à distance finie et par les sécantes communes à la conique C et au cercle T, soient D, D_1 les sécantes communes réelles.

» Pour obtenir les plans cycliques de la surface S', je fais passer des plans par le point I et par les sécantes communes à la conique C' et au cercle T, soient D' et D_1' les sécantes communes réelles.

» Les deux surfaces ayant mêmes plans cycliques, les plans que nous avons menés coïncident; il en est de même des droites DD' et $D_1D'_1$.

» Les coniques C et C' ont leurs quatre points d'intersection

sur le cercle T; en effet, chacune d'elles passe par les points d'intersection du cercle T et du couple de sécantes DD_1. Soient *abcd* les points d'intersection des coniques et du cercle.

» Cela posé, je fais passer une sphère par quatre points de l'intersection des deux surfaces S, S'; cette sphère passera par le cercle T, et, par suite, par les points *a*, *b*, *c*, *d*. Elle contiendra donc huit points de l'intersection des surfaces S, S' (les quatre points considérés à distance finie et les quatre points *a*, *b*. *c*, *d*). Par suite elle passera par l'intersection tout entière des surfaces S, S'. » (*) c. q. f. d.

Remarque. — La projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent sur un plan parallèle au plan des axes est une conique.

Lorsque cette conique est une hyperbole on peut en déterminer géométriquement les asymptotes.

Nous effectuerons cette détermination en deux fois:

1° Direction des asymptotes (c'est-à-dire détermination du point à l'infini sur ces droites);

2° Détermination d'un point de l'asymptote (à distance finie).

1° *Direction des asymptotes.* — Soient S, S' les deux surfaces de révolution.

Soient en outre C, C' les coniques d'intersection des surfaces S, S' par le plan de l'infini.

Ces coniques C, C' se coupent aux quatre points *ab*, *cd*, qui sont deux à deux sur une même perpendiculaire au plan de projection, et les asymptotes de la projection de l'intersection des deux surfaces passeront par les projections des points *ab*, *cd*.

La détermination de la direction des asymptotes revient donc à la détermination des projections des points *ab*, *cd*, c'est-à-dire à la détermination des points d'intersection des coniques C, C'.

Soient S_1, S_1' deux surfaces homothétiques aux surfaces

(*) Cette généralisation a été indiquée par M. J. Réveille, élève à l'École polytechnique.

S, S'; ces deux surfaces passeront par les coniques C, C', et par suite la projection de leur intersection passera par les projections des points *ab*, *cd*. Nous pourrons donc pour la détermination de ces points, remplacer les surfaces S, S' par les surfaces S_1, S_1'.

Nous pouvons en outre disposer des surfaces S_1, S_1' de manière qu'elles soient circonscrites à une même sphère, puisqu'elles sont toutes deux de révolution. Leur intersection se composera alors de deux courbes planes dont les plans seront perpendiculaires au plan de projection. La projection de l'intersection des deux surfaces S_1, S_1' se composera alors de deux droites A, A' passant par les points *ab*, *cd*, ces droites seront parallèles aux asymptotes de la projection de l'intersection des surfaces S, S'.

Pour appliquer cette méthode dans la pratique nous distinguerons trois cas :

1° Aucune des surfaces S, S' n'est un ellipsoïde. On tracera alors dans un coin de l'épure un cercle O et l'on mènera à ce cercle des couples de tangentes S_1S_1' parallèles aux génératrices de contour apparent des cônes asymptotes des surfaces S, S'. On fera en sorte que les cônes S_1, S_1' soient circonscrits à la sphère O, ce qu'on reconnaîtra facilement en remarquant qu'alors les cordes de contact sont perpendiculaires aux axes de révolution.

Les sécantes communes A, A' des coniques S_1, S_1' qui passent par le point de concours des cordes de contact seront les directions des asymptotes.

2° Une seule des surfaces est un ellipsoïde. Soit S l'ellipsoïde. Pour éviter le tracé de nouvelles courbes on conservera l'ellipse S, on construira un cercle O bitangent à l'ellipse et pour simplifier on pourra le prendre concentrique à l'ellipse.

On fera en sorte, comme précédemment, que la sphère O soit circonscrite à l'ellipsoïde S, ce qu'on obtiendra en prenant pour diamètre du cercle O l'axe de l'ellipse qui n'est pas l'axe de révolution; on mènera alors au cercle O un couple de tangentes S'_1 parallèles aux génératrices de contour apparent, d'où une asymptote de S', etc.

Remarque. — Si l'une des surfaces S′ était un paraboloïde de révolution, le couple de tangentes S_1' correspondant à ce paraboloïde se composerait de deux droites parallèles à l'axe de la parabole S′.

3° Enfin les deux surfaces sont deux ellipsoïdes. On effectue alors la construction comme précédemment; seulement on prend pour surface S'_1, un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde S′ et circonscrit à la sphère suivant un grand cercle.

Cette discussion va nous permettre d'énoncer dans quel cas la projection de l'intersection sera une hyperbole, dans quel cas cette projection sera une ellipse.

1° Lorsque aucune des surfaces n'est un ellipsoïde aplati, les coniques S_1, S'_1 sont toutes deux extérieures au cercle O et se coupent en quatre points réels, ce qui donne deux asymptotes A, A′ réelles.

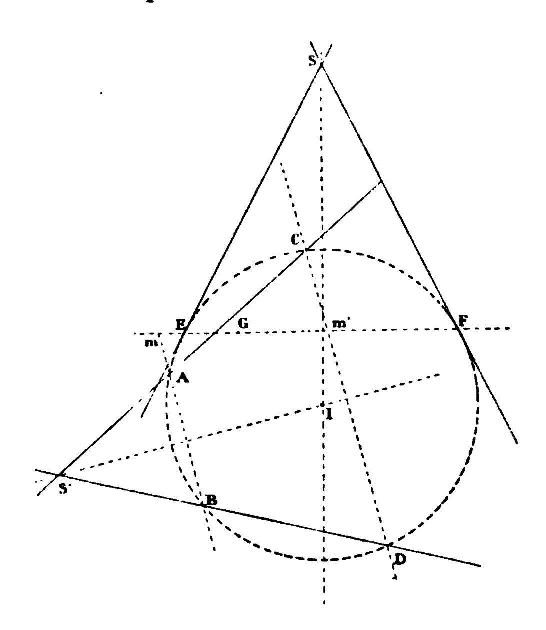
Il en est de même lorsque les deux surfaces sont des ellipsoïdes aplatis, car alors les deux surfaces sont toutes deux intérieures au cercle O, etc.

2° Lorsqu'une seule des surfaces S est un ellipsoïde aplati, les coniques S_1, S'_1 sont l'une intérieure, l'autre extérieure au cercle O, et ne se coupent pas en des points réels. Le couple AA′ est alors imaginaire et la projection de l'intersection des surfaces S, S′ est une ellipse.

2° *Détermination d'un point de l'asymptote.* — Nous connaissons la direction des asymptotes; pour achever de déterminer ces asymptotes, il suffira de construire un point de chacune de ces asymptotes. Pour simplifier, nous construirons le point de concours de ces asymptotes, c'est-à-dire le centre de la conique projection de l'intersection des deux surfaces.

Soient S, S′, les deux surfaces, I le point de concours des axes de révolution des deux surfaces S, S′; soit O la sphère inscrite à la surface S et qui a son centre au point I; cette sphère coupe la surface S suivant la parallèle double EF et la surface S′ suivant les deux parallèles AB, CD, et l'intersection est tangente aux deux parallèles CD, AB; soient m, m_1 les points de l'intersection situés sur la droite EF; les tangentes aux points m, m_1 sont précisément les droites AB,

CD; ces tangentes sont parallèles; donc mm_1 est un diamètre en grandeur et en position.



La construction du centre de la conique projection de l'intersection est maintenant évidente.

Remarque. — Le diamètre EF et ses cordes AB sont respectivement perpendiculaires aux axes des surfaces. On pourra donc dans le cas de l'ellipse, en appliquant deux fois la construction précédente, construire un système de deux diamètres conjugués de la projection de l'intersection.

La construction précédente est en défaut lorsque le cercle décrit du point I comme centre n'a pas un double contact réel avec la conique S.

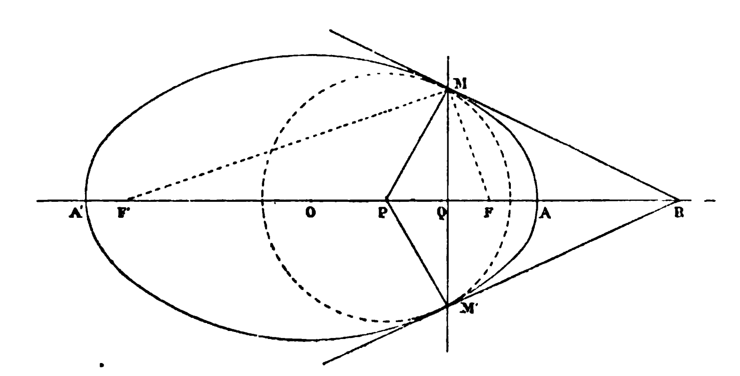
Nous appliquerons alors la construction indiquée ci-dessous et qui permet de construire, avec la règle et le compas, la corde de contact d'un cercle bitangent à une ellipse ou une hyperbole déterminée par ses axes, ou bitangent à une parabole dont on donne l'axe et le paramètre.

Lemme I. — Si d'un point pris sur l'axe d'une conique à centre, on mène les normales, les points d'incidence des deux normales (autres que l'axe) se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe.

Si l'on désigne par ξ, ξ_1 les distances du centre de la courbe à la droite qui joint les points d'incidence des normales et au point d'où partent les normales, si l'on désigne en outre par α, γ les distances du centre de la courbe aux sommets et aux foyers situés sur l'axe considéré, on a la relation

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}.$$

Soit en effet P le point d'où sont issues les normales, MM les points d'incidence. Menons la tangente au point M, cette tangente rencontre l'axe au point R qui est évidemment le



pôle de la droite MM', les points R et Q sont donc conjugués harmoniques par rapport au segment AA'; on a donc

$$OQ \,.\, OR = \overline{OA}^2$$

c'est-à-dire $$\xi \,.\, OR = \alpha^2, \qquad (1)$$

Soient maintenant F et F' les foyers situés sur l'axe considéré; les droites MP, MR sont l'une normale, l'autre tangente au point P, et le faisceau (M,RFPF') est harmonique, les points P et R sont donc conjugués harmoniques par rapport au segment FF' et l'on a

$$OP \,.\, OP = \overline{OF}^2$$

c'est-à-dire $$\xi_1 \,.\, OR = \gamma^2. \qquad (2)$$

Divisant l'égalité (1) par l'égalité (2) il vient enfin

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}.$$

Pour étendre cette propriété au cas de l'axe non focal, nous remarquerons qu'il existe sur cet axe deux foyers imaginaires F_1, F_1' et qu'on démontre que la somme ou la différence des distances de chaque point de la courbe à ces deux points est constante.

Cela posé, lorsqu'on a démontré que la tangente et la normale en un point d'une conique sont bissectrices de l'angle des rayons vecteurs, on s'est appuyé uniquement sur ce que la somme ou la différence des rayons vecteurs est constante.

Le raisonnement précédent subsiste entièrement et la formule est générale.

Cette formule permet de construire la corde qui joint les points d'incidence de deux normales issues d'un point situé sur l'un des axes sans qu'il soit besoin de construire ces normales.

Lorsque la courbe est une parabole, la droite qui joint les points d'incidence de deux normales issues d'un point situé sur l'axe, s'obtient immédiatement lorsqu'on remarque que la sous-normale est constante et égale au paramètre.

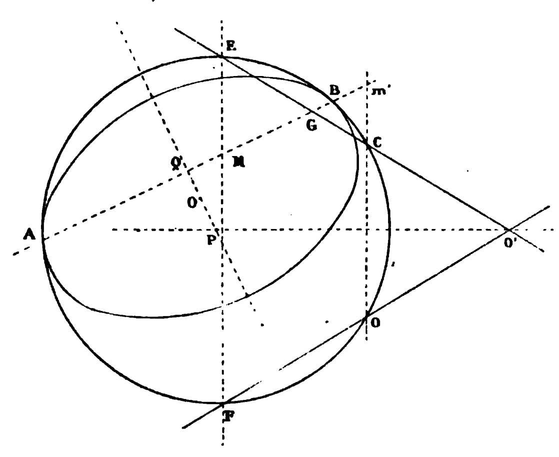
Lemme II. — Cela posé, considérons deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent en P. La projection de leur intersection sur un plan parallèle au plan des axes est une conique.

Proposons-nous de déterminer le centre de cette conique.

Pour résoudre ce problème, nous allons construire deux diamètres de cette courbe, et pour cela je considère la sphère inscrite dans la surface O par exemple et ayant son centre au point de rencontre des axes; cette sphère se projette suivant un cercle bitangent à la courbe méridienne de la surface O, le cercle de contact se projettera suivant la droite AB qui joint les points d'incidence des normales à la conique O issues du point P.

Je dis que cette droite est un diamètre de la projection de

l'intersection. En effet, on a démontré en géométrie descriptive que les tangentes aux points situés sur le cercle de contact



d'une des sphères circonscrites sont les tangentes aux cercles d'intersection de cette sphère limite avec la surface pour laquelle elle est sécante; il est aisé de voir que les tangentes aux points M, M', situés sur la droite AB, sont les cordes communes au cercle PQ et à la conique O' (cordes perpendiculaires à l'axe PO'); ces deux tangentes étant parallèles, il en résulte que la droite AB est un diamètre.

Mais d'après le lemme démontré précédemment, il suffit pour construire la droite AB, d'appliquer la formule

$$\xi = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\xi'$$

dans laquelle ξ désigne la distance du centre O de la courbe

à la droite AB, ξ' la distance OI, et α et γ les distances de ce même point O aux sommets et aux foyers de la courbe (réels ou imaginaires) situés sur l'axe OP.

Cette construction appliquée successivement aux surfaces O et O′ fera connaître le centre de la conique projection de l'intersection des surfaces O et O′.

Cette construction n'exige nullement le tracé du cercle P.

Lorsque le cercle P aura été tracé, on obtiendra le centre plus simplement en prenant le milieu du segment MM′ lorsqu'on saura construire les points MM′.

Remarque. — Si l'une des surfaces était un paraboloïde, pour construire le diamètre correspondant, on prendrait

$$PQ = p,$$

et l'on mènerait AB perpendiculaire à l'axe de la parabole, puisque, dans la parabole, la sous-normale est constante et égale au paramètre.

Supposons maintenant que les axes de révolution deviennent parallèles ; les constructions précédentes s'appliquent encore et la conique intersection qui a *deux* diamètres parallèles, puisqu'ils sont respectivement perpendiculaires aux droites parallèles OI, OI′, est une parabole.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — ***La projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles, sur un plan parallèle au plan des axes, est une parabole.***

Corollaire. — La projection de l'intersection d'une surface de révolution et d'une sphère, sur un plan parallèle au plan déterminé par l'axe de la surface et le centre de la sphère, est une parabole.

Car on peut considérer la sphère comme une surface de révolution ayant son axe parallèle à l'axe de la surface proposée.

Remarque. — L'axe de la parabole est perpendiculaire aux axes de révolution, puisque ces axes sont perpendiculaires au diamètre AB, et que, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles à l'axe.

On pouvait démontrer le théorème que nous avons énoncé en commençant, par des considérations *à priori* et purement géométriques.

Lemme. — Il est évident que l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant un plan principal commun se projette sur ce plan suivant une conique.

Les asymptotes de cette conique sont parallèles aux traces des plans qui déterminent dans ces deux surfaces des sections homothétiques.

Soit en effet D la trace d'un plan déterminant dans les deux surfaces des sections homothétiques. Pour obtenir les points de la projection de l'intersection situés sur cette droite D, je considère les coniques C, C', intersections du plan D et des surfaces S et S'; ces coniques C, C' se coupent en quatre points A, A', B, B' situés deux à deux symétriquement par rapport à la droite D; la droite D rencontre donc la conique T projection de l'intersection des surfaces S, S' en deux points *a*, *b* projections des points AA' et BB'. Mais les deux coniques C, C' étant homothétiques, les points B, B' sont rejetés à l'infini et aussi le point *b*. La droite D rencontre donc la conique T en deux points dont l'un est rejeté à l'infini; la droite D est donc parallèle à une asymptote de la conique T.

De là résulte le théorème de la page 126.

En effet, les asymptotes de la conique T sont parallèles aux deux directions des plans qui déterminent dans les surfaces S, S' des sections homothétiques.

Or ces deux directions se confondent alors avec la direction double des plans cycliques.

L'intersection T des deux surfaces S, S' se projette donc suivant une parabole dont l'axe est perpendiculaire aux axes des surfaces S, S'.

Remarque. — Du lemme précédent on peut déduire immédiatement la construction des asymptotes de la projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878

Mathématiques spéciales.

Solution par M. G. Kœnigs, élève à l'École normale supérieure.

On donne trois axes rectangulaires OA, OB, OC : *de part et d'autre du point* O *on porte* : $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$, $OC = OC' = c$. *On demande :*

1° Le lieu des axes de révolution des surfaces de second ordre de révolution qui passent par les six points A, A', B, B', C, C';

2° Le lieu des points D où ces axes percent respectivement chacune des surfaces qui leur correspondent ;

3° La projection de ce lieu sur le plan AOB. *On discutera cette projection en supposant,* $a > b > c$.

Par le point O passent trois cordes de chaque surface de révolution, et chacune y a son milieu: comme ces cordes ne sont pas dans un même plan, on en conclut que toutes les surfaces de révolution du système ont leur centre à l'origine. Prenons OA, OB, OC pour axes ox, oy et oz. Soit OR un axe d'une surface de révolution Σ du système. Si par les six points A, B, etc., on mène des plans perpendiculaires à la droite OR et la coupant aux points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ respectivement, ces plans coupent la surface Σ suivant six cercles de centres α, β, etc., et de rayons αA, βB, γC, $\alpha' A'$, $\beta' B'$, $\gamma' C'$.

Un plan quelconque P menée par OR coupe les cercles suivant douze points (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2), (α'_1, α'_2), (β'_1, β'_2), (γ'_1, γ'_2), et la surface Σ suivant une conique S. Les axes de cette conique sont OR et la perpendiculaire OR' à OR dans le plan P: en posant $OD = \rho$, on aura 2ρ pour longueur d'un axe, j'appellerai 2σ l'axe confondu avec OR'. L'équation de la conique S dans son plan sera donc:

$$\frac{X^2}{\rho^2} + \frac{Y^2}{\sigma^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Mais la conique S passe par les douze points, α_1, α_2 etc. Et de

plus la symétrie de ces points relativement au point O, et aux droites OR, OR' montre qu'il suffit d'exprimer que les points α_1, β_1 et γ_1 sont situés sur la conique : ainsi pour le point α_1

on aura
$$\frac{\overline{O\alpha}^2}{\rho^2} + \frac{\overline{\alpha\alpha_1}^2}{\sigma^2} - 1 = 0.$$

Mais on voit que $\alpha\alpha_1 = \alpha A$, et d'autre part le triangle $O\alpha A$ donne :
$$O\alpha = a\cos\lambda$$
$$\alpha A = a\sin\lambda$$
(λ, μ, ν) désignant les angles faits par OR avec OA, OB, OC.

Ainsi l'équation précédente devient
$$\frac{a^2\cos^2\lambda}{\rho^2} + \frac{a^2\sin^2\lambda}{\sigma^2} - 1 = 0.$$

Les points β_1 et γ_1 donneront deux relations analogues, ce qui conduit aux trois relations :
$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos^2\lambda}{\rho^2} + \frac{\sin^2\lambda}{\sigma^2} = \frac{1}{a^2}\\ \frac{\cos^2\mu}{\rho^2} + \frac{\sin^2\mu}{\sigma^2} = \frac{1}{b^2}\\ \frac{\cos^2\nu}{\rho^2} + \frac{\sin^2\nu}{\sigma^2} = \frac{1}{c^2}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En éliminant $\frac{1}{\rho^2}$ et $\frac{1}{\sigma^2}$ entre ces trois équations, on a le déterminant nul :
$$\begin{vmatrix}\cos^2\lambda & \sin^2\lambda & \frac{1}{a^2}\\ \cos^2\mu & \sin^2\mu & \frac{1}{b^2}\\ \cos^2\nu & \sin^2\nu & \frac{1}{c^2}\end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \begin{vmatrix}\cos^2\lambda & 1 & \frac{1}{a^2}\\ \cos^2\mu & 1 & \frac{1}{b^2}\\ \cos^2\nu & 1 & \frac{1}{c^2}\end{vmatrix} = 0$$

Les équations de OR sont du reste
$$\frac{x}{\cos\lambda} = \frac{y}{\cos\mu} = \frac{z}{\cos\nu}$$
et l'élimination des cosinus entre ces équations et la précédente donne le cône lieu des axes de révolution :

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & \frac{1}{a^2} \\ y^2 & 1 & \frac{1}{b^2} \\ z^2 & 1 & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant

$$x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0 \quad (3)$$

Les équations (2) peuvent être écrites comme il suit :

$$\frac{\cos^2\lambda}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\lambda}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\lambda}$$
$$=\frac{\cos^2\mu}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\mu}-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\mu}$$
$$=\frac{\cos^2\nu}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\nu}-\frac{1}{c^2\sin^2\nu}=-\frac{1}{\sigma^2} \quad (2')$$

Du reste, en appelant (x, y, z) les coordonnées du point D, on a les relations suivantes :

$$x=\rho\cos\lambda,\quad y=\rho\cos\mu,\quad z=\rho\cos\nu,\quad \rho^2=x^2+y^2+z^2$$

d'où on tire :

$$\rho^2\sin^2\lambda=y^2+z^2,\quad \rho^2\sin^2\mu=z^2+x^2,\quad \rho^2\sin^2\nu=x^2+y^2.$$

Les équations (2') deviennent ainsi :

$$\frac{x^2}{y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}-\frac{\rho^2}{a^2}\cdot\frac{1}{y^2+z^2}$$
$$=\frac{y^2}{z^2+x^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}-\frac{\rho^2}{b^2}\cdot\frac{1}{z^2+x^2}$$
$$=\frac{z^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}-\frac{\rho^2}{c^2}\,\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{1}{\sigma^2} \quad (3)$$

Mais on peut les simplifier. Les équations (2') s'écrivent :

$$\frac{a^2\cos^2\lambda-\rho^2}{a^2\sin^2\lambda}=\frac{b^2\cos^2\mu-\rho^2}{b^2\sin^2\mu}$$
$$=\frac{c^2\cos^2\nu-\rho^2}{c^2\sin^2\nu}=-\frac{\rho^2}{\sigma^2} \quad (e)$$

ou :

$$\frac{a^2\cos^2\lambda-\rho^2}{\rho^2-a^2}=\frac{b^2\cos^2\mu-\rho^2}{\rho^2-b^2}$$
$$=\frac{c^2\cos^2\nu-\rho^2}{\rho^2-c^2}=\frac{\rho^2}{\sigma^2-\rho^2}$$

ou enfin :

$$\frac{a^2 \sin^2 \lambda}{\rho^2 - a^2} = \frac{b^2 \sin^2 \mu}{\rho^2 - b^2} = \frac{c^2 \sin^2 \nu}{\rho^2 - c^2} = \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}$$

et par suite en multipliant par ρ^2 :

$$\frac{a^2 (y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} = \frac{b^2 (z^2 + x^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2}$$

$$= \frac{c^2 (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = \frac{\rho^2 \sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \qquad (3')$$

Les équations (3) (où $\rho = x^2 + y^2 + z^2$) représentent dans l'espace le lieu du point D aussi bien que les équations (3'); mais c'est à ces dernières évidemment qu'il est préférable de s'arrêter, vu leur simplicité.

En éliminant z^2 entre ces équations, on arrivera à l'équation de la projection du lieu sur le plan xy. Le calcul est sans difficultés. On pose

$A = (a^2 - b^2)c^2 + (c^2 - b^2)a^2$, $\quad B = (a^2 - b^2)c^2 + (a^2 - c^2)b^2$,
$C = (a^2 - c^2)b^2 + a^2c^2$, $\quad E = (a^2 - b^2)a^2b^2c^4$
$D = (b^2 - c^2)a^2 + b^2c^2$

Les hypothèses $a > c > b$ entraînent des inégalités

$$A > 0,\ B > 0,\ C > 0,\ E > 0.$$

On trouve $(Ax^2 + By^2)(Cx^2 - Dy^2) = E(y^2 - x^2)$.

On discutera la courbe en posant $x = uy$

On aura $y^2 = - \dfrac{\frac{E}{C}\, u^2 - 1)}{(Au^2 + B)\left(u^2 - \frac{D}{C}\right)}$

On distinguera trois cas : 1° $D > 0$ (2 asymptotes réelles); 2° $D = 0$ ($x = 0$ est asymptote double); 3° $D < 0$ (pas d'asymptote réelle); du reste, dans tous les cas, on a $\frac{D}{C} < 1$. On obtient ainsi trois formes de courbes représentées ci-dessous.

Il est facile de distinguer les points de la courbe qui correspondent à des ellipsoïdes de révolution, de ceux qui correspondent à des hyperboloïdes.

Reportons-nous aux équations (e), elles s'écrivent :

$$\frac{\cos^2\lambda - \frac{\rho^2}{a^2}}{\sin^2\lambda} = \frac{\cos^2\mu - \frac{\rho^2}{b^2}}{\sin^2\mu} = \frac{\cos^2\nu - \frac{b^2}{c^2}}{\sin^2\nu} = \frac{\rho^2}{\sigma^2}$$

on en déduit, en faisant la somme des numérateurs et des dénominateurs :

$$\frac{\rho^2}{\sigma^2} = \frac{\rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 1}{2}$$

Les points D extérieurs à la sphère

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 1 = 0$$

sont des sommets d'ellipsoïdes, car alors $\frac{\rho^2}{\sigma^2} > 0$.

Les points D intérieurs à la même sphère sont des sommets d'hyperboloïdes, car alors $\frac{\rho^2}{\sigma^2} < 0$.

Tout dépend donc du signe de la fonction des coordonnées du point D,

$$V = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 1.$$

Ces coordonnées satisfont à l'équation (3), on en tirera z^2, ce qui donnera :

$$V = \frac{Ax^2 + By^2}{E}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - 1$$

et tirant $\frac{Ax^2 + By^2}{E} = \frac{y^2 - x^2}{Cx^2 - Dy^2}$, de l'équation de la courbe en projection, on trouvera :

$$V = \frac{y^2 - x^2}{Cx^2 - Dy^2}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 1,$$

ou en réduisant

$$V = \frac{(a^2 + c^2)\, b^2y^2 - (b^2 + c^2)\, a^2x^2}{Cx^2 - Dy^2}$$
$$= -\frac{a^2(b^2 + c^2)\, x^2 - b^2(a^2 + c^2)\, y^2}{Cx^2 - Dy^2}.$$

Considérons donc la branche de courbe située par exemple dans l'angle *yox* : elle est comprise entre la bissectrice OT des axes, qui lui est tangente à l'origine, et l'asymptote PM : V = o représente deux droites, l'une d'elles ON est située dans l'angle *yox* ; on peut même voir qu'elle est comprise dans l'angle MOT : elle divise donc l'arc de courbe en deux parties, l'une donnant des ellipsoïdes, et l'autre des hyperboloïdes : la branche indéfinie correspondra à la première variété : la branche finie comprise entre OT et ON correspondra à la seconde : les points à l'infini correspondent à des ellipsoïdes dégénérés en cylindres. Enfin les points où les droites V = o rencontrent la courbe correspondent à des systèmes de plans parallèles (ABC et A'B'C'), (A'BC et AB'C'), etc. Les points de la courbe à l'origine correspondent aux cônes de révolution du système.

VARIÉTÉS

ESSAIS POUR LES CONIQUES DE PASCAL

AVEC

Des notes par M. **Ch. Laurens**, professeur honoraire.

Introduction. — Les manuscrits que Pascal avait préparés pour rédiger un traité complet sur les coniques dans le style géométrique des anciens, ont été perdus, à l'exception de quelques pages que nous reproduisons, d'après l'édition

des œuvres de Pascal publiée en 1865 par la maison Hachette.

Ces pages que Pascal a intitulées : *Essais pour les coniques*, ne contiennent que des énoncés sans démonstration. Nous croyons être utile aux élèves studieux de mathématiques élémentaires, en rétablissant les démonstrations des énoncés de Pascal, sous la forme géométrique qu'il aurait employée lui-même, et ajoutant quelques applications qui leur permettront de comprendre ce qu'aurait pu être un ouvrage que la science regrette à bon droit.

Aujourd'hui nous possédons le premier volume du *Traité des coniques* de M. Chasles. C'est un des derniers mots de la géométrie moderne sur la théorie des coniques; mais les efforts de Pascal, à la suite de ceux de Désargues, pour dépasser les travaux d'Apollonius ne sont pas seulement remarquables au point de vue historique ; ils ont une valeur intrinsèque que l'on ne peut négliger. Nous engageons vivement nos lecteurs à parcourir les pages de l'aperçu historique que M. Chasles a consacré à l'histoire de la géométrie du XVII[e] siècle.

Les élèves trouveront dans ce qui suit d'utiles exercices, les familiarisant avec la méthode si féconde des transversales; ils comprendront mieux la théorie des coniques que le programme leur impose, mais malheureusement sous une forme étroite, sans aucun avantage de simplicité ou de rigueur, et se prépareront efficacement à l'étude analytique de ces courbes, partie importante du cours de mathématiques spéciales.

Avant de reproduire l'opuscule de Pascal, nous croyons devoir résumer la lettre que Leibnitz a écrite en 1676 sur la mise en ordre des manuscrits de notre auteur.

En première ligne, il a placé un écrit intitulé : *Generatio coni sectionum, tangentium et secantium ; seu projectio peripheriæ, tangentium et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellæ positionibus.*

Le manuscrit placé à la suite porte d'après Pascal le nom d'*Hexagramme mystique;* il contenait la propriété remarquable de l'hexagone inscrit dans une conique, dont les côtés opposés se rencontrent en trois points en ligne droite. Au

dire du père Mersenne, Pascal en avait déduit quatre cents corollaires.

En troisième ligne Leibnitz a mis un opuscule portant le titre suivant : *De quatuor tangentibus et rectis puncta tactuum jungentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrórum proprietates oriantur.* Pascal, dans cet écrit, faisait une appplication continuelle de l'hexagramme mystique.

Leibnitz place à la suite de cet écrit un manuscrit intitulé : *De proportionibus segmentorum et tangentium*; auquel il adjoignait une feuille séparée qui avait pour titre : *De correspondentibus diametrorum;* la troisième page de cette feuille traitait *de summâ et differentiâ laterum seu de focis.*

Le cinquième traité portait le titre : *De tactionibus conicis;* c'est-à-dire (dit Leibnitz), pour que le titre ne trompe pas, *de punctis et rectis quos sectio conica attingit.*

Au dire de Leibnitz, ces cinq écrits formaient un traité complet des coniques ; mais il avait encore sous les yeux d'autres écrits renfermant différents problèmes et aussi les quelques pages que nous reproduisons et qui ont été publiés pour la première fois en 1779 par Bossut dans son édition des œuvres de Pascal. La publication de ce petit travail confirmera le dire de Leibnitz.

§ 1er. — « *Définition 1re*. — Quand plusieurs lignes concourent au même point, ou sont toutes parallèles entre elles, toutes ces lignes sont dites de *même ordre* ou de *même ordonnance*, et la multitude de ces lignes est dite *ordre de lignes* ou *ordonnance de lignes.* »

« *Définition 2.* — Par le mot de *section de cône*, nous entendons la circonférence de cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole et l'angle rectiligne, d'autant qu'un cône coupé parallèlement à sa base ou par son sommet, ou des trois autres sens qui engendrent l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, donne dans sa superficie, ou la circonférence d'un cercle, ou un angle, ou l'ellipse, ou l'hyperbole, ou la parabole. »

« *Définition 3.* — Par le mot de *droite* mis seul, nous entendons la ligne droite. »

« Lemme I. — Si dans le plan MSQ *(fig. 1)*, du point M par-

tent les deux droites MK, MV, et du point S partent les deux droites SK, SV; que K soit le concours des droites MK, SK; V le point de concours des droites MT, SV; A le concours des droites MK, SV; M le point de concours des droites MV, SK, et que par deux des quatre points A, K, M, V, qui ne

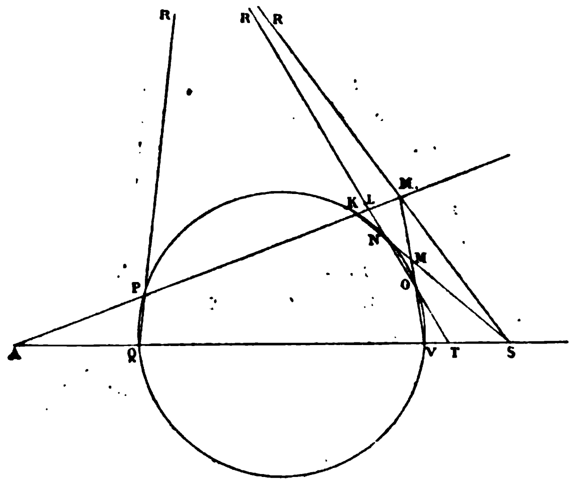


Fig. 1.

sont pas en ligne droite avec les points M, S, comme par K et V, passe la circonférence d'un cercle coupant les droites MV, MA, SV, SK, aux points O, P, Q, N, je dis que les droites MS, NO, PQ sont de même ordre. »

Note 1. — Ce lemme n'est autre que le théorème sur l'hexagone inscrit qui porte le nom de Pascal et qu'il avait appelé hexagramme mystique à cause des nombreuses conséquences que l'on peut en déduire. Considérons en effet *(fig. 1)* l'hexagone KNOVQPK; les côtés opposés KN et VQ se rencontrent en S; les côtés VO, PK en M; NO et PQ en R; le théorème de Pascal, tel qu'on l'énonce habituellement, consiste en ceci, que les trois points R, M, S, sont en ligne droite; c'est-à-dire que les droites PQ, NO, MS se rencontrent en un même point ou sont parallèles, c'est-à-dire, d'après l'énoncé de Pascal, sont de même ordre.

Nous ne sommes pas éloigné de croire que Pascal a obtenu cet important théorème en considérant un hexagone inscrit dans un cercle ayant deux couples de côtés opposés parallèles, ce qui entraîne le parallélisme des deux autres côtés ; mais la place de ce théorème dans l'ordre des énoncés de Pascal paraît exclure dans la démonstration que l'auteur avait adoptée, l'emploi de la méthode des projections que lui et Désargues employaient cependant fréquemment, et que dans l'un des lemmes suivants, Pascal emploie pour étendre aux coniques le théorème établi pour le cercle.

Nous croyons que la démonstration de l'hexagramme mystique relatif au cercle devait être fondée sur la théorie des transversales ; nous reproduisons la démonstration connue.

Dans l'hexagone PKNOVQP, considérons le triangle LTA formé par trois côtés non consécutifs PK, NO, VQ. Il est coupé par les trois autres côtés KN, OV, PQ ; le théorème des transversales appliqué à ces trois droites donne les trois égalités :

$$\frac{LK}{AK}\cdot\frac{TN}{LN}\cdot\frac{AS}{TS}=1;\ \frac{AV}{TV}\cdot\frac{TO}{LO}\cdot\frac{LM}{AM}=1;\ \frac{AQ}{TQ}\cdot\frac{LP}{AP}\cdot\frac{TR}{LR}=1.$$

Si nous concevons qu'on ait multiplié membre à membre ces trois égalités, et simplifié le résultat en remarquant que :

$LK.LP = LN.LO$; $TN.TO = TV.TQ$; $HQ.AV = AP.AK$;

on obtient : $$\frac{AS}{TS}\cdot\frac{TR}{LR}\cdot\frac{LM}{AM}=1,$$

identité qui exprime que les trois points S, M, R, sont en ligne droite, ce qui démontre le théorème.

§ 2. — « Lemme II. — Si par la même droite passent plusieurs plans qui soient coupés par un autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de même ordre avec la droite par laquelle passent lesdits plans. »

« Ces deux lemmes posés et quelques faciles conséquences tirées d'iceux, nous démontrerons que les mêmes choses étant posées qu'au premier lemme, si par les points K, V, de la figure du lemme I passe une section quelconque du cône

qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, aux points P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, seront de même ordre. Cela sera un troisième lemme. »

« Ensuite de ces trois lemmes et de quelques conséquences d'iceux, nous donnerons des éléments coniques complets : à savoir toutes les propriétés des diamètres et des côtés droits, des tangentes et la restitution du cône presque sur toutes les données, la description des sections du cône par points. »

Note 2. — Le second lemme est le point de départ de la théorie des projections centrales; on peut l'énoncer ainsi : Les perspectives d'un système quelconque de droites parallèles ou concourantes sont parallèles ou concourantes. Nous n'insisterons pas sur la démonstration. On sait que les projections centrales ont été surtout étudiées par Poncelet, dans son bel ouvrage des propriétés projectives des figures, et on peut voir dans ce livre toute la fécondité de cette théorie.

Le troisième lemme est une conséquence immédiate des deux premiers. Concevons un cône ayant pour base la circonférence de la figure 1, et des plans passant par le sommet du cône et les côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle; si nous coupons le cône et les plans par un nouveau plan arbitraire, nous obtiendrons une conique dans laquelle sera inscrit un nouvel hexagone; les points de rencontre des côtés opposés du nouvel hexagone seront évidemment en ligne droite. Ainsi se trouve étendu à toutes les coniques l'hexagone mystique de Pascal, fondement du traité qu'a préparé Pascal.

Nous indiquerons rapidement quelques applications importantes de ce théorème.

1° Construire une conique par points.

Soient BAFED cinq points d'une conique *(fig. 2)*; menons par D une droite quelconque, et proposons-nous de trouver sur cette droite le point C inconnu appartenant à la conique. Ce point C forme avec les points donnés un hexagone inscrit dans la conique. AB et ED se rencontrent en M; AF et DC, dont les directions sont connues, se rencontrent en N;

donc le côté EF, et le côté BC dont la direction est inconnue, doivent se rencontrer en un point P situé sur MN; or, EF rencontre MN au point P, donc la direction PBC sera celle du côté BC, et le point C où PB rencontre DC sera le point cherché.

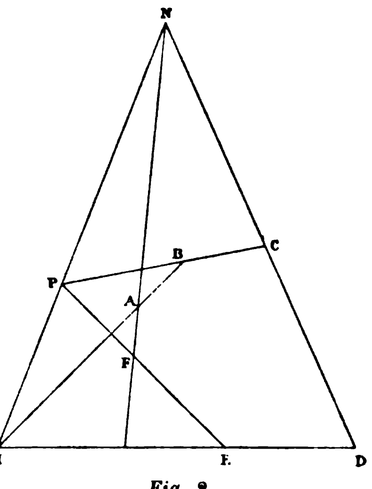


Fig. 2.

2° Mener une tangente à une conique par un point pris sur la courbe.

A, C, D, E, F étant cinq points d'une conique, proposons-nous de mener par A une tangente à la courbe; on peut regarder *(fig. 3)* la tangente au point A comme étant le sixième côté infiniment petit d'un hexagone inscrit dans la conique que déterminent les cinq points, les côtés opposés de cet hexagone, à savoir AF et CD, AC et FE, se

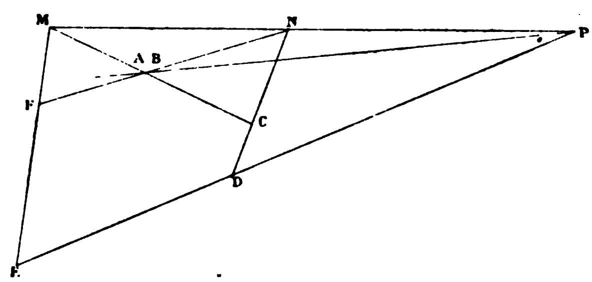


Fig. 3.

rencontrent en N et M, donc le point de concours de la tangente en A et du côté ED doit se trouver sur MN; ED rencontre MN au point P, donc AP sera la tangente.

3° La propriété du centre des coniques découle de l'hexagramme mystique.

Considérons *(fig. 4)* une des coniques, ellipse ou hyperbole,

à laquelle on peut mener deux tangentes parallèles ; soient B et F les deux points de de contact et O le milieu BF ; O est le centre de la conique, qui divise en deux parties égales les cordes passant par ce point. Soit pris en effet un point A quelconque sur la courbe que nous joignons au point B. Par F menons une parallèle AF à BD ; joignons AF, BD ; le quadrilatère ABDF peut être regardé comme un hexagone ABCDEFA ayant deux côtés BC, FE infiniment petits se confondant avec les tangentes en ces points.

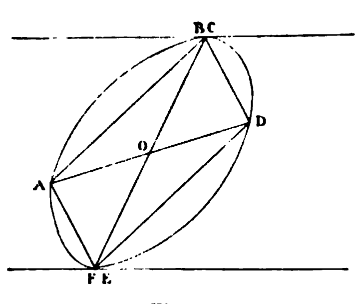


Fig. 4.

Les côtés AB, FD parallèles ont leur point de concours à l'infini, il en est de même des tangentes BC, FE ; la droite qui joint ces deux points étant à l'infini, les côtés BD, AF se rencontreront sur une droite à l'infini, et par suite sont parallèles. La figure ABDF est un parallélogramme, et la corde AD passant par le milieu O de BF est partagée en ce point en deux parties égales.

4° Les milieux d'un système de cordes parallèles dans une conique sont en ligne droite.

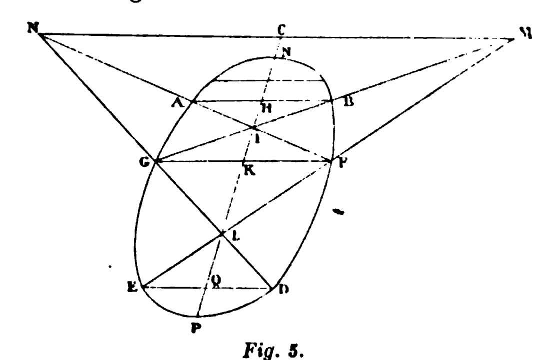


Fig. 5.

Soient *(fig. 5)* AB, CF, AD trois cordes parallèles quelconques. Considérons l'hexagone ABCDEFA. Les côtés op-

posés AB, DE sont parallèles et se rencontrent à l'infini; BC et EF concourent en M; AF et CD en N; donc MN est parallèle aux droites AB, ED, par suite à CF.

La droite HK qui joint le milieu de AB au milieu de CF passe par le point I intersection des diagonales du trapèze ABCF et par suite par le milieu G de MN parallèle à AB.

La droite KQ, qui joint le milieu de CF au milieu de ED passe par le point de concours des diagonales CD, EF du trapèze CFED et par suite par le milieu G de MN parallèle à ED. Donc les trois points H, K, N des trois cordes parallèles sont sur une ligne droite NP, diamètre de la courbe.

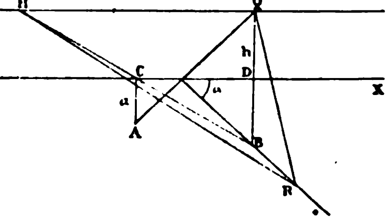
On prévoit qu'il n'est pas difficile de conclure que les tangentes aux extrémités NP du diamètre sont paralèlles aux cordes divisées par le diamètre en deux parties égales, qu'il existe une infinité de diamètres conjugués, et un système d'axes ou diamètres conjugués rectangulaires. Nous ne croyons pas devoir insister. *(A suivre.)*

QUESTION 143.

Solution par M. Henrique, élève du Lycée de Bordeaux.

Par un point fixe A *on mène une droite coupant deux parallèles données en* P *et* Q. *Par les points* P *et* Q *on mène des droites respectivement parallèles à des droites données et le coupant en* R. *Prouver que le lieu de* R *est une droite.*

Posons AC $= a$ et soit QD $= h$ la distance des deux parallèles. La droite QD prolongée rencontre PR en B.



Soit α l'angle constant RPX.

A cause des triangles semblables ACP et PQD on a : $\frac{PD}{CD} = \frac{h}{a+h}$.

Or $$PD = DB \cot g\alpha$$

donc $$\frac{DB}{CD} = \frac{h}{a+h} \operatorname{tg}\alpha.$$

Le rapport $\frac{DB}{CD}$ étant constant et l'angle CDB étant droit, le triangle CDB est toujours semblable à lui-même et par suite l'angle DCB est constant. Donc le lieu du point B est la droite CB.

Le triangle QBR a ses côtés parallèles respectivement à des directions constantes, et deux de ses sommets Q et B se meuvent respectivement sur les droites HQ et HB ; donc le troisième sommet se meut sur la droite HR.

QUESTION 165.

Solution par M. Bucheron, élève du Lycée de Moulins.

---

b *et* c *sont deux côtés d'un triangle,* l *et* l' *les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle compris. Il existe entre ces quatre longueurs la relation*

$$b^2c^2\,4 = l^2(b+c)^2 + l'^2(b-c)^2. \quad \text{(Launoy.)}$$

On a $$l^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

et $$l'^2 = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - bc.$$

Éliminant a^2bc entre ces formules, on a :

$$bc(b+c)^2 - l^2(b+c)^2 = l'^2(c-b)^2 + bc(c-b)^2;$$

effectuant et réduisant on a :

$$4b^2c^2 = l^2(b+c)^2 + l'^2(b-c)^2.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, à Grenoble; Objois, à Moulins; Girod, à Belley; Deslais, au Mans; Elie, Collège Stanislas; Cadot, Lycée Saint-Louis; Longueville, à Charleville; Ferber, à Lyon; Gino Loria, à Mantoue (Italie); Schlesser, à Saint-Quentin; Blessel, piqueur au service des ponts et chaussées, à Paris; Boulogne, à Saint-Quentin.

QUESTION 168.

Solution par M. Marin, élève du Lycée d'Agen.

Étant donné un trapèze isoscèle trouver par la géométrie une relation entre sa hauteur, sa surface, le rayon du cercle circonscrit et l'un des côtés non parallèles.

Soit ABCD un trapèze isoscèle inscrit dans un cercle O; et soient HK $= h$ sa hauteur, DC $= a$ et r le rayon du cercle O.

On a $\quad S = 2NN.\ h.$

Mais les triangles semblables NNO et EDC donnent

$$\frac{NN}{NO} = \frac{h}{a}.$$

Or $\overline{NO}^2 = r^2 - \frac{4}{a^2}$,

d'où $$NO = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}.$$

Alors $$\frac{NN}{h} = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2a};$$

d'où $$NN = \frac{h}{2a}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

et par suite $$S = \frac{h^2}{a}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Deslais, du Mans; Longueville, de Charleville.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

229. — Construire un triangle ABC connaissant les points M, N, P, milieux des arcs sous-tendus par les côtés BC, AC. AB dans le cercle circonscrit au triangle.

230. — Construire un triangle, connaissant les points de rencontre du cercle circonscrit avec les hauteurs du triangle.

231. — Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit les carrés ABED, ACGF, BCHI. Connaissant les points de rencontre des droites ED, FG, HI, construire le triangle.

232. — Construire un triangle, connaissant les points de rencontre α, β, γ du cercle circonscrit avec la bissectrice, la médiane et la hauteur issues d'un même sommet.

Mathématiques spéciales.

233. — Du centre d'un cercle, on abaisse des perpendiculaires OT sur les tangentes à un autre cercle, et sur chacune d'elles on prend, à partir du point T et de part et d'autre de la tangente, des longueurs égales $TP = TP'$, telles que l'on ait $OP, OP' = K^2$. Trouver le lieu des points P et P'.

234. — Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position. Son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers.

235. — Connaissant un foyer d'une ellipse, l'excentricité et un point, trouver l'enveloppe des directrices.

236. — Lieu du sommet d'un triangle dont les deux côtés issus du sommet touchent une conique donnée, tandis que les deux autres sommets parcourent une seconde conique donnée.

237. — Étant donnée une conique à centre rapportée à un foyer, trouver l'expression de la longueur de l'axe non focal. Applications au lieu des sommets des ellipses qui ont un foyer et un point communs, et pour lesquelles la longueur du petit axe est la même.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KOEHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 2528-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 97 et suiv.)

XXIII. **Problème.** — *Construire les normales à l'ellipse issues d'un point donné du petit axe.*

Si dans l'équation du théorème précédent, on fait $l = c$, le point R se confond avec le centre de l'ellipse et le point P se trouve sur le petit axe ; on a pour RP deux valeurs nulles auxquelles correspondent deux normales qui coïncident avec le petit axe et deux autres valeurs données par l'équation $a^2\overline{RD}^2 - a^2c^2 + b^2(d^2 + c^2) = 0.$

Le point R du théorème précédent coïncidant avec le point O, on a (*fig. 10*) dans le triangle OPD

$$\overline{PD}^2 = d^2 + \overline{OD}^2,$$

et en substituant dans l'équation la valeur de $\overline{OD}^2$ tirée de cette relation, on a

$$a^2(\overline{PD}^2 - d^2) - a^2c^2 + b^2(d^2 + c^2) = 0$$

ou
$$a^2\overline{PD}^2 = c^2(d^2 + c^2) = c^2\overline{PF}^2$$

ce qui donne la proportion

$$\frac{PD}{c} = \frac{PF}{a}.$$

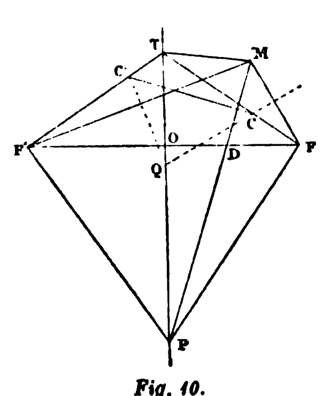


Fig. 10.

Le point P étant donné, on construit les normales issues de ce point de la manière suivante : on prend sur PF et PF' une longueur égale à a par un arc de cercle de centre P, on joint les points obtenus, et la ligne qui joint ces deux points est coupée par le cercle décrit du point P comme centre avec c pour rayon

en deux points qu'il suffit de joindre au point P pour avoir deux normales répondant à la question.

Remarque. — Cette construction peut s'appliquer seule lorsque l'ellipse est tracée, à la place du cercle circonscrit au triangle PFF' qui donne également le point M; mais si l'ellipse n'est pas tracée, les deux constructions simultanées sont nécessaires et donnent le point M avec sa normale et sa tangente.

XXIV. **Théorème.** — *Le cercle qui passe par les trois points* M, D, F (fig. 10) *est tangent à la droite* PF.

On a démontré (*Journal de Math. élém.*, 3[e] année, p. 199, III) la relation

$$\frac{PF}{PM} = \frac{c}{a}$$

et on vient de trouver par le problème XXIII

$$\frac{PF}{PD} = \frac{a}{c};$$

on en déduit, en multipliant membre à membre,

$$\overline{PF}^2 = PD \times PM;$$

donc la droite PF est bien tangente au cercle PDM. Le centre de ce cercle est évidemment sur FT' perpendiculaire à PF; il se trouve donc au point C où la perpendiculaire élevée sur le milieu de MF vient rencontrer FT'.

Corollaire I. — Le cercle qui passe par les trois points M, D, F' est aussi tangent à PF', puisque PF' = PF, et son centre C' est à l'intersection de F'T' et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de MF'.

Corollaire II. — La ligne CC' que l'on vient de définir est perpendiculaire à la normale MD, car elle forme la ligne des centres de deux cercles qui ont la ligne MD pour corde commune; de plus, CC' partage la longueur MD en deux parties égales.

Corollaire III. — Soit O' le point où se coupent les perpendiculaires élevées sur les milieux des rayons vecteurs; O' se trouve évidemment sur le petit axe de la courbe, puisque c'est le centre du cercle qui passe par les points F', P, F, M, T'.

L'angle COC' est supplémentaire de FMF' et par suite de son égal CT'C ; le quadrilatère CO'CT' est inscriptible dans un cercle.

XXV. **Théorème.** — *Si par les points où les normales issues d'un point* P *et menées à une ellipse rencontrent le grand axe, on mène des parallèles aux rayons vecteurs du point correspondant et qu'on abaisse des perpendiculaires du point P sur ces parallèles, les points obtenus sont sur un cercle de centre P.*

Pour le démontrer, il faut se reporter à la figure 9; les triangles PRD et MDH, étant semblables, donnent la proportion

$$\frac{PR}{PD} = \frac{MH}{MD};$$

on a posé PR $= d$, et on a trouvé (XXII) pour le rapport $\frac{MH}{MD}$ la valeur $\frac{a \sin \alpha}{c}$, ce qui donne

$$\frac{PR}{PD} = \frac{a \sin \alpha}{c};$$

d'où

$$PD \sin \alpha = \frac{dc}{a}.$$

Soit DK parallèle à MF' et PK perpendiculaire sur cette parallèle, l'angle PDK étant égal à α, on a

$$PK = PD \sin \alpha = \frac{dc}{a}.$$

La longueur PK ne dépend donc que de la distance d; or, on sait que, dans le cas général, on peut du point P mener quatre normales à l'ellipse; à chacune de ces normales correspondent deux parallèles analogues à DK, et par suite huit points tels que K dont la distance au point P est la même, c'est-à-dire qu'ils sont tous sur un cercle décrit du point P comme centre avec $\frac{dc}{a}$ pour rayon, et ce rayon sera le même pour tous les cercles pareils dont les centres seront sur une parallèle au grand axe menée à la distance d.

XXVI. **Théorème.** — *Si deux normales issues d'un point du plan d'une ellipse ont même longueur,* d *désignant la distance de ce point au grand axe,* 2α *et* $2\alpha'$ *les angles des rayons*

vecteurs des points où aboutissent les normales, on a la relation

$$tg\,\alpha\,tg\,\alpha'\,tg\,\frac{\alpha+\alpha'}{2}=\frac{dc}{b^2}.$$

En se reportant à la figure 9, théorème XXII, on voit que

$$PM = PD + DM;$$

or (XX) $$DM=\frac{b^2}{a\cos\alpha}$$

et (XXV) $$PD=\frac{dc}{a\sin\alpha};$$

d'où $$PM=\frac{dc}{a\sin\alpha}+\frac{b^2}{a\cos\alpha}.$$

De même, PM′ étant une seconde normale,

$$PM'=\frac{dc}{a\sin\alpha'}+\frac{b^2}{a\cos\alpha'}$$

et la condition PM = PM′ donnée dans l'énoncé conduit à la suivante :

$$\frac{dc}{a}\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha'}\right)=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{\cos\alpha'}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

ou $$\frac{dc\,(\sin\alpha'-\sin\alpha)}{\sin\alpha\sin\alpha'}=\frac{b^2\,(\cos\alpha-\cos\alpha')}{\cos\alpha\cos\alpha'};$$

or $$\sin\alpha'-\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\alpha'=-2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}.$$

En substituant ces valeurs dans la relation précédente et divisant les deux membres de cette relation par le facteur $\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}$, on trouve

$$\frac{dc\cos\frac{\alpha+\alpha'}{2}}{\sin\alpha\sin\alpha'}=\frac{b^2\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\alpha'}.$$

d'où l'on déduit la relation cherchée

$$tg\,\alpha\,tg\,\alpha'\,tg\,\frac{\alpha+\alpha'}{2}=\frac{dc}{b^2}$$

XXVII. *Rayon et centre du cercle osculateur en un point d'une ellipse.*

Si du point P défini dans le théorème précédent par cette condition que deux des normales issues de ce point sont égales, on décrit un cercle de rayon égal à leur longueur commune, ce cercle sera tangent à l'ellipse aux deux points où aboutissent les normales; il sera alors doublement tangent à l'ellipse.

Cela étant, soient PM et PM′ ces deux normales; si la première reste fixe et si l'on suppose que le point P se meut sur elle de telle sorte que les normales qui partent de ce point soient toujours égales, il arrivera un moment où le point P occupera sur PM une position telle que les deux normales PM et PM′ n'en formeront plus qu'une; comme elles n'auront point cessé d'être égales, la relation du théorème précédent sera encore vraie et la position du point P sur la normale PM sera définie par cette même relation dans laquelle $\alpha' = \alpha$, c'est-à-dire par

$$\mathrm{tg}^3 \alpha = \frac{dc}{b^2}. \qquad (1)$$

La parallèle au grand axe menée à la distance d ainsi définie rencontrera la normale PM au point P.

Le cercle considéré ci-dessus sera devenu le *cercle osculateur* à l'ellipse au point M, et le point P que l'on vient de construire sera son centre.

Comme à la valeur de α ne correspond qu'une seule valeur pour d, on en conclut que la normale PM ne contient qu'un seul point jouissant de cette propriété que deux des normales issues de ce point et menées à l'ellipse sont confondues. Chaque normale à l'ellipse contient un pareil point et le lieu de tous ces points constitue la *développée* de l'ellipse.

Quant à la valeur R du rayon du cercle osculateur au point M, elle sera donnée par l'expression

$$R = \frac{dc}{a \sin \alpha} + \frac{b^2}{a \cos \alpha},$$

d ayant la valeur donnée par la relation (1).

On a $$Ra \sin \alpha = dc + b^2 \operatorname{tg} \alpha$$
et comme en vertu de (1)
$$dc = b^2 \operatorname{tg}^3 \alpha,$$
il vient $$Ra \sin \alpha = b^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{b^2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha};$$
d'où $$R = \frac{b^2}{a \cos^3 \alpha}.$$
Si l'on remarque que
$$N = \frac{b^2}{a \cos \alpha} \text{ (XX)},$$
on obtient une seconde expression de R, savoir
$$R = \frac{N}{\cos^2 \alpha},$$
d'où la construction suivante de R : MD (*fig. 11*) étant la normale en M, en D on élève une perpendiculaire à MD, qui rencontre le rayon vecteur MF′ au point I; en ce point on élève une perpendiculaire à F′M; cette perpendiculaire coupe la normale MD au point R tel que
$$MR = \frac{N}{\cos^2 \alpha}.$$

Fig. 11.

Enfin, on a obtenu (VIII, remarque)
$$\cos \alpha = \frac{b}{b'},$$
on en déduit $$R = \frac{b'^3}{ab}.$$
On trouvera la construction de R, partant de cette expression, dans le *Journal*, 3e année, p. 165 et suivantes.

XXVIII. **Théorème.** — *Il existe entre les rayons vecteurs* MF *et* MF′ *d'un point* M *d'une ellipse, le rayon* R *du cercle osculateur en ce point et* α *le demi-angle des rayons secteurs, la relation* $$\frac{1}{MF} + \frac{1}{MF'} = \frac{2}{R \cos \alpha}.$$

En effet, si dans la première expression de R que l'on vient d'obtenir, on remplace $\frac{b^2}{\cos^2 \alpha}$ par le produit $MF \times MF'$ (V) et si l'on remarque que

$$a = \frac{MF + MF'}{2},$$

on peut écrire $$R = \frac{2MF \times MF'}{\cos \alpha \, (MF \times MF')}$$

ou $$\frac{MF + MF'}{MF \times MF'} = \frac{2}{R \cos \alpha},$$

relation qui conduit immédiatement à celle de l'énoncé.

REMARQUE. — Soit *(fig. 12)* un cercle de centre O, PAB un diamètre, PM une tangente et MQ la corde des contacts;

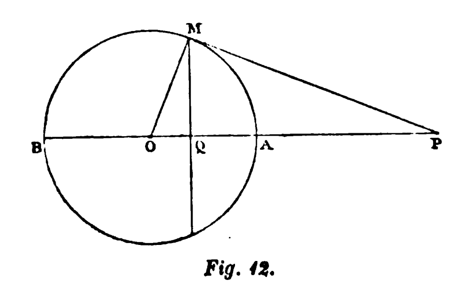


Fig. 12.

le triangle rectangle PMO donne

$$\overline{PM}^2 \text{ ou } PA \times PB = PQ \times PO;$$

or $$PO = \frac{PA + PB}{2},$$

donc $$PA \times PB = PQ \times \frac{PA + PB}{2};$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{2}{PQ}.$$

Cela étant, soient *(fig. 13)* MF et MF' les rayons vecteurs du point M d'une ellipse; sur MF' on prend une longueur $MF_1 = MF$ et si I est le milieu de $F'F_1$

$$MI = \frac{MF' + MF_1}{2} = a.$$

Si TQ est la corde des contacts des tangentes issues du point M et menées au cercle décrit du point I comme centre avec IF′ pour rayon, on a, comme on vient de le voir,

$$\frac{1}{MF} + \frac{1}{MF_1} = \frac{2}{MQ}$$

et par suite $$\frac{2}{MQ} = \frac{2}{R\cos\alpha};$$

d'où $$R = \frac{MQ}{\cos\alpha}.$$

La polaire TQ prolongée rencontre précisément la normale en M au point R tel que MR = R, c'est-à-dire au centre du cercle osculateur en M.

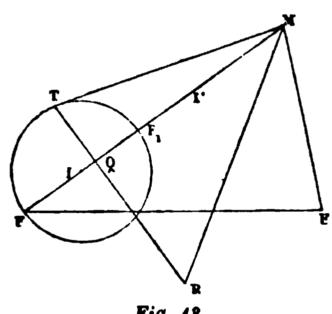


Fig. 13.

On déduit alors la construction suivante du rayon MR: sur l'un des rayons vecteurs MF′ on prend une longueur MI = a; avec IF′ pour rayon on décrit un cercle de centre I; on prend MI′ = $\frac{a}{2}$ et du point I′ comme centre avec I′M pour rayon on décrit un nouveau cercle; la corde TQ commune à ces deux cercles rencontre la normale en M au point R tel que MR = R. *(A suivre.)*

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Pajon**, Professeur au Lycée de Cahors.

Loi des variations de la fraction du premier degré

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

x *croissant d'une manière continue depuis* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$.

Les variations de la fraction du premier degré sont soumises à une loi générale très simple dont l'application est

utile dans la discussion de toute une classe de formules. Cette loi n'étant ni établie, ni énoncée dans les ouvrages classiques d'algèbre, nous croyons devoir traiter cette question dans l'intérêt des élèves.

Nous supposons évidemment qu'entre les coefficients a, b, a', b' on n'a pas la relation $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. On sait que dans ce cas la fraction est constante et égale à $\frac{a}{a'}$.

I. *Continuité de la fonction.* — On démontre d'abord que le binôme $Mx + N$ est continu et croît depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ou décroît depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, selon que M est positif ou négatif.

De la continuité des deux termes on déduit aisément celle de la fraction. Soit $\frac{A}{B}$ la valeur déterminée que prend y lorsqu'on donne à x une valeur quelconque autre que $-\frac{b'}{a'}$; α, β, k, les accroissements positifs ou négatifs de A, de B et de $\frac{A}{B}$ lorsque x augmente d'une quantité positive h aussi petite qu'on voudra. On a :

$$k = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B^2 + B\beta},$$

d'où il est facile de conclure que k tend vers zéro.

Lorsque la variable x passe par la valeur $-\frac{b'}{a'}$, le dénominateur d'y s'annule en changeant de signe, le numérateur conservant le sien ; la fraction passe alors par l'infini en changeant de signe à ce passage.

II. *La fraction du premier degré varie dans le même sens que la variable* x *ou en sens contraire selon que* $ab' - ba'$ *est positif ou négatif.* — La fonction y, étant continue et ne passant qu'une seule fois par chaque valeur, puisque à une valeur d'y ne répond qu'une seule valeur d'x, est toujours croissante ou toujours décroissante. Il suffit donc de déterminer le sens de sa variation lorsque x passe par deux valeurs quelconques.

Or pour $x = \pm \infty$ on a $y = \frac{a}{a'}$. Soit k l'accroissement d'y lorsque x croît de n à $+\infty$, n étant aussi grand qu'on voudra. On a :

$$k = \frac{a}{a'} - \frac{an + b}{a'n + b'} = \frac{ab' - ba'}{a'^2 n + a'b'},$$

le dénominateur étant positif; si n est suffisamment grand, le signe de k est le même que celui de $ab' - ba'$.

Donc selon que $ab' - ba'$ est positif ou négatif, la fonction varie dans le même sens que la variable ou en sens contraire.

III. *Loi générale des variations de la fraction.* — Nous avons supposé que x croît depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Si $ab' - ba'$ est positif, y croît depuis $\frac{a}{a'}$ jusqu'à $+\infty$, passe brusquement à $-\infty$ et croît depuis $-\infty$ jusqu'à $\frac{a}{a'}$. Si $ab' - ba'$ est négatif, y décroît depuis $\frac{a}{a'}$ jusqu'à $-\infty$, passe brusquement à $+\infty$ et décroît depuis $+\infty$ jusqu'à $\frac{a}{a'}$.

IV. *Applications.* — 1° *Discuter la formule des miroirs concaves*

$$p' = \frac{fp}{p - f}.$$

On a : $ab' - ba' = -f^2$; donc p' varie en sens inverse de p. Supposons que p décroisse depuis $+\infty$ jusqu'à zéro, la formule donne les valeurs correspondantes :

$$\begin{cases} p = +\infty & p = 2f & p = f & p = 0 \\ p' = f & p' = 2f & p' = \pm\infty & p' = 0 \end{cases}$$

et l'on conclut immédiatement les sept cas donnés dans les traités de physique.

2° *Étant donné* $\sin x = \frac{m + 10}{2m + 1}$, *déterminer les limites de* m, *l'angle* x *restant compris entre* 0° *et* 180°.

On a : $ab' - ba' = -19$; donc m varie en sens inverse de $\sin x$. La formule donne les valeurs correspondantes :

$$\begin{cases} \sin x = 0 & \sin x = 1 \\ m = -10 & m = 9 \end{cases}$$

Donc $\sin x$ croissant depuis zéro jusqu'à 1, m décroît de -10 à $-\infty$, passe brusquement à $+\infty$ et décroît ensuite jusqu'à 9.

3° *Couper une sphère par un plan de manière que le volume de l'un des segments ainsi obtenus soit une fraction donnée* k *du volume du cylindre qui aurait même base et même hauteur que le segment sphérique.*

Entre quelles limites peut varier k ?

(Baccalauréat ès sciences, Montpellier, 14 juillet 1879.)

La hauteur du segment sphérique étant représentée par x, on trouve la formule:

$$x = \frac{3R(2K-1)}{3K-1};$$

3R étant constante, x varie dans le même sens que la fraction $\frac{2K-1}{3K-1}$, et comme cette fraction donne : $ab' - ba' = 1$, x et K varient dans le même sens. Or, la formule donne:

$$\begin{cases} x = 0 & x = 2R \\ K = \frac{1}{2} & K = \infty \end{cases}$$

Donc x croissant de 0 à 2R, K croît depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\infty$.

4° *Dans quelle direction faut-il lancer une bille élastique pour qu'après trois réflexions sur un billard circulaire elle revienne au point de départ? Examiner le cas où la bille placée en dehors pourrait pénétrer librement dans l'intérieur du cercle et revenir librement au point de départ.*

Il suffit évidemment de déterminer le premier point d'incidence, le second point étant à l'extrémité du diamètre passant par la position initiale de la bille, et le troisième étant symétrique du premier par rapport à ce diamètre.

R étant le rayon donné du billard, d la distance donnée de la bille au centre, x la projection du rayon mené au premier point d'incidence sur le diamètre qui passe par la bille, on obtient la formule:

$$x = \frac{R(R-d)}{2d}.$$

La fraction $\frac{-d+R}{2d}$ donnant $ab'-ba'=-2R$, a et x varient en sens inverse l'un de l'autre. Or, d'après la formule, si $x=R$, on a $d=\frac{R}{3}$, et si $d=\infty$, on a $x=-\frac{R}{2}$. Donc si d croît depuis son minimum $\frac{R}{3}$ jusqu'à $+\infty$, x décroît depuis son maximum R jusqu'à $-\frac{R}{2}$ son minimum, et l'on a le tableau des valeurs principales :

$$\left\{\begin{array}{llll} d=\frac{R}{3} & d=\frac{R}{2} & d=R & d=+\infty \\ x=R & x=\frac{R}{2} & x=0 & x=-\frac{R}{2} \end{array}\right.$$

Remarque générale.

Lorsqu'il s'agit de déterminer par les méthodes élémentaires les limites d'une fonction ou de sa variable dans des conditions particulières, la loi des variations de cette fonction fournit, en général, un moyen plus simple et plus sûr que l'emploi des inégalités. La question suivante posée aux examens oraux pour Saint-Cyr (1879) en offre un exemple assez remarquable.

Trouver le maximum et le minimum de la surface du trapèze formé dans une ellipse par la distance focale, deux rayons vecteurs parallèles et de même sens et la droite qui joint leurs extrémités.

α désignant l'angle des rayons vecteurs cherchés avec le grand axe $2a$, $2b$ le petit axe et $2c$ la distance focale, l'expression de la surface de ce trapèze est

$$S=\frac{2ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha},$$

et à cause de la quantité constante $2ab^2c$, il s'agit de trouver le maximum et le minimum de la fraction

$$y=\frac{\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}$$

lorsque $\sin\alpha$ croît depuis 0 jusqu'à 1. Dans ces limites, y

est toujours positif et l'on a les valeurs correspondantes:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sin\alpha = 0 & \sin\alpha = 1 \\ y = 0 & y = \dfrac{1}{b^2 + c^2} \end{array}\right.$$

Le minimum cherché est donc zéro, et le maximum serait $\frac{1}{b^2 + c^2}$ si pendant que $\sin\alpha$ croît de o à 1, y croissait constamment.

Or, si l'on cherche les variations d'y en remplaçant $\sin\alpha$ par une variable indépendante z, croissant depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on trouve que la fonction y croît depuis o jusqu'à son maximum algébrique $\frac{1}{2bc}$ lorsque z croît depuis o jusqu'à $\frac{b}{c}$. Il faut donc distinguer trois cas :

1° $\frac{b}{c} < 1$. On a les valeurs correspondantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} z = 0 & z = \dfrac{b}{c} & z = 1 \\ y = 0 & y = \dfrac{1}{2bc} \text{ maximum}; & y = \dfrac{1}{b^2 + c^2} \end{array}\right.$$

Dans ce cas, $\sin\alpha$ croissant depuis o jusqu'à 1, y croît depuis o jusqu'à son maximum $\frac{1}{2bc}$ et décroît ensuite jusqu'à $\frac{1}{b^2 + c^2}$. Donc le maximum du trapèze a lieu lorsque $\sin\alpha = \frac{b}{c}$. Sa surface est alors égale à ab, et les rayons vecteurs qui forment ses bases sont parallèles à la corde qui joint les extrémités des deux axes.

2° $\frac{b}{c} > 1$. On a les valeurs correspondantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} z = 0 & z = 1 & z = \dfrac{b}{c} \\ y = 0 & y = \dfrac{1}{b^2 + c^2} & y = \dfrac{1}{2bc} \end{array}\right.$$

Dans ce cas, $\sin\alpha$ croissant depuis o jusqu'à 1, y croît depuis o jusqu'à $\frac{1}{b^2 + c^2}$, valeur qui devient ainsi son maxi-

mum. Le trapèze maximum est alors un rectangle dont la surface est égale à $\frac{2b^2c}{a}$.

3° $\frac{b}{c} = 1$. On a, dans ce cas :

$$z = 0 \qquad z = \frac{b}{c} = 1$$

$$y = 0 \qquad y = \frac{1}{2bc} = \frac{1}{b^2 + c^2} = \frac{1}{2b^2}$$

Le trapèze maximum est encore un rectangle, et sa surface est égale à ab.

ÉTUDE SUR UNE LIGNE REMARQUABLE DU TRIANGLE

ANTIBISSECTRICE

Par **Maurice d'Ocagne,** élève en Mathématiques spéciales
au Lycée Fontanes.

DÉFINITION. — Cette note a pour but l'exposé des principales propriétés d'un élément nouveau que je propose d'introduire dans l'étude du triangle.

Cet élément est *la droite qui joint un sommet d'un triangle au symétrique, sur le côté opposé, du pied de la bissectrice correspondante, par rapport au milieu de ce côté.*

Je dois ajouter que, dans ce qui suit, je donne à cette ligne le nom d'*antibissectrice* relative au sommet considéré.

PROPRIÉTÉS DE L'ANTIBISSECTRICE. — Je me contenterai d'énoncer les propriétés suivantes dont les démonstrations sont assez simples pour que j'aie cru pouvoir me dispenser de les donner ici.

I. — *Les distances d'un point quelconque d'une antibissectrice aux côtés adjacents du triangle, sont inversement proportionnelles aux carrés de ces côtés.*

Il suffit pour le démontrer d'abaisser, du pied de l'antibissectrice et du pied de la bissectrice sur l'un des côtés, des

perpendiculaires sur les deux autres côtés. On a des triangles semblables qui donnent la propriété énoncée.

II. — *Les distances du pied d'une antibissectrice aux côtés adjacents du triangle sont proportionnelles aux carrés des segments déterminés sur la base par ce point.*

III. — *Les trois antibissectrices d'un triangle concourent en un même point, dont les distances* d', d'', d''' *aux côtés* a, b, c *sont liées par la relation* $a^2d' = b^2d'' = c^2d'''$.

IV. — *Le point de concours des antibissectrices est le barycentre des sommets du triangle affectés des coefficients* coséc A, coséc B, coséc C.

Relations métriques. — 1° *Longueur de l'antibissectrice.* Si on considère, dans le triangle ABC la hauteur AH, la bissectrice AD, la médiane AM et l'antibissectrice AI, on remarque que AM est médiane, dans le triangle DAI.

Donc $$\overline{AI}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AM}^2 + \frac{\overline{DI}^2}{2}$$

et $$\overline{AI}^2 - \overline{AD}^2 = 2DI \times HM.$$

Ajoutant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$2\overline{AI}^2 = 2\overline{AM}^2 + \frac{\overline{DI}^2}{2} + 2\,HM \times DI.$$

Remplaçant AM, DI, HM par leurs valeurs que l'on sait calculer, on trouve en posant $AI = l$

$$l = \frac{\sqrt{b^4 + c^4 - bc(a^2 + b^2 + c^2)}}{b + c}. \qquad \text{(I)}$$

2° *Angles de la bissectrice avec les côtés adjacents.* En posant $IAB = \beta$, $IAC = \gamma$, on voit facilement que

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b^2}{c^2}. \qquad (1)$$

De plus $$\beta + \gamma = A$$

ou $$\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \cos A. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit

$$\sin\beta = \frac{b^2 \sin A}{\sqrt{b^4 + c^4 + 2b^2c^2\cos A}}$$

$$\sin\gamma = \frac{c^2 \sin A}{\sqrt{b^4 + c^4 + 2b^2c^2\cos A}} \qquad \text{(II)}$$

3° *Distances du point de concours des antibissectrices aux côtés du triangle.* La formule de la propriété (II) jointe à la relation évidente $ad' + bd'' + cd''' = 2S$ (S étant la surface du triangle) donne

$$d' = \frac{2Sbc}{a(ab + ac + bc)}. \qquad \text{(III)}$$

De même pour d'' et d'''.

Remarque. — On peut considérer l'*antibissectrice extérieure* correspondant à la bissectrice extérieure comme l'*antibissectrice intérieure* correspond à la bissectrice intérieure.

Les deux antibissectrices sont conjuguées harmoniques par rapport aux côtés du triangle.

L'antibissectrice extérieure donne lieu à une étude analogue à celle que nous venons de résumer pour l'antibissectrice intérieure.

Applications. — Nous allons maintenant donner quelques applications des théorèmes contenus dans cette note, de manière à faire ressortir leur utilité.

Problème I. — *Deux points* A *et* B *se meuvent respectivement sur deux droites fixes* Ox *et* Oy, *de façon que la somme* OA + OB *reste constante.*

Déterminer l'enveloppe de la droite AB.

Nous allons d'abord établir une relation dont nous ferons plusieurs fois usage au cours de la question.

Considérons deux positions quelconques AB, A'B', de la droite mobile, qui se coupent en M. Nous avons

$$OA + OB = OA' + OB'$$

ou

$$OB - OB' = OA' - OA$$

c'est-à-dire

$$BB' = A'A.$$

Les triangles MAA', MBB ayant, par suite, même base sont entre eux comme leurs hauteurs

$$\frac{MAA'}{MBB'} = \frac{MH}{MI}.$$

Mais ces triangles ayant aussi même angle au sommet,

on a
$$\frac{\text{MAA}'}{\text{MBB}'} = \frac{\text{MA} \times \text{MA}'}{\text{MB} \times \text{MB}'}.$$

Donc
$$\frac{\text{MH}}{\text{MI}} = \frac{\text{MA} \times \text{MA}'}{\text{MB} \times \text{MB}'}.$$

Cela posé, nous allons diviser la solution du problème en deux parties.

1° Déterminons le point où la droite AB touche son enveloppe.

Pour cela, considérons la position très voisine A'B', qui coupe AB en M, et cherchons le point m vers lequel M tend sur AB, lorsque A'B' vient se confondre avec cette droite.

D'après la relation précédemment établie, on a, si MH et MI sont les perpendiculaires abaissées de M sur oy et ox,

$$\frac{\text{MH}}{\text{MI}} = \frac{\text{MA} \times \text{MA}'}{\text{MB} \times \text{MB}'}.$$

De plus,
$$\text{Lim MA} = \text{Lim MA}' = m\text{A}$$
$$\text{Lim MB} = \text{Lim MB}' = m\text{B}.$$

Par suite, si mh et mi sont les distances du point m à oy et ox,

$$\frac{mh}{mi} = \frac{\overline{m\text{A}}^2}{\overline{m\text{B}}^2}.$$

D'après la propriété II, le point m est donc le pied de l'antibissectrice du triangle OAB issue de O.

Conséquemment, si on mène la bissectrice de l'angle xoy, oz, qui rencontre AB en P, on a, d'après la définition même de l'antibissectrice, $\text{AP} = \text{B}m$.

2° Cherchons maintenant l'enveloppe de la droite AB.

Pour cela, considérons la position particulière CD de la droite mobile perpendiculaire à OZ, c'est-à-dire telle que OC = OD. D'après ce qui vient d'être dit, on voit que l'enveloppe est tangente à cette droite en son point d'intersection S avec OZ. Comme d'ailleurs cette enveloppe a évidemment OZ pour axe, le point S est sommet de la courbe.

Si N est le point où CD coupe AB et si de ce point nous abaissons les perpendiculaires NR et NQ sur OY et OX, nous avons, toujours d'après la relation fondamentale,

$$\frac{\text{NR}}{\text{NQ}} = \frac{\text{ND} \times \text{NA}}{\text{NC} \times \text{NB}}.$$

Mais RND = SOY

comme ayant leurs côtés perpendiculaires,

et QNC = SOX

pour la même raison.

Donc RND = QNC

et on a

$$\frac{ND}{NC} = \frac{NR}{NQ}.$$

Par suite,

$$\frac{NA}{NB} = 1$$

ou NA = NB.

Mais nous avons vu que mB = PA,

donc Nm = NP.

Par conséquent, si L est le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur OZ,

on a SL = SP,

c'est-à-dire que la sous-tangente à la courbe enveloppe est divisée en deux parties égales par le sommet de la courbe; cette enveloppe est donc une parabole. On voit, de plus, immédiatement que cette parabole est tangente à OX et à OY.

Problème II. — *On prend à l'intérieur du triangle* ABC *un point* M, *et sur les triangles* MAB, MAC, MBC, *on construit des prismes ayant des hauteurs proportionnelles à* AB, AC, BC. *Déterminer la position du point* M *de façon que ces trois prismes soient équivalents.*

J'appellerai Mc, Mb, Ma, les perpendiculaires abaissées de M respectivement sur AB, AC, BC. Si alors je représente par V, V', V" les volumes des trois prismes, par H, H', H" leurs hauteurs, j'ai,

$$V = \frac{AB \times Mc}{2} . H ; V' = \frac{AC \times Mb}{2} . H' ; V'' = \frac{BC \times Ma}{2} . H''$$

Il faut donc que :

$$AB \times Mc \times H = AC \times Mb \times H' = BC \times Ma \times H''$$

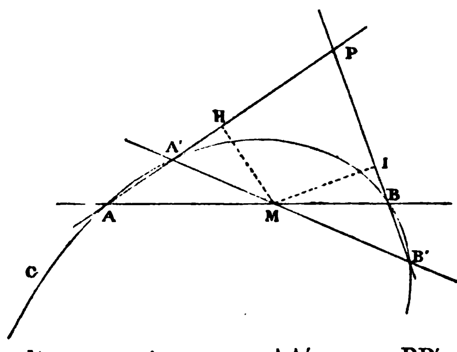
ou, comme H, H', H", sont proportionnelles à AB, AC, BC,

$$Mc \times \overline{AB}^2 = Mb \times \overline{AC}^2 = Ma \times \overline{BC}^2.$$

Par suite, d'après la propriété III, la position cherchée pour le point M est le point de concours des antibissectrices du triangle ABC.

Théorème. — *Si on considère une droite* AB *découpant sur une courbe* C *quelconque un arc de grandeur constante, le point où* AB *touche son enveloppe est le pied de l'antibissectrice du triangle formé par la droite* AB *et les tangentes à la courbe* C *aux points* A *et* B *où elle est coupée par* AB.

Prenons la position AB de la droite mobile et la position infiniment voisine A'B' qui coupe la première en M. Du point M abaissons les perpendiculaires MH et MJ sur les sécantes AA' et BB'.



Les arcs AB et A'B' étant égaux, par hypothèse, il en résulte que : arc AA' = arc BB'.

Mais ces arcs, étant infiniment petits, se confondent sensiblement avec leurs cordes et celles-ci sont égales, à moins d'un infiniment petit du second ordre.

Dès lors, les triangles MAA', MBB' ayant même base sont entre eux comme leurs hauteurs. Mais, ayant même angle au sommet, ils sont aussi entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.

Donc, $$\frac{MH}{MI} = \frac{MA \times MA'}{MB \times MA'}.$$

A la limite, lorsque A'B' vient se confondre avec AB, on a

$$MA' = MA \quad MB' = MB.$$

Par suite, $$\text{Lim}\ \frac{MH}{MI} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}$$

C'est-à-dire que la limite cherchée de la position du point M, sur AB, est le pied de l'antibissectrice du triangle avec lequel se confond alors le triangle PAB ; mais, à la limite, les sécantes PA et PB viennent coïncider avec les tangentes à la courbe C aux points A et B ; le théorème est donc démontré.

La première partie du problème I est un cas particulier de ce théorème; mais cette particularité entraînant des conséquences intéressantes qui ne sont pas réalisées dans les autres cas, j'ai voulu traiter le problème à part, avant d'en faire connaître la généralisation.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. E.-J. Boquel.

(*Suite*, voir p. 79).

Le théorème précédent conduit immédiatement à la propriété fondamentale de la forme adjointe.

Si l'on fait dans f la substitution suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \ldots + \alpha_{1n}x'_n \\ x_2 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x'_1 + \alpha_{n2}x'_2 + \ldots + \alpha_{nn}x'_n \end{cases}$$

la forme f sera transformée en une autre forme f'.

Soit F′ la forme adjointe de cette nouvelle forme f', F désignant toujours la forme adjointe de la première forme f.

Je dis qu'on aura identiquement :

$$F'(X'_1, X'_2, \ldots X'_n) = R^2F(X_1, X_2, \ldots X_n),$$

R désignant le module de la transformation (c.-à-d. le déterminant de la substitution), sous la condition que l'on suppose $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$, liées à $X_1, X_2, \ldots X_n$ par les relations

$$(2)\quad \begin{cases} X'_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{21}X_2 + \ldots + \alpha_{n1}X_n \\ X'_2 = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \alpha_{n2}X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X'_n = \alpha_{1n}X_1 + \alpha_{2n}X_2 + \ldots + \alpha_{nn}X_n \end{cases}$$

Pour établir cette proposition, formons F en considérant,

d'après le théorème précédent, la forme

$$\varphi = \theta f - (x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_n X_n)^2.$$

Prenons l'invariant de φ, que nous appellerons $\Delta(\varphi)$; nous avons vu qu'on a :

$$\Delta(\varphi) = \theta^n \Delta - \theta^{n-1} F(X_1, X_2, \ldots X_n).$$

Faisons dans φ la substitution (1), en considérant θ et les variables X comme de simples coefficients. Il viendra :

$$\varphi' = \theta f' - [X_1(\alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \ldots + \alpha_{1n} x'_n) + \ldots]^2.$$

Pour former ce carré, multiplions les équations (1) par $X_1, X_2, \ldots X_n$, et ajoutons; nous aurons :

$$\begin{aligned} x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_n X_n & \\ = x'_1(\alpha_{11} X_1 + \alpha_{21} X_2 + \ldots + \alpha_{n1} X_n) & \\ + x'_2(\alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \ldots + \alpha_{n2} X_n) & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + x'_n(\alpha_{1n} X_1 + \alpha_{2n} X_2 + \ldots + \alpha_{nn} X_n) & \end{aligned}$$

Les quantités entre parenthèses dans le deuxième membre sont précisément $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$; nous aurons donc :

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_n X_n = x'_1 X'_1 + x'_2 X'_2 + \ldots + x'_n X'_n.$$

En faisant dans φ la substitution (1), on aura donc :

$$\varphi' = \theta f' - (x'_1 X'_1 + x'_2 X'_2 + \ldots + x'_n X'_n)^2.$$

Donc $\quad \Delta(\varphi') = \theta_n \Delta' - \theta^{n-1} F'(X'_1, X'_2, \ldots X'_n).$

Or nous avons établi au début que, si l'on fait une substitution linéaire dans une forme quadratique, l'invariant de la nouvelle forme obtenue est égal au produit de l'invariant de la première forme par le carré du module de la transformation; donc $\quad \Delta(\varphi') = R^2 \Delta(\varphi).$

Par conséquent $\Theta_n \Delta' - \Theta^{n-1} F' = R^2(\Theta^n \Delta - \Theta^{n-1} F).$

Supprimant Θ^{n-1}, et remarquant que $\Delta' = R^2 \Delta$, il vient :

$$F' = R^2 F, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

— On peut donner de cette propriété fondamentale un autre énoncé, plus commode que le précédent dans les applications.

Puisque l'on a : $F'(X'_1, X'_2, \ldots X'_n) = R^2 F(X_1, X_2, \ldots X_n)$, si l'on remplaçait $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$ par leurs valeurs données par les équations (2), on aurait une identité.

Faisons l'opération inverse, c'est-à-dire remplaçons X_1, $X_2, \ldots X_n$ par leurs valeurs tirées des équations (2), en

observant que le déterminant de ces équations est R. Il viendra, en désignant par $R'\alpha_{11}$, $R'\alpha_{12}$. ... les dérivées de R par rapport aux éléments respectifs $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$:

$$RX_1 = R'\alpha_{11}X'_1 + R'\alpha_{12}X'_2 + \ldots + R\alpha_{1n}X'_n$$

De même $RX_2 = R'\alpha_{21}X'_1 + R'\alpha_{22}X'_2 + \ldots + R'\alpha_{22}X'_n$

. . . .

. . . .

$$RX_n = R'\alpha_{n1}X'_1 + R'\alpha_{n2}X'_2 + \ldots + R'\alpha_{nn}X'^n.$$

D'ailleurs, F étant homogène et du 2ᵉ degré, on a :

$$R^2F = F(RX_1, RX_2, \ldots RX_n)$$

et par suite, la substitution des valeurs précédentes donne :

$$F'(X'_1, X'_2, \ldots X'_n) = F(R'\alpha_{11}X'_1 + R'\alpha_{12}X'_2 + \ldots)$$

résultat qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Si l'on considère la substitution (1), *et que l'on appelle* SUBSTITUTION ADJOINTE *la substitution*

$$(1)'\quad \begin{cases} x_1 = R'\alpha_{11}x'_1 + R'\alpha_{12}x'_2 + \ldots + R'\alpha_{1n}x'_n \\ x_2 = R'\alpha_{21}x'_1 + R'\alpha_{22}x'_2 + \ldots + R'\alpha_{2n}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = R'\alpha_{n1}x'_1 + R'\alpha_{n2}x'_2 + \ldots + R'\alpha_{nn}x'_n \end{cases}$$

Si la forme f *est changée en la forme* f′ *par la substitution* (1), *la forme* F, *adjointe de* f, *sera changée en la forme* F′, *adjointe de* f′, *par la substitution* (1)′ *adjointe de la substitution* (1).

— *Application des théorèmes précédents à la forme ternaire* $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$.

Soit *f* la forme proposée ; nous allons chercher sa forme adjointe. Posons, conformément à la définition :

$$(1)\quad \begin{cases} Ax + B''y + B'z = X \\ B''x + A'y + Bz = Y \\ B'x + By + A''z = Z \end{cases}$$

Soit Δ le déterminant $\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$ (invariant de la forme *f*)

que nous supposerons différent de zéro.

On peut tirer des équations (1) les valeurs de x, y, z, en fonction de X, Y, Z ; il vient ainsi :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} X & B'' & B' \\ Y & A' & B \\ Z & B & A'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & X & B \\ B'' & Y & B \\ B' & Z & A' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & X \\ B'' & A' & Y \\ B' & B & Z \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Si l'on reporte ces valeurs dans f mise sous la forme

$$f = xX + yY + zZ,$$

le numérateur de la nouvelle valeur de f sera la forme adjointe. On a ainsi :

$$f = \frac{X \begin{vmatrix} X & B'' & B' \\ Y & A' & B \\ Z & B & A'' \end{vmatrix} + Y \begin{vmatrix} A & X & B' \\ B'' & Y & B \\ B' & Z & A'' \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} A & B'' & X \\ B'' & A' & Y \\ B' & B & Z \end{vmatrix}}{\Delta}$$

et la forme adjointe de f est, par conséquent :

$$F = X^2 (A'A'' - B^2) + Y^2 (A''A - B'^2) + Z^2 (AA' - B''^2)$$
$$+ 2YZ (B'B'' - AB) + 2ZX (B''B - A'B') + 2XY (BB' - A''B'')$$

— On doit à Cauchy (*Exercices mathématiques*) une remarque intéressante, et susceptible de nombreuses applications. Si l'on fait dans f la substitution particulière

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta u \\ y = \alpha' t + \beta' u \\ z = \alpha'' t + \beta'' u \end{cases}$$

on obtient une autre forme $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$, dont l'invariant est $MM' - N''^2$.

Si l'on considère, d'autre part, la substitution générale

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta u + \gamma v \\ y = \alpha' t + \beta' u + \gamma' v \\ z = \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v \end{cases}$$

la forme obtenue se composera de la partie $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$ et des trois autres termes qu'il est inutile d'écrire.

Prenons la substitution adjointe

$$\begin{cases} x = R'_{\alpha} t + R'_{\beta} u + R'_{\gamma} v \\ y = R'_{\alpha'} t + R'_{\beta'} u + R'_{\gamma'} v \\ z = R'_{\alpha''} t + R'_{\beta''} u + R'_{\gamma''} v \end{cases}$$

on a : $R'_{\alpha} = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$, $R'_{\beta} = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''$, $R'_{\gamma} = \alpha\beta'' - \beta'\alpha''$.

$$\text{Donc} \begin{cases} x = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')t + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')u + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha)v \\ y = (\beta''\gamma - \gamma''\beta)t + (\gamma''\alpha - \alpha''\gamma)u + (\alpha''\beta - \beta''\alpha)v \\ z = (\beta\gamma' - \gamma\beta')t + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')u + (\alpha\beta' - \beta\alpha')v \end{cases}$$

Nous avons vu que cette substitution transformera la forme F adjointe de f, en la forme F′ adjointe de f'.

Or la forme adjointe de f' est

$$F' = (M'M'' - N^2)t^2 + \ldots + (MM' - N''^2)v^2 + \ldots$$

Revenons maintenant à la première substitution considérée, où n'entre pas v; tous les termes de la substitution adjointe où entrent les quantités γ, γ', γ'' sont nuls, et cette substitution se réduit à

$$x = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')v, \quad y = (\alpha''\beta - \beta''\alpha)v, \quad z = (\alpha\beta' - \beta\alpha')v.$$

Or, c'est en la faisant dans F qu'on obtient le résultat F′; F′ se réduit d'ailleurs dans le cas actuel à v^2 $(MM' - N''^2)$; $MM' - N''^2$ est donc le coefficient de v^2 dans le résultat qu'on obtient en faisant dans la première forme adjointe F la substitution adjointe.

Mais la forme f', quand les coefficients de v sont nuls, est simplement $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$; son invariant est $MM' - N''^2$; cet invariant est donc égal au coefficient de v^2 dans F′, C'EST-A-DIRE A LA VALEUR MÊME QUE PREND LA FORME ADJOINTE DE LA PROPOSÉE QUAND ON Y REMPLACE x, y, z, PAR LES BINOMES $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$, $\alpha''\beta - \beta''\alpha$ ET $\alpha\beta' - \beta\alpha'$.

Applications.

Les propriétés des formes quadratiques, qui ont été beaucoup étudiées à l'étranger, sont susceptibles d'applications intéressantes et variées dans toutes les branches des mathématiques. En France, M. Hermite en a tiré un merveilleux parti dans le domaine de l'algèbre pure, et le P. Joubert, dont l'autorité en ces matières est bien connue, en a fait, de son côté, une étude approfondie. Sans vouloir entrer dans de longs détails sur des travaux qui appartiennent à leur auteur, et qu'il est mieux que personne à même de vulgariser en les publiant s'il le juge convenable, nous croyons qu'il ne sera pas inutile de donner à nos lecteurs une idée de la méthode, et nous choisirons dans ce but quelques questions de nature à les intéresser spécialement, en ce qu'elles appartiennent tout à fait à la géométrie analytique.

Nous allons montrer d'abord comment le P. Joubert a utilisé l'observation de Cauchy pour calculer avec une extrême

simplicité la distance d'un point à une droite dans l'espace, en coordonnées obliques, calcul que nos lecteurs savent par expérience être très pénible par les procédés habituels.

Distance d'un point $(x'\ y'\ z')$ *à une droite* $(x = az + p,$ $y = bz + q)$ *en coordonnées obliques.* — Le carré de la distance du point $(x'\ y'\ z')$ à un point quelconque (x, y, z) de la droite considérée est l'expression

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + 2(y - y')(z - z') \cos\lambda + 2(z - z')(x - x') \cos\mu + 2(x - x')(y - y') \cos\nu.$$

Le minimum de cette expression, dans laquelle x et y sont des fonctions de z déterminées par les équations de la droite donnée, est précisément la valeur du carré de la distance cherchée.

δ^2 est en réalité égal à $(az + p - x')^2 + (bz + q - y')^2 + \ldots\ldots$ ce que l'on peut écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & [a(z - z') - (x' - az' - p)]^2 + [b(z - z') - (y' - bz' - q)]^2 \\ & + (z - z')^2 \\ & + 2[b(z - z') - (y' - bz' - q)](z - z') \cos\lambda \\ & + 2[a(x - x') - (x' - az' - p)](z - z') \cos\mu \\ & + 2[a(z - z') - (x' - az' - p)][b(z - z') - (y' - bz' - q)] \cos\nu.\end{aligned}$$

δ^2 est donc de la forme $M(z - z')^2 + 2N''(z - z') + M'$

C.-à-d. de la forme $\dfrac{1}{M}\Big[M(z - z') + N''\Big]^2 + \dfrac{MM' - N''^2}{M}$

La valeur qui rend δ^2 minimum est celle pour laquelle $M(z - z') + N''$ est nul, et le minimum est précisément $\dfrac{MM' - N''^2}{M}$; il faut donc calculer cette quantité.

Observons que l'expression $M(z - z')^2 + 2N''(z - z') + M'$ provient de la forme quadratique

$$f = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos\lambda + 2zx \cos\mu + 2xy \cos\nu$$

quand on y remplace x par $a(z - z') - (x' - az' - p)$
y par $b(z - z') - (y' - bz' - q)$
et z par $z - z'$.

C'est là une substitution tout à fait analogue à celle dont il s'agit dans la remarque de Cauchy, t représentant $z - z'$, u représentant l'unité, et les coefficients étant

$$\alpha = a, \quad \alpha' = b, \quad \alpha'' = 1.$$

$$\beta = -(x' - az' - p), \quad \beta' = -(y' - bz' - q), \quad \beta'' = 0.$$

Or, d'après la remarque de Cauchy, on sait que si dans $f(x, y, z)$ on fait la substitution $x = \alpha t + \beta u$, $y = \alpha' t + \beta' u$, $z = \alpha'' t + \beta'' u$, auquel cas $f(x, y, z)$ prend la forme $Mt^2 + 2N''tu + M'u^2$, on a :

$$MM' - N''^2 = F(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'', \alpha''\beta - \beta''\alpha, \alpha\beta' - \beta\alpha')$$

F désignant la forme adjointe de f.

Les binômes à considérer sont:

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = y' - bz' - q, \quad \alpha''\beta - \beta''\alpha = -(x' - az' - p)$$

et
$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = -(y' - bz' - q)a + (x' - az' - p)b$$
$$= b(x' - p) - a(y' - q).$$

Nous obtiendrons $MM' - N''^2$ en remplaçant, dans la forme adjointe de f, les variables x, y, z par ces binômes.

Or la forme adjointe F de f est, comme nous l'avons vu :

$$F = x^2(A'A'' - B^2) + y^2(A''A - B'^2) + z^2(AA' - B''^2)$$
$$+ 2yz(B'B'' - AB) + 2zx(B''B - A'B') + 2xy(BB' - A''B'')$$

c'est-à-dire dans le cas actuel :

$$F = x^2 \sin^2\lambda + y^2 \sin^2\mu + z^2 \sin^2\nu + 2yz(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)$$
$$+ 2zx(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2xy(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu).$$

Par conséquent,

$$MM' - N''^2 = (y' - bz' - q)^2 \sin^2\lambda + (x' - az' - p)\sin^2\mu$$
$$+ [b(x' - p) - a(y' - q)]^2 \sin^2\nu + \ldots\ldots\ldots$$

Le dénominateur de δ^2 est M; or la quantité M obtenue en remplaçant dans f, x, y et z par $\alpha t + \beta u$, $\alpha' t + \beta' u$, $\alpha'' t + \beta'' u$, est le coefficient de t^2; c'est donc

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2\alpha'\alpha'' \cos\lambda + 2\alpha''\alpha \cos\mu + 2\alpha\alpha' \cos\nu$$

c.-à-d. que l'on a, d'après les valeurs de α, α', α'' :

$$M = a^2 + b^2 + 1 + 2b\cos\lambda + 2a\cos\mu + 2ab\cos\nu.$$

Le carré de la distance cherchée est donc :

$$\delta^2 = \frac{E^2\sin^2\lambda + G^2\sin^2\mu + H^2\sin^2\nu + 2GH(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2HE(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2EG(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)}{a^2 + b^2 + 1 + 2b\cos\lambda + 2a\cos\mu + 2ab\cos\nu}$$

formule dans laquelle E, G, H *désignent les valeurs que prennent les premiers membres des équations des projections de la droite considérée sur les trois plans coordonnés quand on y remplace les coordonnées courantes par les coordonnées particulières* x', y', z' *du point considéré.*

(A suivre.)

RECHERCHES

SUR LES

COURBES PLANES DU TROISIÈME DEGRÉ

AYANT AU MOINS UNE ASYMPTOTE A DISTANCE FINIE

Par M. J. Collin, ancien élève de l'Ecole polytechnique,
Professeur de Mathématiques.

(*Suite*, voir p. 74.)

Courbes dépourvues de point singulier.

Ces courbes sont représentées par une équation de l'une des formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}(y - mx)(y - m'x)(y - m''x) & (1)\\ \quad = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F & \\ (y - mx)^2 (y - m''x) & (2)\\ \quad = A(y - mx)(y - px) + Dy + Ex + F & \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{o}\\ \text{Asympt.}\\ \text{à}\\ \text{l'}\infty.\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(y - mx)^2 (y - m''x) & (3)\\ \quad = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F & \\ (y - mx)^3 & (4)\\ \quad = A(y - mx)(y - px) + Dy + Ex + F & \end{array}\right\} \begin{array}{c}2\\ \text{Asympt.}\\ \text{à}\\ \text{l'}\infty.\end{array}$$

Du reste, dans les courbes (1), parmi les trois directions asymptotiques, il peut y en avoir soit trois réelles, soit deux imaginaires m et m', et une réelle m''. En outre, dans les courbes (2), nous supposons indifféremment $p \gtrless m$ ou $= m$, tandis que dans les courbes (4) forcément on a $p \gtrless m$.

Cela posé :

Théorème I. — *Toute courbe* (1) *ou* (3) *peut en principe se mettre sous la forme mi-décomposée.*

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{l}{y - m'x - n} \quad (M).$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on prenne pour origine le point de contact de l'une des tangentes issues du troisième point d'intersection I *de la courbe avec son asymptote de direction* m''.

Que cela soit nécessaire c'est évident; il n'y a pour s'en rendre compte, qu'à regarder l'équation (M).

Mais, de plus, cela suffit. En effet considérons une courbe (1), et prenons pour origine l'un des points indiqués. L'équation de la courbe sera forcément de l'une des deux formes

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x - d'') = (a'x + b'y)(y - m''x - n') \qquad (\alpha)$$

ou

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x - d'') = a'(y - m''x)(y - m''x - n') \qquad (\alpha')$$

suivant que I est à distance finie ou à l'∞. Or l'identification de ces équations avec (M) est toujours possible et très simplement.

Remarque. — Cette identification ne manifeste encore aucune impossibilité, si l'on suppose $d'' = 0$, de sorte que I semble convenir lui-même pour transformer l'équation de la courbe. Mais il faut remarquer que, si l'on prend I pour origine, l'équation de la courbe n'est pas forcément de la forme (α).

Ainsi, pour qu'une courbe (1) ou (3) puisse se mettre sous la forme (M), il suffit que du point I on puisse mener une tangente réelle à la courbe. Or, il est facile de s'assurer que cette tangente réelle existe, sauf *quelquefois* pour des courbes des formes

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m'x) = A(y - mx)(y - m'x) + Dy + Ex \qquad (E_1)$$

$$(y - mx)^2(y - m'x) = A(y - m'x)(y - px) + D(y - m'x) + F \qquad (E_2)$$

et *jamais* pour les courbes

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m'x) = Dy + Ex \qquad (E_3)$$

On peut donc donner sous forme de corollaire, cet autre énoncé du théorème :

Corollaire : *Toute courbe* (1) *ou* (3) *peut se mettre sous la forme* (M), *pourvu qu'elle ne contienne pas le point de rencontre de deux asymptotes.*

Remarque. — Si m et m' sont réels, on peut leur faire jouer un rôle analogue à celui de m'' dans l'équation (M). On peut aussi alors passer à la forme entièrement décomposée. Cette remarque ne regarde que les courbes (1).

Théorème I *bis.* — *Toute courbe* (2) *ou* (4) *peut toujours se mettre sous la forme mi-décomposée :*

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{l}{y - mx - n} \quad (M_1)$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on prenne pour origine l'un quelconque de ses points, sauf celui où l'asymptote de direction m″ *coupe la courbe, ceux où la tangente est parallèle à* m″, *et les points de contact des tangentes issues des points où la tangente est parallèle à* m.

Que cela soit nécessaire, c'est évident d'après l'équation (M_1).

Pour démontrer que cela suffit, prenons une courbe (2) et essayons de l'identifier avec (M_1). Nous trouverons facilement que l'identification est possible, en général, et qu'il n'y a qu'à prendre

$$a = -\frac{AE(p - m'')}{Dm' + E} \quad b = -\frac{AD(p - m')}{Dm' + E} \quad n = \frac{Dm' + E}{A(p - m')}$$

$$l = \frac{A^2D(p - m')^2 + A^2(p - m'')(Dm' + E) - (Dm'' + E)^2}{A(p - m')(Dm'' + E)}$$

avec la seule condition $F = 0$.

L'identification n'est donc impossible que si, supposant $F = 0$, l'on a :

1° $A = 0$, ou $p - m'' = 0$, c.-à-d. si l'origine est le point où l'asymptote de direction m'' coupe la courbe.

2° $Dm' + E = 0$, c.-à-d. si l'origine est un des points où la tangente est parallèle à m'.

3° $A^2D(p - m')^2 + A^2(p - m')(Dm' + E) - (Dm'' + E)^2 = 0$, c.-à-d. si l'origine est le point de contact d'une tangente issue de l'un des points où la tangente est parallèle à m. Pour interpréter en effet cette relation, il suffit de prendre pour axe des y la tangente à l'origine, et pour axe des x une parallèle à la direction m'.

Remarque. — Aucune courbe (2) ne peut se mettre sous la forme (M), ni aucune courbe (3) sous la forme (M_1). C'est une conséquence du théorème bien connu de la divisibilité, en vertu duquel si un facteur divise une partie d'une somme, etc.

Des formes (M) et (M_1) on peut déduire deux méthodes de construction pour les courbes qui nous occupent.

La 1re méthode repose sur le problème suivant :

PROBLÈME. — *Construire les deux points d'intersection d'une courbe à point singulier, ayant au moins une asymptote à distance finie, par une droite parallèle à cette asymptote.*

Soit (C) la conique directrice, DD l'asymptote directrice, SS la sécante. Coupons la conique par une droite auxiliaire AA parallèle à cette asymptote, et dont la distance au point singulier origine O soit égale à la distance de l'asymptote directrice et de la sécante. Nous aurons ainsi deux points M_1 et M_1' (réels et distincts, réels ou confondus, ou imaginaires). Menant alors les rayons OM_1 et OM_1' et les prolongeant jusqu'à leur rencontre avec SS, nous obtiendrons en M_1 M_1' les points cherchés.

Cela posé :

Théorème II. — *Toute courbe* (M) *ou* (M_1) *peut se construire à l'aide d'une conique fixe et d'une droite qui se meut parallèlement à elle-même.*

En effet, toute courbe

$$1 = \frac{ax + by}{(y - m'x)(y - mx)} + \frac{l}{y - m''x - n}$$

peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des deux séries de courbes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 = \dfrac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \dfrac{\dfrac{l(n + \lambda)}{\lambda}}{y - m''x} & (\sigma) \\ y - m''x = n + \lambda & (\sigma_1) \end{array} \right.$$

Or les courbes (σ) sont des courbes à point singulier, ayant même conique directrice et pour droite directrice des droites parallèles. D'autre part, les droites (σ_1) sont parallèles aux droites directrices des courbes (σ). La construction des courbes (M) et (M_1) revient donc à l'application répétée du problème précédent.

Remarque I. — Cette construction est une construction directe; car elle revient à se donner l'abscisse et à cons-

truire l'ordonnée dans le système d'axes où l'axe des y serait parallèle à m'', et où l'axe des x serait d'ailleurs l'axe actuel.

Remarque II. — Il paraît naturel d'appeler encore ici *conique directrice* de la courbe (M) ou (M_1) la conique directrice commune aux courbes (σ) et *droite asymptotique directrice* la droite $y - m''x = l + n$.

Théorème II *bis.* — *Même théorème pour les courbes* (E_1) *et* (E_2).

En effet, les courbes (E_1) peuvent être considérées comme définies par

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \dfrac{Dy + Ex}{(y - mx)(y - m'x)} + \dfrac{\lambda(A + 1 - \lambda)}{y - m''x} \\ y - m''x = \lambda \end{array}\right.$$

et les courbes (E_2) par

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \dfrac{Dy + Ex}{(y - mx)(y - m''x} + \dfrac{\lambda(1 - \lambda)}{y - m'x} \\ y - m'x = 1 - \lambda. \end{array}\right.$$

Théorème III. — *La tangente en un point quelconque* M_0 *d'une courbe plane, du 3e degré, définie comme lieu d'intersection des deux séries de courbes*

$$(C) \quad \left\{\begin{array}{l} 1 = \dfrac{S}{P.Q} + \dfrac{\varphi(\lambda)}{R} \\ \lambda = \psi(R) \end{array}\right.$$

(où P, Q, R, S, *sont des polynômes linéaires homogènes en* x *et* y*), passe par le point d'intersection de deux droites que l'on peut construire.*

En effet, la tangente en un point M_0 de cette courbe a pour équation

$$(E) \; \frac{S_0(P_0Q + Q_0P) - S.P_0Q_0}{P_0^2.Q_0^2} + R\left\{\frac{f(R_0) - R_0f'(R_0)}{R_0^2}\right\}$$
$$= 1 - f'(R_0)$$

en posant $\qquad \varphi\{\psi(R)\} = f(R).$

D'autre part, l'équation de la tangente au point M_0 à la

courbe pourvue de point singulier.

$$(C_1) \qquad 1 = \frac{S}{PQ} + \frac{\varphi(\lambda)}{R}$$

est $$(E_1) \quad \frac{S_0(P_0Q + Q_0P) - S.P_0.Q_0}{P_0^2.Q_0^2} + \frac{R}{R_0^2} f(R_0) = 1.$$

Si nous coupons (E) par la droite

$$(\alpha) \qquad R = \frac{R_0^2\{1 - f'(R_0)\}}{f(R_0) - R_0 \cdot f'(R_0)}$$

le point d'intersection sera sur

$$(\beta) \qquad S_0(P_0Q + Q_0P) - S.P_0Q_0 = 0.$$

Or cette droite (β) passe d'une part par l'origine, et d'autre part au point d'intersection de (E_1) et de

$$(\gamma) \qquad R = \frac{R_0^2}{f(R_0)}.$$

Remarque. — Les droites (α), (γ) seraient difficiles à construire, si $f(R)$ était compliqué; mais, d'après ce qui précède, pour les courbes qui nous occupent, $f(R)$ est de l'une des formes simples suivantes

$$\frac{lR}{R-n}, \; R(1-R), \; R(A+1-R).$$

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAIS POUR LES CONIQUES DE PASCAL

AVEC

Des notes par **M. Ch. Laurens**, professeur honoraire.

(Suite, voir page 133.)

§ 3. — « Quoi faisant, nous énonçons les propriétés que nous en touchons d'une manière plus universelle qu'à l'ordinaire, par exemple celle-ci : si dans le plan MSQ *(fig. 6)* dans la section de cône PKV sont menées les droites AK, AV atteignantes la section aux points P, K, Q, V, et que

de deux de ces quatre points qui ne sont pas en ligne droite avec le point A, comme par les points K, V et par deux points N, O pris dans le bord de la section soient menées quatre droites KN, KO, VN, VO coupantes les droites AV, AP aux points L, M, T, S. Je dis que la raison composée

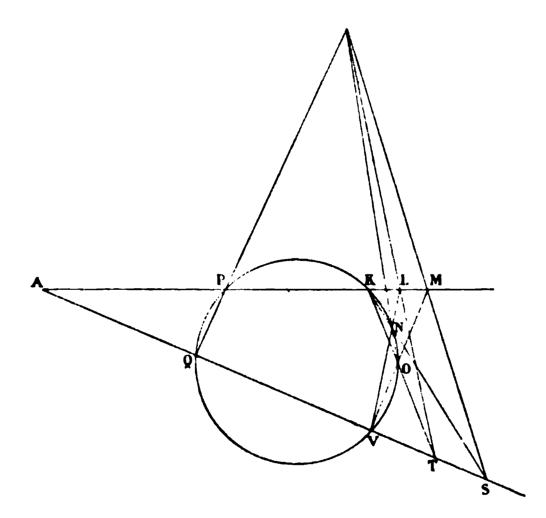


Fig. 6.

des raisons de la droite PM à la droite MA, et de la droite AS à la droite SQ est la même que la raison composée de la droite PL à la droite LA et de la droite AT à la droite TQ. »

Note 3. — On peut énoncer ainsi le théorème précédent: si l'on joint deux points quelconques V et K de la conique à quatre points Q, P, M, O de la courbe, ces droites rencontrent PK, QV suivant deux séries de quatre points A, P, L, M; A, Q, T, S; on propose de démontrer que

$$\frac{PM}{AM} \cdot \frac{AS}{QS} = \frac{PL}{AL} \cdot \frac{AT}{QT}.$$

L'hexagone de Pascal et le théorème sur les transversales fournissent une démonstration très simple de ce théorème.

Considérons l'hexagone inscrit KONVQPK dans la conique.

Les côtés opposés KO, VQ se rencontrent en T; VN et PK au point L; ON et PQ en R; les trois points T, L, R sont en ligne droite: donc QP, ON, TL se rencontrent en un point R situé sur MS d'après la note 1.

Le triangle APQ est coupé par les deux transversales MS, LT, par suite :

$$\frac{PM}{AM} \cdot \frac{QR}{PR} \cdot \frac{AS}{QS} = 1, \quad \frac{PL}{AL} \cdot \frac{QR}{PR} \cdot \frac{AT}{QT} = 1,$$

égalant les deux nombres et supprimant le facteur commun $\frac{QR}{PR}$, on obtient :

$$\frac{PM}{AM} \cdot \frac{AS}{QS} = \frac{PL}{AL} \cdot \frac{AT}{QT} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — On peut écrire la relation précédente sous la forme : $$\frac{PM}{AM} \cdot \frac{LA}{LP} = \frac{QS}{AS} \cdot \frac{AT}{QT};$$

or $\frac{PM}{AM} \cdot \frac{PL}{AL} = \frac{PM}{AM} \cdot \frac{AL}{PL}$, relation entre les rapports des distances des points M et L aux points P et A, a été appelé par M. Chasles rapport anharmonique des quatre points M, L, P, A. De même $\frac{QS}{AS} \cdot \frac{AP}{QT}$ est le rapport anharmonique des quatre points A, Q, T, S. Le théorème énoncé par Pascal revient donc à celui-ci : les deux faisceaux de droites joignant V et K, deux points d'une conique à quatre points quelconques Q, P, N, O, déterminent sur PK et QV deux séries de quatre points ayant le même rapport anharmonique, c'est-à-dire étant homographiques. Cette propriété est précisément celle que M. Chasles a choisie comme base de sa théorie nouvelle des coniques, propriété plus féconde encore que celle de l'hexagramme mystique de Pascal.

§ 4. — « Nous démontrerons aussi que s'il y a trois droites DF, DG, DH que les droites AP, AK coupent aux points F, G, H ; C, γ, B ; et que dans la droite DC, soit déterminé le point E ; la raison composée des raisons du rectangle de EF et FG, au rectangle de EC et Cγ et de la droite Aγ à la droite AG, est la même que la composée des raisons du rectangle de EF et FH, au rectangle de EC et CB et de la droite AB à la droite

AH et elle est aussi la même que la raison du rectangle des droites FE, FD au rectangle des droites CE, CD. »

Note 4. — Soit (*fig.* 7) les côtés de l'angle A coupés par les trois droites DF, DG, DH; aux points F, G, H; C, γ, B;

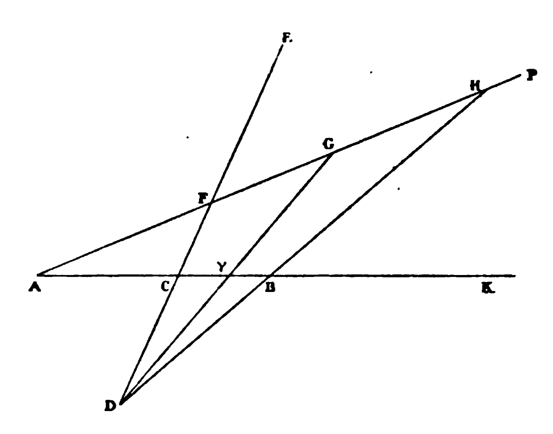


Fig. 7.

et un point arbitraire E pris sur l'une des droites DF, Pascal énonce la relation suivante :

$$\frac{EF \cdot FG}{EC \cdot C\gamma} \cdot \frac{A\gamma}{AG} = \frac{EF \cdot FH}{EC \cdot CB} \cdot \frac{AB}{AH} = \frac{EF \cdot FD}{EC \cdot CD};$$

le triangle AFC est coupé par les deux transversales DG, DH, on a donc :

$$\frac{FG}{AG} \cdot \frac{CD}{FD} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{FD}{CD} = \frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma}$$

$$\frac{FH}{AH} \cdot \frac{CD}{FD} \cdot \frac{AB}{CB} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{FD}{CD} = \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB}$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB} = \frac{FD}{CD};$$

multipliant par $\frac{EF}{EC}$ on obtient :

$$\frac{EF}{EC} \cdot \frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = \frac{EF}{EC} \cdot \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB} = \frac{EF}{EC} \cdot \frac{FD}{CD}.$$

qui devient en changeant l'ordre des facteurs la relation énoncée par Pascal.

Cette relation sert à Pascal à démontrer le théorème énoncé dans le § 5.

Remarque. — Si l'on considère l'égalité :

$$\frac{FG}{AG} \cdot \frac{A\gamma}{C\gamma} = \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AB}{CB}$$

on peut l'écrire : $\frac{FG}{AG} \cdot \frac{AH}{FH} = \frac{C\gamma}{A\gamma} \cdot \frac{AB}{CB}$,

qui exprime que le rapport anharmonique des quatre points A, F, G, H égale le rapport anharmonique des quatre points A, C, γ, B, ou que le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite n'est pas altéré par la projection centrale.

§ 5. — « Partant, si par les points E, D passe une section de cône qui coupe les droites AH, AB *(fig. 8)* aux points

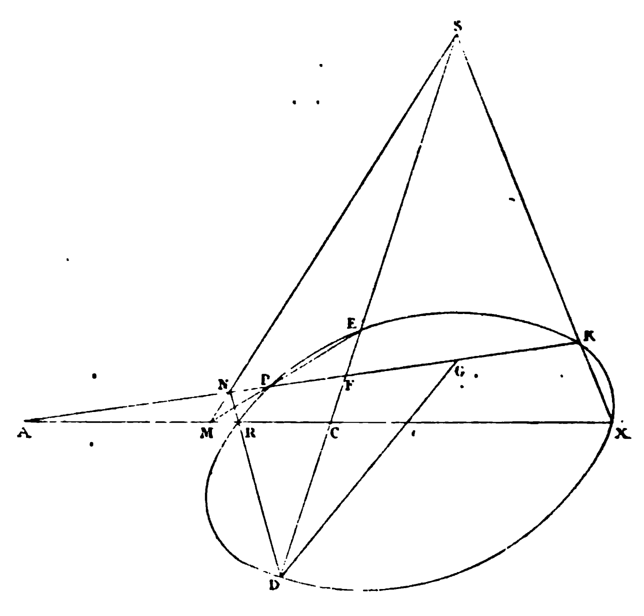


Fig. 8.

P, K, R, X, la raison composée des rectangles EF, FG au rectangle des droites EC, Cγ et de la droite γA à la droite

AG, sera la même que la composée des raisons du rectangle des droites FK, FP au rectangle des droites CR, CX et du rectangle des droites AR, AX au rectangle des droites AK, AP. »

Note 5. — Le théorème énoncé par Pascal peut se traduire ainsi. Par un point A on mène dans une conique *(fig. 8)* deux sécantes APK, ARX; par un point D de la courbe on mène deux cordes quelconques DF, DG, on a la relation :

$$\frac{EF}{EC} \cdot \frac{FG}{C\gamma} \cdot \frac{A\gamma}{AG} = \frac{FK.FP}{CR.CX} \cdot \frac{AR.AX}{AK.AP}.$$

Considérons l'hexagone EPKXRDE, d'après le théorème de Pascal, EP, XR, se rencontrant en M; PK, DR, en N; KX, DE, en S; les trois points M, N, S sont en ligne droite, c'est-à-dire que les droites MN, DE, KX concourent en un point S.

Cela posé, le triangle ACF est rencontré par les transversales EM, NP, KX, MN; on aura donc les relations

$$\frac{PF}{AP} \cdot \frac{CE}{FE} \cdot \frac{AM}{CM} = 1 \text{ d'où } \frac{PF}{AP} \cdot \frac{CE}{FE} = \frac{MC}{MA} \quad (1)$$

$$\frac{AR}{RC} \cdot \frac{DC}{FD} \cdot \frac{NF}{AN} = 1 \text{ d'où } \frac{AR}{RC} \cdot \frac{DC}{FD} = \frac{AN}{NF} \quad (2)$$

$$\frac{FK}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} \cdot \frac{CS}{FS} = 1 \text{ d'où } \frac{FK}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{FS}{CS} \quad (3)$$

$$\frac{MC}{AM} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FS}{CS} = 1 \quad (4)$$

multipliant les trois égalités (1) (2) (3) on a :

$$\frac{PF.CE}{AP.FE} \cdot \frac{AR.DC}{RC.FD} \cdot \frac{FK.AX}{AK.CX} = \frac{MC}{MA} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FS}{CS};$$

mais en vertu de (4) le second nombre égale 1, donc :

$$\frac{PF.CE}{AP.FE} \cdot \frac{AR.DC}{RC.FD} \cdot \frac{FK.AX}{AK.CX} = 1, \quad (5)$$

égalité que l'on peut écrire :

$$\frac{PF.FK}{CR.CX} \cdot \frac{AR.AX}{AP.AK} = \frac{FE.FD}{CE.CD}. \quad (6)$$

Mais, d'après la note 4, si par D on mène une sécante quelconque DγG on a la relation :

$$\frac{FE.FG.A\gamma}{CE.AG.C\gamma} = \frac{FE.FD}{CE.CD};$$

à cause de (6) on conclut la relation énoncée par Pascal :

$$\frac{FE.FG.A\gamma}{CE.AG.C\gamma} = \frac{DF.FK}{CR.CX} \cdot \frac{AR.AX}{AP.AK}.$$

La relation (5) qui s'écrit, en changeant l'ordre des facteurs,

$$\frac{AR.AX}{CR.CX} \cdot \frac{FP.FK}{AP.AK} \cdot \frac{CE.CD}{FE.FD} = 1,$$

est précisément le théorème de Carnot sur les relations entre les segments déterminés par une conique sur les trois côtés d'un triangle.

Ce théorème contient comme cas particulier la relation cartésienne qui lie les différents points d'une conique (*fig. 9*).

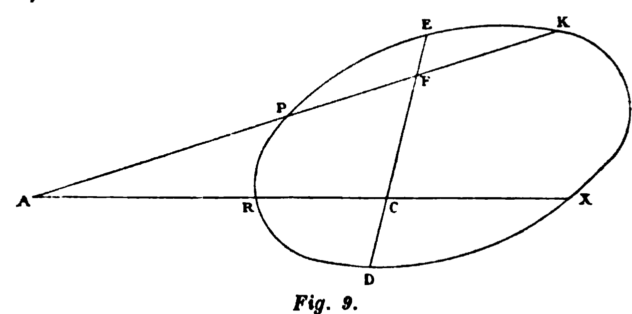


Fig. 9.

Supposons que le point A s'éloigne indéfiniment

$$\frac{AR}{AP} = 1 \quad \frac{AX}{AK} = 1,$$

donc

$$\frac{PF.FK}{CR.CX} \cdot \frac{CE.CD}{FE.FD} = 1,$$

alors PK et RX sont parallèles. Prenons pour ED le diamètre qui divise les cordes PK, RX en deux parties égales, alors PF = FK, CR = CX; la relation se réduit à

$$\frac{PF^2}{CR^2} \cdot \frac{CE.CD}{FE.FD} = 1$$

ou

$$\frac{PF^2}{FE.FD} = \frac{CR^2}{CE.CD}$$

qui exprime que le carré d'une demi-corde est au produit des deux segments du diamètre correspondant dans un rapport constant, le diamètre restant fixe.

Si le point D s'éloigne indéfiniment, le rapport $\frac{FD}{CD}$ tend vers l'unité; donc dans une parabole on a pour un diamètre quelconque $$\frac{PF^2}{EF} = \frac{RC^2}{EC} = \text{const.}$$

(A suivre.)

QUESTION 162.

Solution, par M. JOLLY, élève du Collège de Vassy.

Étant donnés deux points P *et* P′ *à l'intérieur d'un cercle, sur un même diamètre et à égale distance du centre, on propose de mener deux parallèles* PQ, P′Q′ *terminées à la circonférence et telles que le trapèze* PQP′Q′ *soit maximum.*

Les angles en Q et Q′ étant droits, la surface PQP′Q′ a pour expression
$$S = \frac{PQ + P'Q'}{2} QQ'$$
ou $$S = \frac{B + b}{2} h$$
en posant $PQ = B$, $P'Q' = b$, $QQ' = h$. Par O menons OH parallèle à PQ. On a $OH = x = \frac{B + b}{2}$.

Dès lors (1) $S = x.h$; expression dont il s'agit de trouver le maximum. Joignons OQ; on a dans le triangle rectangle OQH, $x^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = \frac{4R^2 - h^2}{4}$.

Élevons (1) au carré, remplaçant x^2 par sa valeur on a, toutes réductions faites,
$$h^4 - 4R^2h^2 + 4S^2 = 0,$$
d'où $$h = \pm\sqrt{2R^2 \pm \sqrt{4R^4 - 4S^2}};$$
pour que h soit réel, il faut que
$$4R^4 - 4S^2 \geq 0,$$
d'où $$S \leq R^2.$$

Le minimum de S a donc lieu pour $S = R^2$.

Dès lors $$h = R\sqrt{2};$$

h est donc la diagonale d'un carré qui a R pour côté.

Si $PP' > h$, il y aura un second trapèze symétrique du premier par rapport à MN.

Si $PP' = h$, PQ et P'Q' sont perpendiculaires à MN; il y a encore deux solutions.

Enfin si $PP' < h$, il n'y a plus de solution et le problème est impossible.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gelinet, d'Orléans; Elie. Collège Stanislas; Combebiac, à Montauban; Objois, à Moulins; Detraz, à Bourg; Hugot, à Lyon; Pecquery, au Havre; Vermond, Schlesser, Corbeau, à Saint-Quentin; Lannes, à Tarbes; Dupuy, à Grenoble; Montéron, à Pau.

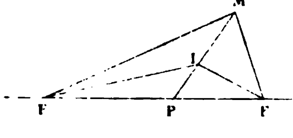
QUESTION 166.

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

On donne une ellipse dans laquelle la longueur du petit axe est moyenne proportionnelle entre celle du grand axe et la distance focale.

Le centre du cercle inscrit au triangle formé par les deux foyers et un point quelconque de l'ellipse partage la normale en ce point en moyenne et extrême raison. (Launoy.)

Soient F, F' les foyers de l'ellipse donnée; M un point de la courbe, MP la normale en ce point, I le centre du cercle inscrit au triangle MFF'. Dans le triangle PFM, on a



$$\frac{PF}{FM} = \frac{IP}{IM}$$

et dans PF'M, $$\frac{IP}{IM} = \frac{PF'}{F'M};$$

donc $$\frac{IP}{IM} = \frac{PF + PF'}{MF + MF'} = \frac{c}{a},$$

d'où $$\frac{IM}{IP + IM} = \frac{IM}{MP} = \frac{a}{a + c};$$

or $b^2 = ac$ ou $(a+c)(a-c) = ac$,

d'où $$\frac{a}{a+c} = \frac{a-c}{c} = \frac{c}{a};$$

donc $$\frac{IP}{IM} = \frac{IM}{MP}$$

et par suite $$\overline{IM}^2 = IP.MP$$

et la droite MP est partagée en I en moyenne et extrême raison.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Longueville, de Charleville; Corbeau, Vermand, Schlesser, de Saint-Quentin; Deslais, au Mans.

QUESTION 167.

Solution par M. Deslais, élève du Lycée du Mans.

Construire un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent et le rapport de la surface de ce triangle à celle du triangle formé par les deux bissectrices de l'angle donné et le côté opposé. Examiner le cas où ce rapport est égal à 2. (Launoy.)

Soit ABC le triangle demandé; $AB = x$, $CB = y$, $AC = a$. Soient l et l' les bissectrices AE, AE′ de l'angle donné BAC:

on a $$l = \frac{2a}{a+x}\sqrt{apx(p-y)}$$

$$l' = \frac{2}{a-x}\sqrt{ax(p-a)(p-x)}$$

par suite $$\frac{ll'}{2} = \frac{2}{a^2-x^2}\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}.$$

Désignons par $\frac{m}{n}$ le rapport de la surface du triangle cherché à celle du triangle formé par les bissectrices; on aura,

après réductions, $$\frac{a^2-x^2}{2ax} = \frac{m}{n}$$

ou $$nx^2 + 2amx - a^2n = 0,$$

d'où $$x = \frac{-am \pm a\sqrt{m^2+n^2}}{n}.$$

Si l'on désigne par h l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont m et n, on a

$$x = \frac{-am \pm ah}{n}.$$

x est évidemment positif, donc on doit avoir $ah > am$. La valeur de x sera donc

$$x = \frac{a(h-m)}{n}.$$

Cette expression se construit facilement; c'est une quatrième proportionnelle à $h - m$, a et n.

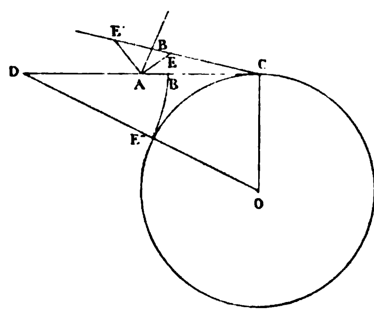
Connaissant dès lors les deux côtés AB et AC et l'angle qu'ils forment, le triangle est déterminé.

Considérons maintenant le cas où $\frac{m}{n} = 2$.

Dans ce cas $x = a\sqrt{5} - 2a$ ou $a\left(\sqrt{5} - 1\right) - a$.

Il est facile d'obtenir cette droite.

En effet, soit AC le côté donné. En A menons AB faisant avec AC un angle égal à l'angle donné. Puis prolongeons AC d'une longueur AD = AC.



En C menons CO perpendiculaire sur AC et égale à a. Décrivons du point O comme centre avec CO pour rayon une circonférence et joignons DO. Cette droite coupe la circonférence en E". Décrivons avec DE" un arc de cercle qui coupe AC en B'. AB' est la longueur cherchée. Il ne reste plus qu'à la porter sur AB et le triangle est déterminé.

NOTA. — M. Longueville, du Collège de Charleville, a résolu la même question.

QUESTION 210.

Solution par M. Lestoquoy, du Lycée de Saint-Quentin.

La valeur de la série

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\dots$$

est un *si le produit*

$$(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$$

est infini; ce qui a lieu si la série à termes positifs

$$a_1+a_2+a_3+\dots$$

est divergente.

La série précédente est convergente si le produit tend vers une limite déterminée; elle est divergente si le produit est nul ou indéterminé. (Laurent.)

Considérons les n premiers termes de la série et cherchons à en faire la somme

$$S_n=\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{a_n}{(a_1+1)\dots(a_n+1)}$$

Remarquons que l'on a :

$$\frac{a_1}{a_1+1}=1-\frac{1}{a_1+1}$$

$$\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)}$$

$$\frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}$$

$$=\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}$$

. . . . . , ...

$$\frac{a_n}{(a_1+1)\dots(a_{n-1}+1)(a_n+1)}$$

$$=\frac{1}{(a_1+1)\dots(a_{n-1}+1)}-\frac{1}{(a_1+1)\dots(a_n+1)}$$

Ajoutons membre à membre, il vient

$$S_n=1-\frac{1}{(a_1+1)\dots(a_n+1)}$$

Si l'on fait croître n indéfiniment et que le produit

(2) $$(a_1 + 1)\ldots(a_n + 1)$$

tende vers l'infini, le second terme de S_n tendra vers 0 et on aura $$\text{Lim. } S_n = 1.$$

Soit maintenant la série à termes positifs

(3) $$a_1 + a_2 + \ldots$$

Supposer cette série divergente, c'est dire que la somme des p premiers termes croît indéfiniment quand p tend vers l'infini; or le produit des p premiers termes du produit se compose de la somme des p premiers termes de la série (3) plus d'autres termes positifs; donc si la série (3) est divergente, il en est de même du produit.

Soit $$P_n = (a_1 + 1) \ldots (a_n + 1),$$

on a alors $$S_n = 1 - \frac{1}{P_n}.$$

Si P_n tend vers une limite P, on a

$$\text{Lim. } S_n = 1 - \frac{1}{P},$$

donc cette limite existe, c'est-à-dire que la série (1) est convergente.

Si P_n tend vers o, S_n tend vers $-\infty$; donc la série (1) est divergente.

Si P_n est indéterminé, S_n est indéterminée, et par suite n'a pas de limite; donc la série (1) est divergente.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. P. Fabry, élève de mathématiques spéciales au Collège Chaptal (classe de M. Hauser); L. Legay, élève du Lycée Saint-Louis; G. Papelier, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Reims.

QUESTION 211.

Solution par M. Coignard, élève au Lycée Saint-Louis.

Je me permettrai de faire remarquer que l'énoncé de la question n'est pas complètement exact si K est quelconque: il y a lieu de le modifier de la manière suivante:

L'équation $Kx^m + \frac{x^{m-1}}{1} + \frac{x^{m-2}}{2} + \ldots + \frac{x^{m-p}}{p}$

$+ \ldots + \frac{1}{m} = 0$ *a une seule racine réelle pour* m *impair.*
Si m *est pair, elle a deux racines réelles au plus.*

Trouver la condition pour que ces deux racines existent.

Posons $$x = \frac{1}{y}.$$

L'équation $$K + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \ldots + \frac{y^m}{m} = 0 \qquad (1)$$
admet évidemment le même nombre de solutions réelles que l'équation proposée, c'est donc cette équation plus commode que nous allons étudier.

Egalons à o la dérivée du premier membre de (1).

(2) $$1 + y + y^2 + \ldots + y^{m-1} = 0$$

1° m est pair. — (2) n'a qu'une racine réelle, — 1, car,
$$(1 + y + y^2 + \ldots + y^{m-1})(y - 1) = y^m - 1.$$

Or quand m est pair, $y^m - 1 = 0$ admet les racines $+1$ et -1, mais en multipliant par $y - 1$ on a introduit la solution $y = +1$, donc (2) n'admet que $y = -1$.

Les résultats des substitutions de $-\infty$, -1, $+\infty$ dans (1) sont: $-\infty$ $\qquad -1 \qquad +\infty$

$$+ R - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} +$$

Suivant que le résultat de la substitution de -1 sera positif ou négatif, l'équation (1) et par conséquent l'équation proposée admettra o ou deux racines réelles; si $K - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} = 0$, -1 est racine de la dérivée et appartient comme racine double à l'équation proposée.

2° Si m est impair, on voit que $-\infty$ et $+\infty$ donnent des résultats de substitution de signes contraires, l'équation a donc toujours au moins une racine réelle ; du reste, elle n'en a qu'une, car l'équation dérivée (2) n'admet pas de racines réelles.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. G. Papelier, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Reims; Maurice, élève de spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas) ; L. Legay, élève de spéciales au Lycée Saint-Louis; P. Fabry, élève de spéciales au Collège Chaptal (classe de M. Hauser).

QUESTION 214.

Solution, par M. Maurice d'Ocagne, élève au Lycée Fontanes.

Faire voir à l'aide de la seule théorie des logarithmes que si l'on trace les courbes représentées par les équations $y = a^x$ et $y = b^x$, *l'une d'elles deviendra la projection de l'autre si on fait tourner son plan d'un angle convenable autour de l'axe des* y. *Exprimer cet angle en fonction du module relatif des deux systèmes de logarithmes correspondants.* (Picquet.)

Ces deux courbes se coupent en un même point de l'axe des y; de plus, si on les coupe par une parallèle à l'axe des x, à une distance h de cet axe, qui les rencontre aux points A et B et qui coupe l'axe des y au point P, on a

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\log_a h}{\log_b h} = \log_a b.$$

Supposons, pour fixer les idées $a > b$; alors $\log_a b < 1$, et si on fait tourner le plan de la courbe (b) de l'angle ω tel que $\cos \omega = \log_a b$, la courbe (a) sera la projection orthogonale de (b) dans sa nouvelle position.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

238. — Construire un triangle connaissant un angle, le cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs.

239. — Résoudre un quadrilatère inscriptible connaissant les diagonales et les côtés opposés.

240. — On donne les côtés égaux c, et l'une des bases a d'un trapèze isoscèle ; que doit être la seconde base pour que le volume engendré par la révolution de la figure autour de la première base soit maximum?

241. — Trouver le lieu des points M tels que les tangentes menées de ce point à deux cercles fixes soient dans un rapport donné.

242. — On donne un triangle ABC; une droite BL pivote autour du sommet B. On abaisse des perpendiculaires AE, CD des deux autres sommets sur cette droite; on joint le point E au milieu K de AB, et le point D au milieu I de BC. Trouver le lieu du point M de rencontre des deux droites KE et DI.

Mathématiques spéciales.

243. — On donne une parabole $y^2 = 2px$, rapportée aux axes ordinaires; autour de l'origine on fait tourner deux droites rectangulaires, rencontrant la parabole aux points A et B, et l'on construit une hyperbole H ayant pour asymptotes OA et OB, et passant par un point fixe K situé sur la bissectrice des axes. Trouver : 1° le lieu du pôle de AB par rapport à H; 2° le lieu Σ des points de rencontre de AB avec H. On cherchera les points de Σ qui se trouvent sur les droites $x = 2p$ et $y = x$. On discutera les différentes formes de la courbe suivant la position du point K sur la droite $y = x$. *(de Longchamps.)*

244. — Étant donnée une conique qui passe à l'origine des axes, supposés rectangulaires, on considère les cordes de cette conique qui sont vues de l'origine sous un angle droit; par les extrémités de chacune de ces cordes et par l'origine on fait passer un cercle ; on demande le lieu des centres de tous ces cercles.

245. — Étant données deux courbes S et S par leurs équations dans un même système de coordonnées polaires, on suppose que l'on sache construire les tangentes à ces courbes en deux points M et M_1 situés sur un même rayon vecteur; on demande d'en déduire la tangente au point M_2 situé sur le même rayon vecteur dans la courbe S_2 qui est le lieu des milieux des distances telles que MM_1 dans les deux courbes proposées.

246. — Étant données deux coniques $C = o$ et $C' = o$, trouver le lieu des points M tels que leurs polaires par rapport à ces deux coniques se coupent sur une troisième courbe donnée $f(x, y) = o$. Étudier la question en particulier: 1° quand $f(x, y) = o$ est une droite; 2° quand $f(x, y) = o$ est un cercle.

247. — Étant donnée l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2(x \cos \lambda + y \sin \lambda - p)^2,$$

on demande de calculer en fonction des coefficients de cette équation : 1° les carrés des demi-axes de la courbe qu'elle représente, en distinguant dans les formules le grand axe et le petit axe lorsqu'il s'agit d'une ellipse; 2° les carrés a^2 et $-b^2$ du demi-axe transverse et du demi-axe imaginaire lorsqu'il s'agit d'une hyperbole. — En conclure le lieu des sommets des ellipses qui ont un foyer, un point et la longueur du petit axe communs, en distinguant les sommets des grands axes de ceux des petits axes, et résoudre le même problème dans le cas de l'hyperbole.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 6924-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE

ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 145 et suiv.)

3° Normales rectangulaires.

XXIX. **Théorème.** — *2α et $2\alpha'$ étant les angles des rayons vecteurs de deux points dont les normales sont rectangulaires,*

on a $$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$

Pour le démontrer, il suffit de se reporter au théorème XV; on y trouvera pour les distances OQ et OQ' du centre à deux tangentes rectangulaires les expressions équivalentes

pour OQ $$a\cos\alpha = a\sqrt{1 - \frac{c^2\cos^2\beta}{a^2}};$$

pour OQ' $$a\cos\alpha' = a\sqrt{1 - \frac{c^2\sin^2\beta}{a^2}},$$

et en additionnant membre à membre, après avoir élevé au carré, il vient $a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha') = a^2 + b^2$;
d'où l'expression de l'énoncé.

On peut en déduire facilement

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha' = \frac{c^2}{a^2}.$$

XXX. **Théorème.** — NN' *étant les longueurs des normales limitées au grand axe,* R *et* R' *celles des rayons des cercles osculateurs en deux points dont les normales sont rectangulaires,*

on a 1° $$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^4};$$

2° $$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^{\frac{4}{3}}}.$$

1° On a obtenu (XX) la relation

$$N = \frac{b^2}{a \cos \alpha};$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{b^2}{aN}.$$

On aurait de même pour un point défini par l'angle $2\alpha'$

$$\cos \alpha' = \frac{b^2}{aN'}$$

et par substitution dans la relation du théorème précédent, il vient

$$\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2};$$

d'où

$$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N'^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^4}.$$

2° De l'expression obtenue (XXVII)

$$R = \frac{b^2}{a \cos^3 \alpha}$$

on tire

$$\cos \alpha = \left(\frac{b^2}{aR}\right)^{\frac{1}{3}};$$

de même

$$\cos \alpha' = \left(\frac{b^2}{aR'}\right)^{\frac{1}{3}},$$

et par une substitution analogue à la précédente, on a

$$\left(\frac{b^2}{aR}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b^2}{aR'}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

et en divisant les deux membres de cette égalité par $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ on arrive à la relation cherchée

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^{\frac{4}{3}}}.$$

XXXI. **Théorème.** — *La somme des carrés des inverses des diamètres conjugués de ceux de deux points dont les normales sont rectangulaires, est constante.*

b' étant le demi-diamètre conjugué de celui du point défini par l'angle 2α, on sait (VII, *remarque*) que

$$\cos \alpha = \frac{b}{b'};$$

b'_1 étant celui qui correspond à l'angle $2\alpha'$, on a également

$$\cos\alpha' = \frac{b}{b'_1},$$

d'où l'on déduit, en vertu de la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = \frac{a^2 + b^2}{a^2},$$

$$\frac{1}{b'^2} + \frac{1}{b'^2_1} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$

II

HYPERBOLE

1° *Propriétés des tangentes.*

XXXII. — Dans l'hyperbole un seul axe rencontre la courbe, et sa longueur a est définie par la relation

$$MF' - MF = \frac{2dmn}{n^2 - m^2} = 2a.$$

Pour définir complètement la courbe, on pose

$$\frac{d^2n^2}{n^2 - m^2} = b^2$$

et ici b^2 a un signe contraire à celui de b^2 qui a défini la longueur du petit axe de l'ellipse. Si dans l'hyperbole on porte sur l'axe qui ne coupe pas la courbe, et que pour cela on appelle axe *non transverse*, une longueur égale à b défini comme on vient de le faire et de part et d'autre du centre, les deux points que l'on obtiendra seront considérés comme les extrémites de l'axe non transverse de l'hyperbole.

Cela étant, on déduit, comme on l'a fait pour l'ellipse,

$$OF = \sqrt{a^2 + b^2} = c, \qquad \frac{m}{n} = \frac{a}{c}.$$

Si l'on désigne par $2a$ l'angle des rayons vecteurs d'un point M *(fig. 14)*, on voit, d'après la figure, que l'angle FPD est précisément égal à α, et que par suite

$$MH = PD = \frac{b^2}{c}\cot g\,\alpha:$$

car

$$FD = d = \frac{b^2}{c}.$$

Par un calcul analogue à celui qui a été fait pour l'ellipse, on trouverait $\quad MF \times MF' = \dfrac{b^2}{\sin^2 \alpha}$

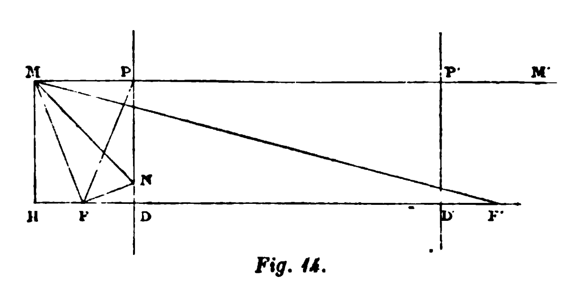


Fig. 14.

Il est alors facile de voir que toutes les relations établies pour l'ellipse s'appliqueront à l'hyperbole après qu'on y aura changé b^2 en $-b^2$ et α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$. On va les passer rapidement en revue et montrer comment certaines d'entre elles doivent s'interpréter.

Les propriétés qui forment les théorèmes VI, VII, VIII, X appartiennent à l'hyperbole; toutefois, dans l'énoncé du premier théorème d'Apollonius, on devra remplacer le mot « somme » par « différence ». Le théorème IX n'existe pas pour l'hyperbole.

La relation qui donne le théorème XI devient

$$\overline{OT}^2 - c^2 = -\frac{b^2}{\sin^2 \beta}$$

que l'on écrit $\quad C^2 - \overline{OT}^2 = \dfrac{b^2}{\sin^2 6}$

et qui se traduit ainsi : *Le cercle décrit du centre avec* OT *pour rayon est tangent à la parallèle à la tangente* MT *menée par un foyer, au point où cette parallèle est coupée par la parallèle à l'axe transverse menée par l'une des extrémités de l'axe non transverse.*

Le théorème XII s'applique à l'hyperbole; le suivant conduit à la relation $\; a^2 \operatorname{tg}^2 6 - \overline{OT'}^2 = b^2$
et peut s'exprimer : *La puissance du point* T'_1 *par rapport au cercle de centre* O *et de rayon* OT' *est constante et égale à* b^2.

Le cercle du théorème XIII existe ; mais son rayon est $\sqrt{a^2 - b^2}$; le théorème XIV donne évidemment lieu à un minimum nul qui a lieu lorsque la tangente passe par le centre, et le théorème XV exprimé par la relation

$$\overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 = \frac{a^2}{\cos^2 6} - \frac{b^2}{\sin^2 6}$$

s'énonce ainsi : *Le carré construit sur une tangente est équivalent à la différence des carrés construits sur les parallèles à cette tangente menées par les extrémités des axes, ces trois droites étant limitées aux axes.*

2° Propriétés de la normale.

XXXIII. — La longueur de la normale a pour expression

$$N = \frac{b^2}{a \sin \alpha}$$

déduite de celle de l'ellipse en changeant α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

On peut l'obtenir également, en vertu de la relation (XVIII, *remarque*)

$$l' = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b - c}$$

dans laquelle (XXXII)

$$bc = MF \times MF' = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha},$$

$$b - c = MF' - MF = 2a;$$

d'où

$$N = \frac{b^2}{a \sin \alpha}.$$

Comme pour l'ellipse, la projection de N sur les rayons vecteurs est $\frac{b^2}{a}$.

Toutes les propriétés de la normale à l'ellipse appartiennent à l'hyperbole.

Le théorème XXVI sera exprimé par la relation

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \frac{\alpha + \alpha}{2} = \frac{b^2}{dc}$$

déduite de celle qui est relative à l'ellipse en changeant α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, abstraction faite des signes de b^2.

Les diverses expressions du rayon du cercle osculateur en un point de l'hyperbole seront

$$R = \frac{b^2}{a \sin^3 \alpha} = \frac{N}{\sin^2 \alpha} = \frac{b'^3}{ab}.$$

La seconde seule $R = \dfrac{N}{\sin^2 \alpha}$

donne une construction simple de R par le moyen employé pour l'ellipse (XXVII).

De la première $R = \dfrac{b^2}{a \sin^3 \alpha}$

se déduit, pareillement à ce qui a été fait pour l'ellipse, la relation

$$\frac{1}{FM} - \frac{1}{F'M} = \frac{2}{R \sin \alpha};$$

mais cette relation ne conduit pas à la construction simple qui a été donnée pour le cas de l'ellipse.

3° *Normales rectangulaires.*

Pour l'hyperbole, la relation fondamentale est

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Elle conduit à des relations identiques à celles que l'on a trouvées pour l'ellipse.

III

ELLIPSE ET HYPERBOLE HOMOFOCALES

La propriété fondamentale d'une ellipse et d'une hyperbole homofocales consiste en ce que, aux points communs à ces deux courbes, la tangente à l'une et la normale à l'autre sont confondues.

XXXIV. **Théorème.** — *En un point quelconque du plan passent une ellipse et une hyperbole homofocales.*

Soient M (*fig. 15*) ce point, F et F' deux points quelconques choisis pour foyers d'une ellipse qui passe par le point M; ces trois points suffisent pour déterminer complètement l'ellipse.

MH étant perpendiculaire à FF' on a vu (V) que

$$MH = \frac{b^2}{c} \operatorname{tg} \alpha.$$

Si l'on considère une hyperbole ayant les foyers F et F' et passant par le point M, on devra avoir (XXXII) en désignant par b_1 la longueur de l'axe non transverse

$$MH = \frac{b_1^2}{c} \operatorname{cotg} \alpha;$$

ces deux valeurs de MH devant être les mêmes, il faudra que l'on ait $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b_1^2}{b}$.

Fig. 15.

Le point M étant choisi ainsi que les foyers F et F' on pourra toujours trouver deux valeurs b et b_1 satisfaisant à la relation précédente; ces deux valeurs et la distance $FF' = 2c$ déterminent complètement l'ellipse et l'hyperbole.

Corollaire. — *Si l'on considère toutes les ellipses et les hyperboles ayant pour foyers deux points fixes et telles que le rapport* $\frac{b_1}{b}$ *soit constant pour ces courbes considérées deux à deux, le lieu de leurs points communs se compose de deux cercles passant par les foyers.*

En effet, de la relation qu'on vient d'établir, il résulte que dans cette hypothèse $\operatorname{tg}^2 \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha$ est constant et par suite l'angle 2α; donc les points communs se trouveront sur deux segments capables de l'angle 2α décrits sur FF' l'un au-dessus, l'autre au-dessous de cette droite.

XXXV. **Théorème.** — *On considère toutes les ellipses et les hyperboles qui ont pour foyers communs deux points donnés et pour lesquelles la différence* $a^2 - a_1^2$ *de leurs axes focaux est constante; le lieu de leurs points communs est une lemniscate.*

Soient ρ et ρ' les rayons vecteurs d'un point commun à deux des courbes considérées; on sait (XXXII) que

$$\rho\rho' = \frac{b_1^2}{\sin^2 \alpha},$$

b_1 désignant la moitié de la longueur de l'axe non transverse

de l'hyperbole, et si b est le demi-petit axe de l'ellipse qui passe au point défini par les vecteurs ρ et ρ', on a (XXXIV)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1}{b};$$

d'où l'on tire $$\frac{\sin \alpha}{b_1} = \frac{\cos \alpha}{b} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + b_1^2}}$$

et par suite $$\sin^2 \alpha = \frac{b_1^2}{b^2 + b_1^2};$$

substituant cette valeur de $\sin^2 \alpha$ dans la valeur du produit $\rho\rho'$, on a $$\rho\rho' = b^2 + b_1^2.$$

Les deux courbes considérées étant homofocales, on a

$$a^2 - b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

d'où $$a^2 - a_1^2 = b^2 + b_1^2,$$

et partant $$\rho\rho' = a^2 - a_1^2.$$

D'après l'énoncé, le produit $\rho\rho'$ est constant, et comme *la lemniscate est le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes est constant*, le lieu cherché est donc une lemniscate.

XXXVI. **Théorème.** — *Un cercle passant par les deux foyers d'une ellipse rencontre cette ellipse en quatre points symétriques deux à deux par rapport au petit axe; on considère les deux hyperboles homofocales de l'ellipse et passant, l'une par deux des points d'intersection, et l'autre par les deux autres, les deux derniers n'étant pas les symétriques des deux premiers; soient* B_1 *et* B_2 *les extrémités des axes non transverses de ces hyperboles, situées du même côté du centre; la puissance de ce centre par rapport au cercle décrit sur* B_1B_2 *comme diamètre est constante, quel que soit le rayon du cercle d'intersection.*

Soient M et M' deux points d'intersection non symétriques, 2α et $2\alpha'$ les angles de leurs rayons vecteurs, on sait (XXXIII) que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1}{b}$ $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{b'_1}{b}$,

b, b_1, b'_1 ayant les significations connues.

Or les angles 2α et $2\alpha'$ sont supplémentaires, donc

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

par suite $\qquad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha'$;

d'où $\qquad \dfrac{b'}{b} = \dfrac{b}{b_1'}$;

et $\qquad b^2 = b_1 \, b'_1$,

relation qui exprime le théorème énoncé.

(*A suivre.*)

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

Il est souvent utile, de connaître des relations entre certains éléments d'un triangle rectiligne, ou bien encore, à l'inspection d'une formule donnée, de pouvoir énoncer *à priori* les particularités que présente ce triangle. Déjà, dans son ouvrage intitulé : *Questions de trigonométrie*, M. Desboves a établi un certain nombre de relations, et a proposé d'en démontrer quelques autres. — Un second ouvrage du même auteur a de plus présenté les solutions de ces dernières. — Nous allons ici donner des formules extraites de l'ouvrage allemand intitulé : *Recueil de problèmes de trigonométrie et stéréométrie,* par Reidt, et nous indiquerons rapidement la solution de ces questions. Nous nous proposons ensuite de faire connaître, en quelques mots, la manière de résoudre un certain nombre de triangles, d'après des données élémentaires. Nous engagerons nos lecteurs à faire ce que, dans son recueil d'énoncés, a fait l'auteur allemand auquel nous empruntons ces exercices. Chaque énoncé de triangle est suivi de données numériques, ce qui permet de compléter un problème d'algèbre par un calcul numérique. C'est, à notre avis, une excellente préparation aux examens.

A. M.

I

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTANGLE

1. *Si dans un triangle, on a la relation*

$$sin\ C = \frac{sin\ A + sin\ B}{cos\ A + cos\ B}$$

le triangle est rectangle en C.

Car on a

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

En remplaçant dans la relation donnée, on trouve, toute réduction faite, en mettant (sin A + sin B) en facteurs :

$$\text{tg } A \text{ tg } B = 1.$$

Donc les angles A et B sont complémentaires.

2. *Si l'on a à la fois*

$$1 + cotg\ (45 - B) = \frac{2}{1 - cotg\ A}, \quad et \quad 4S = c^2$$

le triangle est rectangle et isoscèle.

Car si l'on exprime tout en fonction de la tangente seule, on a

$$1 + \text{tg } (45 + B) = \frac{2 \text{ tg } A}{\text{tg } A - 1}.$$

En développant tg (45 + B), et chassant les dénominateurs, on trouve

$$\text{tg } A - 1 = \text{tg } A - \text{tg } A \text{ tg } B,$$

ce qui donne $\text{tg } A \text{ tg } B = 1$,

et les angles sont complémentaires;

en outre $c^2 = a^2 + b^2, \quad 4S = 2ab = c^2$

Donc $a^2 + b^2 = 2ab$, ou $a - b = 0$.

3. *Un triangle est rectangle si l'on a*

$$sin\ A - cos\ B = cos\ C.$$

Car en remplaçant cos C par sa valeur — cos (A + B), et développant, il vient

$$\sin A (1 - \sin B) = \cos B (1 - \cos A).$$

Je multiplie par (1 + sin B) (1 + cos A), ce qui est permis, puisque aucun des facteurs n'est nul; je remplace les différences de carrés par leur valeur, et je trouve

$$\sin A (1 + \cos A) \cos^2 B = \cos B (1 + \sin B) \sin^2 A$$

ou enfin $(1 + \cos A) \cos B = (1 + \sin B) \sin A$;
en développant on trouve

$$\cos B - \sin A = \cos C;$$

comparant à la relation primitive, on en tire

$$\cos C = 0, \text{ ou } C = 90°.$$

4. *Si l'on a la relation*

$$\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A},$$

le triangle est rectangle.

Car, en développant, on trouve

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = 0$$

ou

$$\cos (A + B) = 0$$

Donc

$$A + B = 90°.$$

5. *Quand on a la relation*

$$\frac{\sin A}{\cos B} = \sin C + \cos C \operatorname{cotg} A,$$

le triangle est rectangle.

En effet, si l'on remplace $\cos B$ par $-\cos (A + C)$, on trouve après réduction

$$\sin^2 A = \sin^2 C \sin^2 A - \cos^2 C \cos^2 A$$
$$= 1 - \cos^2 A - \cos^2 C,$$

ou bien

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 - \cos^2 C = \sin^2 C.$$

Donc

$$\sin^2 C = 1.$$

6. *Si l'on a* $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$, *A et B étant différents, le triangle est rectangle.*

En effet on en tire

$$\sin A - \sin B = \cos B - \cos A$$

ou

$$2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} = 2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{A + B}{2}.$$

Donc

$$\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{A + B}{2},$$

et par suite

$$\frac{A + B}{2} = 45°.$$

7. *Si l'on a la relation* $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos A}$, *le triangle est rectangle ou isoscèle.*

Car on tire facilement

$$2 \sin A \cos A = 2 \sin B \cos B,$$

ou $$\sin 2A = \sin 2B,$$

ce qui donne $$2A = 2B, \quad \text{ou } 2A + 2B = 180^{\circ}.$$

8. Nous signalerons encore les formules suivantes, qui ont lieu lorsque le triangle est rectangle :

$$(\alpha) \qquad \text{séc } 2A - \text{tg } 2A = \frac{b-a}{b+a}.$$

Car on a, puisque $\text{tg } A = \frac{a}{b}$:

$$\frac{b-a}{b+a} = \text{tg}(45 - A) = \frac{\sin(45 - A)}{\cos(45 - A)} = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$$
$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A - 2 \sin A \cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$
$$= \frac{1}{\cos 2A} - \frac{\sin 2A}{\cos 2A},$$

$$(\beta) \qquad \text{coséc } A + \text{cotg } A = \frac{a}{c-b}.$$

En effet, on a

$$\text{coséc } A = \frac{c}{a}; \ \text{cotg } A = \frac{b}{a}.$$

Donc, en remplaçant, et chassant les dénominateurs, il vient $$c^2 - b^2 = a^2,$$
ce qui est évident, puisque le triangle est rectangle.

(γ) $\sin 2A = \frac{2ab}{c^2}$; car $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 . \frac{a}{c} . \frac{b}{c}$.

(δ) On a aussi $$\frac{a^2}{bc} = \text{séc } A - \cos A$$

car on a $\text{séc } A - \cos A = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} = \frac{\sin^2 A}{\cos A}$.

Or $\sin^2 A = \frac{a^2}{c^2}$; $\cos A = \frac{b}{c}$.

Donc, en remplaçant, on trouvera bien une identité.

Remarque. — Dans ce qui précède nous avons partout désigné l'angle droit par C, et par suite, l'hypoténuse par c, comme le fait Reidt dans son recueil de problèmes.

(A suivre.)

VARIATIONS DES FONCTIONS BICARRÉES

DÉDUITES DE CELLES DES FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Fajon**, professeur au Lycée de Cahors.

I. — Trinome carré $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Détermination des maximum et minimum.

En posant $x^2 = z$, cette fonction devient
$$y = az^2 + bz + c.$$
Si x croît d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, z décroît d'une manière continue depuis $+\infty$ jusqu'à o et croît ensuite depuis o jusqu'à $+\infty$, la fonction y est continue et les valeurs qu'elle prend pendant que z va de $+\infty$ à o se reproduisent dans l'ordre inverse lorsque z croît de o à $+\infty$. Donc lorsque $z = 0$, y passe par un maximum ou un minimum égal à c, et en calculant l'accroissement d'y lorsque z croît de o à h, quantité positive aussi petite qu'on voudra, on voit facilement que c est minimum ou maximum selon que b est positif ou négatif.

Pour obtenir les autres maximum ou minimum dont le trinôme est susceptible, remarquons que si z parcourait l'échelle complète des grandeurs depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, y passerait par un maximum ou un minimum égal à $c - \frac{b^2}{4a}$ lorsque z serait égal à $-\frac{b}{2a}$.

Donc lorsque z ne parcourra que l'échelle des grandeurs positives, y passera par ce maximum ou minimum si $-\frac{b}{2a}$ est positif, c'est-à-dire, *si* a *et* b *ont des signes contraires.*

Mais si a et b ont le même signe, $-\frac{b}{2a}$ sera négatif, et z ne pouvant passer par cette valeur, y n'aura d'autre maximum ou minimum que c.

Lois des variations du trinôme bicarré.

Si a est positif, y partant de $+\infty$ marche vers un minimum ; si a est négatif, y partant de $-\infty$ passe d'abord par un maximum. On peut donc établir dans tous les cas la marche des variations du trinôme.

Soit, par exemple, $a < 0$, $b > 0$. La fonction y croît depuis $-\infty$ jusqu'à $c - \frac{b^2}{4a}$, décroît ensuite jusqu'à c pour croître de nouveau jusqu'à $c - \frac{b^2}{4a}$ et décroître jusqu'à $-\infty$.

Soit encore $a > 0$, $b > 0$. La fonction décroît depuis $+\infty$ jusqu'à c et croît ensuite jusqu'à $+\infty$.

Si la variable est assujettie à rester dans certaines limites, comme un sinus par exemple, il faut examiner si la valeur de cette variable, correspondante à un maximum ou minimum, est ou non comprise dans les limites données, et, s'il y a lieu, discuter complètement. La recherche du minimum du trinôme $a^2 \sin^4 x - 2b^2 \sin^2 x + c^2$ offre un exemple de ce cas.

II. — Variations de la fraction bicarrée $y = \frac{ax^4 + bx^2 + c}{a'x^4 + b'x^2 + c'}$.

Détermination des maximum et minimum.

En posant $x^2 = z$, cette fonction devient :

$$y = \frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'} \qquad (1)$$

Elle est continue, et l'on voit immédiatement, comme pour le trinôme bicarré, qu'elle passe par un maximum ou un minimum égal à $\frac{c}{c'}$ lorsque $z = 0$.

$\frac{c}{c'}$ est minimum ou maximum selon que $bc' - cb'$ est positif ou négatif. En effet, soit K l'accroissement d'y lorsque z passe de 0 à une valeur positive h aussi petite qu'on voudra. On a :

$$K = \frac{ah^2 + bh + c}{a'h^2 + b'h + c'} - \frac{c}{c'} = \frac{h[(ac' - ca')h + (bc - cb')]}{c'^2 + b'c'h + a'c'h^2}$$

h étant infiniment petit, le dénominateur a le signe de c'^2 qui est positif, et le numérateur celui de $bc' - cb'$. Donc K est positif ou négatif selon que $bc' - cb'$ est négatif ou positif.

Si $c' = o$, $\frac{c}{c'} = \infty$. Dans ce cas, lorsque $z = o$, y passe par $+\infty$ ou par $-\infty$ en conservant son signe.

Pour déterminer les autres maximum et minimum, supposons que z décroisse depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$. On sait qu'alors y n'est susceptible de maximum ou minimum que lorsque l'équation :

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 - 2(bb' - 2ac' - 2ca)y + b^2 - 4ac = o \quad (2)$$

a ses racines réelles et inégales. Soit $y' < y''$. Ces deux racines y' et y'' sont respectivement maximum et minimum si $b'^2 - 4a'c'$ est positif; minimum et maximum si ce coefficient est négatif, et, s'il est nul, l'une des racines devenant infinie, l'autre racine est le seul maximum ou minimum.

Les valeurs correspondantes de z sont données par l'équation :

$$z = \frac{b - b'y}{2(a'y - a)} \quad (3)$$

Puisque z ne peut varier qu'entre $+\infty$ et o, la fonction y passera par les deux maximum et minimum y', y'', par l'un d'eux seulement ,ou ne passera par aucun d'eux selon que z' et z'', valeurs correspondantes de z, seront toutes deux positives, l'une d'elles seulement positive, ou toutes deux négatives.

Donc en résolvant successivement les équations (2) et (3), on peut, dans chaque cas particulier et lorsque les coefficients sont numériques, déterminer les maximum et minimum d'y autres que $\frac{c}{c'}$.

Equation en z. — Condition de maximum ou minimum.

On peut obtenir une équation ayant pour racines les valeurs de z correspondantes aux maximum et minimum de la fonction, et déduire de cette équation un caractère général très simple pourreconnaître d'avance l'existence et le nombre de ces maximum ou minimum.

Cette équation, que j'ai fait remarquer dans une note pré-

cédente (*), s'obtient en éliminant y entre les équations (2) et (3), ou, plus simplement, entre les équations (1) et (3), ce qui donne :

$$(ab' - ba')z^2 + 2(ac' - ca')z + (bc' - cb') = 0, \quad (4)$$

équation dont la loi de formation est bien simple.

Or, on a l'égalité :

$$(bb' - 2ac' - 2ca')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c) = 4[(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')];$$

l'équation (4) a donc ses racines réelles et inégales, égales ou imaginaires, en même temps que l'équation (3), et l'on conclut la condition suivante du maximum ou minimum :

Pour que la fraction bicarrée ait d'autres maximum ou minimum que $\frac{c}{c'}$, *il faut et il suffit que l'équation en* z *ait au moins une racine positive.*

Cette fraction a donc un, deux, trois, cinq maximum ou minimum en comptant $\frac{c}{c'}$, selon que l'équation en z a ses racines négatives, une seule positive ou toutes deux positives.

La condition du maximum ou minimum étant remplie, on peut résoudre l'équation (4), calculer les valeurs d'y correspondantes aux racines positives, au moyen de l'équation

$$y = \frac{2az + b}{2a'z + b'},$$

que l'on déduit de l'équation (3) et distinguer ensuite le maximum et le minimum à l'aide du signe de $ab' - ba'$.

Remarque. — Nous croyons devoir appeler l'attention des élèves sur l'équation (4) qui permet de résoudre facilement les deux questions suivantes :

1° Étant donnée une fraction du second degré ou bicarrée dont deux coefficients sont inconnus, déterminer ces deux coefficients par la condition que la fraction devienne maximum et minimum pour deux valeurs données de la variable.

2° Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients des fractions

(*) *Journal de mathématiques* 1878, p. 361.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \text{ et } \frac{mx^2 + nx + p}{m'x^2 + n'x + p'},$$

pour que ces deux fractions deviennent, 1° maximum ou minimum pour la même valeur d'x ; 2° maximum et minimum pour les mêmes valeurs de la variable.

Lois des variations de la fraction bicarrée.

Lorsqu'on a déterminé les maximum et minimum ainsi que les valeurs correspondantes de z et par suite d'x, la marche des variations de la fraction bicarrée peut être établie rigoureusement dans tous les cas particuliers à l'aide de la continuité de la fonction et du caractère suivant :

Si z décroît depuis $+\infty$, la fraction

$$\frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'},$$

commence par décroître ou par croître selon que $ab' - ba'$, et au cas où ce binôme est nul, selon que $ac' - ca'$ est positif ou négatif.

Prenons pour exemple l'étude des variations de la fonction

$$y = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1},$$

question posée aux examens oraux pour l'École polytechnique (1876).

Si $\qquad x^2 = z, \; y = \dfrac{z^2 + 1}{z + 1}$;

d'où l'on déduit $\qquad z = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 4}}{2}.$

Les racines du trinôme $y^2 + 4y - 4$ sont $y' = -2 - 2\sqrt{2}$, $y'' = -2 + 2\sqrt{2}$, z' est négatif; $z'' = -1 + \sqrt{2}$.

Donc y passe par le minimum $-2 + 2\sqrt{2}$ lorsque x prend les valeurs $+\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$ et $-\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$, et par le maximum 1 lorsque $x = 0$.

Si donc x décroît depuis $+\infty$ jusqu'à 0 et depuis 0 jusqu'à $-\infty$ la fonction y décroît depuis 1 jusqu'à son minimum $-2 + 2\sqrt{2}$, croît jusqu'à son maximum 1 qu'elle atteint lorsque $x = 0$, décroît de nouveau jusqu'au même minimum $-2 + \sqrt{2}$ et croît enfin jusqu'à 1.

La courbe de cette fonction, symétrique par rapport à l'axe des y, a deux branches infinies asymptotes à une parallèle à l'axe des x représentée par $y = 1$, qui est aussi tangente à la courbe au point d'intersection avec l'axe des y. Cette courbe est comprise entre cette tangente et celle qui a pour équation $y = -2 + 2\sqrt{2}$.

Comme seconde application, cherchons les variations de la fraction
$$y = \frac{2x^4 - 4x^2 + 2}{4x^4 - 5x^2 - 2}.$$

En posant $x^2 = z$, on a
$$y = \frac{2z^2 - 4z + 2}{4z^2 - 5z - 2},$$
d'où l'on déduit :
$$z = \frac{5y - 4 \pm \sqrt{57y^2 - 24y}}{4(2y - 1)}.$$

Les racines de $57y^2 - 24y$ sont $y' = 0$ maximum, $y'' = \frac{8}{19}$ minimum.

A ces valeurs d'y répondent respectivement $z' = 1$, $z'' = 3$. On a enfin $ab' - ba' = 6$.

Donc x décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à 0 et depuis 0 jusqu'à $-\infty$, la fonction y décroît depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à son minimum $\frac{8}{19}$ et croît ensuite jusqu'à $+\infty$, passe brusquement à $-\infty$, croît jusqu'à son maximum 0, décroît jusqu'à son minimum -1, valeur qu'elle prend lorsque $x = 0$, et remonte ensuite la série des variations par lesquelles elle vient de passer.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS A SAINT-CYR

— Résoudre le système d'équations
$$(ap^n + bq^n)x + (ap^{n+1} + bq^{n+1})y = ap^{n+2} + bq^{n+2}$$
$$(ap^m + bq^m)x + (ap^{m+1} + bq^{m+1})y = ap^{m+2} + bq^{m+2}$$

— Trouver sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle un point tel que la somme de perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés de l'angle droit soit égale à une quantité donnée.

— Etant donnée l'équation

$$x^4 - 2(m-5)x^2 + m^2 + 10m - 23 = 0,$$

entre quelles limites faut-il faire varier m pour que cette équation ait zéro, deux ou quatre racines réelles?

— Connaissant les restes de la division d'un polynôme entier en x par $x-a$, $x-b$, $x-c$, trouver le reste de la division par $(x-a)(x-b(x-c)$.

— L'équation

$$(1+p^2+q^2)x^2 - [r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs]x + tr - s^2) = 0$$

a ses racines réelles; si les racines sont égales, on a la relation

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

— Trouver sur la ligne qui joint les centres de deux sphères un point d'où l'on voie sur les deux sphères deux zones équivalentes.

— Quelle est la pyramide régulière à base carrée de volume maximum ayant une surface latérale donnée?

— Vérifier l'identité

$$\sin 3a \sin a = \sin^2 2a - \sin^2 a.$$

— On donne une demi-circonférence AB; on demande de trouver sur la courbe un point M tel que si l'on mène la corde AM et la perpendiculaire MP sur le diamètre, le segment AM et le triangle rectangle OMP, tournant autour de AB, engendrent des volumes équivalents.

— Par un point P, mener une sécante PDE telle que la projection IK de la partie située dans le cercle sur le diamètre passant par le point ait une longueur donnée.

— Circonscrire à un cercle donné un trapèze dont on donne les deux bases.

— On veut renfermer une surface de 348mq,6 dans un triangle équilatéral; on demande le rayon du cercle circonscrit et le côté du triangle.

— Etant donnée la formule $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right)$, dans laquelle a et b sont positifs, déterminer la valeur qu'il faut donner à x pour que y ait une valeur donnée c. Peut-on faire prendre à y toutes les valeurs? Même question dans le cas où l'on a

$$y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right).$$

— Deux rectangles ont pour dimensions respectives x, y et x', y'; on connait la somme des bases, la somme des surfaces des deux rectangles, et de plus les surfaces des rectangles ayant pour dimensions la base de l'un et la hauteur de l'autre; trouver les dimensions des rectangles donnés.

— Si l'on a $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, on a les formules

$$AB - ab = (A-a)(B+b) = (A+a)(B-b)$$
$$AB^2 - ab^2 = (A-a)(B^2 + Bb + b^2)$$
$$AB^2 + ab^2 = (A+a)(B^2 - Bb + b^2).$$

La première de ces formules permet d'avoir la différence des secteurs semblables; les dernières donnent le volume du tronc de cône de première ou de seconde espèce.

— Construire un triangle dont on connait un côté, la moyenne géométrique entre les deux autres, et la bissectrice correspondant au premier côté.

— On mène les bissectrices des quatre angles d'un quadrilatère convexe ABCD; on obtient ainsi un deuxième quadrilatère MNPQ dont on demande la surface en fonction des côtés et des angles du quadrilatère donné.

— On donne un rectangle et on demande de diminuer ses côtés d'une même longueur de façon que le rectangle formé avec les nouvelles dimensions sont une fraction donnée du premier.

— Couper un cône donné par un plan parallèle à la base de façon que la surface totale du tronc soit égale à la surface totale du petit cône.

— Etant donnés un cercle et une tangente à ce cercle, on propose de trouver sur la circonférence un point tel que la somme des distances de ce point au point de contact et à la tangente soit égale à une ligne donnée.

— Insérer entre 3 et 768 un nombre de moyens géométriques tel que 192 soit l'un d'eux.

— Etant données les distances des sommets d'un triangle au point d'où l'on voit les côtés sous le même angle, trouver les côtés et la surface.

— Connaissant trois lignes menées d'un point intérieur à trois sommets d'un carré, trouver le côté de ce carré.

— Le premier terme d'une progression géométrique est 3 ; le nombre de termes est 8, leur somme 765. Trouver la raison et le dernier terme.

— On donne un cercle, et une tangente xy ; mener une corde parallèle à la tangente, et telle que, en abaissant des extrémités des perpendiculaires sur la tangente, le rectangle formé ait une diagonale de longueur donnée.

— Trouver sur la ligne des centres de deux circonférences un point tel que la somme des tangentes menées de ce point aux deux circonférences soit égale à une valeur donnée l.

— Quel doit être le dernier nombre de la première colonne d'une table de Pythagore pour que la somme de tous les nombres inscrits dans cette table soit de 36100 ?

— Trouver le maximum du volume inscrit dans une sphère et formé d'un cylindre surmonté de deux cônes ayant même base que le cylindre.

— Trouver les côtés d'un triangle rectangle connaissant le périmètre et la somme des volumes engendrés par la rotation successive autour des deux côtés de l'angle droit.

— Trouver les rayons d'un tronc de cône connaissant la hauteur, la surface latérale et la différence des rayons.

— Inscrire dans une sphère de rayon R un tronc de cône de hauteur et de volume donnés.

— Les trois côtés d'un triangle sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs ; la surface du triangle est les $\frac{4}{10}$ du produit des plus grands côtés. Calculer les trois côtés, la surface, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

— Calculer le rayon d'une fenêtre formée d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle, connaissant sa hauteur totale et sa surface.

— Calculer le volume d'un cylindre connaissant sa hauteur et sa surface totale.

— Trouver sur une demi-circonférence un point M tel que la droite qui joint ce point au centre soit bissectrice de l'angle formé par les droites qui joignent le point M à l'extrémité A du diamètre et à un point C de ce diamètre.

NOTE SUR UN POINT DE LA DISCUSSION

DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

A TROIS INCONNUES

Par M. **E.-J. Boquel.**

Lorsqu'on résout un système de trois équations du premier degré à trois inconnues, on obtient les valeurs des inconnues par des formules telles que $x = \frac{N}{D}$, $y = \frac{N'}{D'}$, $z = \frac{N''}{D''}$, et lorsqu'on suppose $D = 0$, en même temps que $N = 0$, on sait qu'il en résulte $N' = 0$ et $N'' = 0$. Mais les démonstrations que l'on donne ordinairement de ce fait dans les cours me semblent ou trop indirectes, ou même insuffisantes. Il est pourtant facile d'établir le théorème très clairement comme il suit, en supposant, bien entendu, qu'on ait préalablement démontré la condition nécessaire et suffisante pour que n équations homogènes et linéaires à n inconnues admettent pour ces inconnues un système de solutions dont une au moins soit différente de zéro.

Soit, en effet
$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$
le système considéré.

Si l'on suppose D et N $= 0$, c'est-à-dire
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$
ou, ce qui est la même chose :
$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \quad (2) \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} d & d' & d'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$
je dis qu'il en résulte
$$N' = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ d'' & c'' & a'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad N'' = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = 0$$

Établissons, par exemple, que N' = o; c.-à-d., si l'on veut que $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ d & d' & d'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$.

Considérons le système des quatre équations homogènes et linéaires à trois inconnues

$$\left\{\begin{array}{ll} a\lambda + a'\mu + a''\nu = 0 & (4) \\ b\lambda + b'\mu + b''\nu = 0 & (5) \\ c\lambda + c'\mu + c''\nu = 0 & (6) \\ d\lambda + d'\mu + d''\nu = 0 & (7) \end{array}\right.$$

La condition (2) exprime que les trois équations (4), (5), (6) admettent pour λ, μ, ν, un système de solutions dont une au moins n'est pas nulle.

La condition (3) exprime, de son côté, que les trois équations (5), (6), (7) admettent pour λ, μ, ν, des solutions dont une au moins n'est pas nulle.

Soient λ_1, μ_1, ν_1, des valeurs de λ, μ, ν qui vérifient (5) et (6); en vertu de (2), ces valeurs vérifient l'équation (4); en vertu de (3), elles vérifient également l'équation (7); donc elles vérifient simultanément les quatre équations (4), (5), (6) et (7).

Mais la condition qui exprime que les trois équations homogènes et linéaires (4), (6), (7) admettent des solutions λ_1, μ_1, ν_1 dont une au moins n'est pas nulle, est précisément que le déterminant des coefficients de ces trois équations soit nul, c.-à-d. que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ d & d' & d'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

c.-à-d. N = o; c. q. f. d.

Il est clair qu'on reconnaît de même que N'' = o.

Donc le théorème est établi.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES

Par M. J. Collin, ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur de mathématiques.

Le théorème de Descartes n'est qu'une conséquence du théorème de Rolle.

Autrement dit, supposant connu le théorème de Rolle, nous allons en déduire le *théorème de Descartes.*

Dans toute équation algébrique $f(x) = 0$, *à coefficients réels, et ordonnée suivant les puissances décroissantes de* x, *le nombre* p *des racines positives ne peut surpasser le nombre* v *des variations, et, s'il lui est inférieur, leur différence* $v - p$ *est un nombre pair.*

Et d'abord ce théorème est vrai, on peut le constater, pour les équations du 1er et du 2e degré.

Or nous disons que, s'il est vrai pour les équations de degré $m - 1$, il est vrai aussi pour celles de degré m. En effet, soit une équation quelconque de degré m,

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0 \quad \text{ou } f(x) = 0.$$

Prenons l'équation dérivée

$$mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} = 0 \text{ ou } f'(x) = 0$$

et appelons p' le nombre des racines positives de $f'(x) = 0$. Cela étant, supposons d'abord que $f(x) = 0$ n'a pas de racines égales, et distinguons deux cas :

I. A_{m-1} *et* A_m *sont de signes contraires.* Alors $f'(x) = 0$ a une variation de moins que $f(x) = 0$. Puisque nous supposons le théorème vrai pour les équations de degré $m - 1$, nous avons $p' \leq v - 1$, c'est-à-dire au plus $v - 1$ racines positives de la dérivée, a', b',... f', qui avec 0 et $+\infty$ constituent au plus v intervalles où peuvent se trouver des racines positives de $f(x) = 0$. Donc $f(x) = 0$ a au plus v racines positives. — De plus, si $p < v$, on a $v - p = 2K$; car A_m et A_{m-1} étant de signes contraires, p et p' sont de parités différentes; or $v - 1 - p' = 2K'$, K' pouvant être nul; donc $v - p = 2K$.

II. A_{m-1} *et* A_m *sont de même signe.* Alors $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ ont le même nombre de variations v. Nous avons encore $p' \leq v$. Considérons donc le cas le plus défavorable, c'est-à-dire celui où $p' = v$. Alors, à première vue du moins, o, les racines a', b',... f' et $+\infty$ constituent $v + 1$ intervalles où peut se trouver une racine positive de $f(x) = 0$. Mais il est facile de voir que, dans l'intervalle de o à a, il ne peut pas en exister. — En effet, d'une part, $f(0) = A_m$; d'autre part, on a $f(a' - h) \cdot f'(a' - h) > 0$; mais $f(a' - h)$ a même signe que $f(a')$, et $f'(a' - h)$ même signe que $f'(0)$, donc, dans ce cas-ci, même signe que $f(0)$; donc $f(a') \cdot f(0) > 0$. — Donc, encore dans ce cas, au plus v racines positives pour $f(x) = 0$. — De plus, si $p < v$, on a $v - p = 2K$; car A_m et A_{m-1} étant de même signe, p et p' sont de même parité; or $v - p' = 2K'$; K' pouvant être nul; donc $v - p = 2K$.

Supposons maintenant que $f(x) = 0$ ait p_1 racines égales positives; soient a, b,... e ces racines, et α, β,... ε, leurs degrés respectifs de multiplicité. L'équation $f'(x) = 0$ admet ces mêmes racines avec des degrés de multiplicité respectivement égaux à $\alpha - 1$, $\beta - 1$,..., $\varepsilon - 1$, et en outre admet p'_1 racines positives propres a', b'... — Or forcément d'après le théorème de Rolle, si l'on écrit la suite des racines de $f(x) = 0$ dans leur ordre de grandeur, chaque racine a, b,... est encadrée par deux des racines propres a', b',..., et entre deux racines a', b' qui encadrent une racine a, il ne peut y avoir de racine simple de $f(x) = 0$, de sorte que sur les $p'_1 + 1$ intervalles fournis par les p'_1 racines propres de $f'(x) = 0$ avec o et $+\infty$, il n'y en a que $p'_1 + 1 - p_1$ qui puissent fournir des racines simples de $f(x) = 0$. Cela posé, si nous prenons pour exemple le cas de $A_m \cdot A_{m-1} < 0$, nous aurons

$$\alpha - 1 + \beta - 1 + \ldots + \varepsilon - 1 + p'_1 \leq v - 1$$

en considérant $f'(x) = 0$; de là nous déduisons

$$\alpha + \beta + \ldots + \varepsilon + p'_1 + 1 - p_1 \leq v.$$

On arriverait au même résultat dans le cas de $A_m \cdot A_{m-1} > 0$.

En résumé : Si le théorème est vrai pour les équations du degré $m - 1$, il est vrai aussi pour celles du degré m; or il

est vrai, on peut le constater, pour les équations du 1[er] et du 2[e] degré; donc il est vrai pour celles du 3[e] degré, etc., donc il est général.

NOTA. — Nous avons eu connaissance, après que la rédaction de la note précédente était déjà terminée, d'une démonstration nouvelle du théorème de Descartes, qui a été donnée récemment par M. Laguerre dans *les Nouvelles Annales de Mathématiques*; mais comme notre démonstration diffère notamment de celle de ce géomètre, nous croyons néanmoins utile de la faire connaître.

NOTE SUR LES FRACTIONS CONTINUES
INDÉFINIES, NON PÉRIODIQUES

par M. **Kœhler.**

Lorsqu'on cherche à transformer en fraction continue une fonction, développée en série, on obtient en général un développement de la forme

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

a_n et b_n étant des fonctions du rang n de la fraction intégrante. En opérant comme dans le cas où les numérateurs $a_1, a_2, \ldots$ sont égaux à l'unité, on trouve aisément les relations

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}$$
$$q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}$$

qui déterminent les deux termes de la n^{me} réduite $\frac{p_n}{q_n}$ en fonction des termes des deux réduites précédentes.

Il n'est pas difficile de transformer en fraction continue une fraction dont on connaît le développement en série; mais le problème inverse présente au contraire le plus souvent d'assez grandes difficultés. Il s'agit de trouver l'expression générale d'une réduite, connaissant la loi de formation

des quantités a_n, b_n. Voici une méthode de calcul qui réussit dans certains cas :

Soient $a_n = f_1(n)$, $b_n = f_2(n)$; on aura, en désignant par u_n l'une ou l'autre des quantités p_n, q_n :

$$u_n = f_2(n)u_{n-1} + f_1(n)u_{n-2}.$$

Désignant par $\varphi(n)$ et $\psi(n)$ deux fonctions inconnues de l'indice n, je mets l'équation précédente sous la forme

$$u_n + \varphi_n u_{n-1} = \psi_n [u_{n-1} + \varphi(n-1)u_{n-2}]$$

On devra avoir les deux identités

$$\left.\begin{aligned} \psi(n) - \varphi(n) &= f_2(n) \\ \psi n - \varphi(n-1) &= f_1(n) \end{aligned}\right\} (1)$$

et on cherchera à déterminer d'après ces conditions les deux fonctions inconnues φ et ψ, ce qui est *quelquefois possible* par la méthode des coefficients indéterminés, lorsque f_1 et f_2 sont des fonctions entières.

Admettons que φ et ψ soient connues; on aura la suite d'identités

$$\left.\begin{aligned} &u_n + \varphi(n)u_{n-1} = \psi(n)[u_{n-1} + \varphi(n-1)u_{n-2}] \\ &u_{n-1} + \varphi(n-1)u_{n-2} = \psi(n-1)[u_{n-2} + \varphi(n-2)u_{n-3}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_3 + \varphi(3)u_2 = \psi(3)[u_2 + \varphi(2)u_1] \end{aligned}\right\} (2)$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$u_n + \varphi(n)u_{n-1} = \psi(n)\psi(n-1)\ldots\psi(3)[u_2 + \varphi(2)u_1]$$

ou, pour abréger,

$$u_n = -\varphi(n)u_{n-1} + F(n)$$

et de même

$$u_{n-1} = -\varphi(n-1)u_{n-2} + F(n-1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_3 = -\varphi(3)u_2 + F(3),$$

les fonctions F renfermant u_1 et u_2.

Il est facile d'éliminer u_{n-1}, u_{n-2} . . . en multipliant la deuxième égalité par $-\varphi(n)$, la troisième par $\varphi(n-1)\varphi(n)$ et ainsi de suite, et en ajoutant les résultats. On aura ainsi l'expression générale de u_n en fonction de n et des deux premiers termes de la suite u_1 et u_2.

Je vais appliquer ce qui précède à la conversion en série de la fraction continue :

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cdots}}}}$$

On a $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{2}$, ...
en général $u^n = n(u_{n-1} + u_{n-2})$
et $f_1(n) = f_2(n) = n$.
Les identités (1) deviennent $\psi(n) - \varphi(n) = n$

$$\psi(n) \cdot \varphi(n-1) = n$$

On peut prendre pour ψ et φ des fonctions du premier degré renfermant chacune deux constantes, poser :

$$\psi(n) = An + B, \ \varphi(n) = \alpha n + \beta$$

et par suite $\varphi(n - 1) = \alpha n - \alpha + \beta$.

Les équations de condition seront :

$$An + B - \alpha n - \beta = n$$
$$(An + B)(\alpha n - \alpha + \beta) = n.$$

Elles sont vérifiées, quel que soit n, en prenant

$$A = 0, \ \alpha = \beta = B = -1,$$

de sorte que $\psi(n) = -1$, $\varphi(n) = -n - 1$.

La suite d'identités (2) sera donc

$$u_n - (n+1)\,u_{n-1} = -[u_{n-1} - nu_{n-2}]$$
$$u_{n-1} - nu_{n-2} = -[u_{n-2} - (n-1)\,u_{n-3}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_4 - 5\,u_3 = -(u_3 - 4\,u_2)$$
$$u_3 - 4\,u_2 = -(u_2 - 3\,u_1).$$

Je multiplie la première par $(-1)^n$, la seconde par $(-1)^{n-1}$, etc., j'ajoute et il vient :

$$(-1)^n (u_n - {}_{n+1})\,u_{n-1}) = u_1 - 3u_1.$$

Cette dernière égalité permet de trouver p_n et q_n.

Pour avoir p_n, je fais $u_2 = p_2 = 2$, $u_1 = p_1 = 1$, $u_2 - 3u_1 = -1$; par suite

$$(-1)^n p_n = (-1)^n (n+1) u_{n-1} - 1.$$
$$(-1)^{n-1} p_{n-1} = (-1)^{n-1} n\, u_{n-2} - 1.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^2 p_2 = (-1)^2 3 p_1 - 1.$$

Je multiplie la première égalité par $(-1)(n+1)$, la seconde par $(-1)^2(n+1)n$, etc., la dernière par $(-1)^{n-2}$ $(n+1)n(n-1)\ldots 6.5.4$, et j'obtiens par addition :

$$(-1)^n p_n = (-1)^n(n+1)n\ldots.5.4.3 + (-1)^{n-1}$$
$$(n+1)n\ldots 5.4 + \ldots. + (-1)^3(n+1)n + (-1)^2(n+1) - 1.$$

Pour avoir q_n, il faut reprendre le même calcul, en faisant

$$u_2 = q_2 = 4,\ u_1 = q_1 = 1,\ u_2 - 3u_1 = 1\,;$$

on trouve alors:

$$(-1)^n q_n = (-1)^n(n+1)n\ldots 5.4.3 + (-1)^{n-1}(n+1)n\ldots 5.4$$
$$+ \ldots + (-1)^3(n+1)n + (-1)^2(n+1) + 1.$$

En divisant par $(-1)^n(n+1)n\ldots 3.2.1$ les deux termes de la réduite $\frac{p_n}{q_n}$, elle devient :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \ldots + \frac{1}{(-1)^{n-1}\,2.3.4\ldots(n+1)}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{(-1)^n\,2.3.4\ldots(n+1)}}$$

Comme on a $\frac{1}{e} = e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \ldots..$ l'expression précédente, lorsque n augmente indéfiniment, n'est autre chose que $\dfrac{e^{-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - e^{-1}} = \dfrac{1}{e-1}$.

Voici comment Euler est arrivé à la fraction continue que je viens d'étudier.

Soit $1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \ldots.$

On a $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2-1}}$;

je remplace $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}$ ou bien 2 par

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}} = 2 + x = 2 + \frac{2}{3-1},$$

afin d'avoir en fraction continue les trois premiers termes de la série ; cette fraction est

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 - 1}}}$$

Remplaçant $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{3} - \frac{1}{3.4}$ pour avoir les quatre premiers termes, et continuant ainsi indéfiniment, on trouve

$$1 - \frac{1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cdots}}}}$$

puis $$\frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e - 1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cdots}}}$$

enfin $$\frac{e}{e - 1} - 1 = \frac{1}{e - 1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cdots}}}$$

Voici un autre exemple de transformation de fraction continue en série. Soit $F = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^4}{3 + \cfrac{2^4}{5 + \cdots + \cfrac{n^4}{2n + 1 + \cdots}}}}$

dans laquelle la $n + 1^{me}$ réduite correspond à $\frac{n^4}{2n + 1}$.

On a ici $u_n = (2n - 1)\, u_{n-1} + (n-1)^4\, u_{n-2}$, u_n désignant toujours p_n ou q_n, et aussi $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{4}$.

Les identités qui déterminent $\psi(n)$ et $\varphi(n)$ sont

$$\psi(n) - \varphi(n) = 2n - 1$$
$$\psi(n) \,.\, \varphi(n-1) = (n-1)^4$$

et on trouve facilement $\varphi(n) = -n^2$, $(\psi n) = -(n-1)^2$.

Donc $p_n - n^2 p_{n-1} = -(n-1)^2\,[p_{n-1} - (n-1)^2 p_{n-2}]$

$$p_{n-1} - (n-1)^2 p_{n-2} = -(n-2)^2\,[p_{n-2} - (n-2)^2 p_{n-3}]$$

. . . .

$$p_3 - 3^2 p_2 = -2^2[p_2 - 2^2.p_1] = -2^2.(-1)$$

La valeur de p_n est

$$\begin{aligned} p_n = {} & (-1)^{n-1}(n-1)^2(n-2)^2 \ldots 3^2 \,.\, 2^2 \\ & + (-1)^{n-2} n^2(n-2)^2(n-3)^2 \ldots 3^2 \,.\, 2^2 + \ldots \\ & + (-1) n^2(n-1)^2 \ldots 4^2 \,.\, 3^2 \,.\, 1^2 \\ & + n^2(n-1)^2 \ldots 4^2 \,.\, 3^2 \,.\, 2^2. \end{aligned}$$

Pour calculer q_n on remarquera que $q_2 - 2^2 \,.\, q_1 = 0$; par suite, en remontant, on trouvera immédiatement $q_n - n^2 q_{n-1} = 0$ et $q_n = n^2(n-1)^2(n-2)^2 \ldots 3^2 \,.\, 2^2$.

La réduite $\frac{p_n}{q_n}$ est

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^2} + \ldots - \frac{1}{2^2} + 1.$$

et en supposant n infini, on a la série convergente

$$F = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$$

dont la valeur est $\frac{\pi^2}{12}$. (Voir Laurent, *Théorie des résidus*, p. 145) (*).

Remarque. — Le procédé de calcul que j'ai indiqué repose sur la transformation de la relation $u_n = f_2(n) u_{n-1} + f_1(n) u_{n-2}$ au moyen des fonctions ψ et φ. Mais il n'est pas toujours possible de déterminer ces fonctions, au moins par des procédés élémentaires. Alors le problème de la

(*) Les deux exemples de fractions continues que j'ai donnés sont empruntés au recueil d'énoncés de problèmes de M. Wolstenholme.

transformation d'une fraction continue en série devient beaucoup plus difficile. On est obligé de recourir à la théorie des fonctions génératrices.

QUESTION 209.

Solution par M. G. Papelier, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Reims.

a, b, c, d, *désignant des nombres entiers et positifs;*
$(1+x)^{6a+1}-(1+x)^{6b+2}-1$ *est divisible par* x^2+x+1;
$x^{3a-1}+x^{3b}+x^{3c+1}$ *est divisible par* x^2+x+1;
$x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$ *est divisible par* x^3+x^2+x+1. (H. Laurent.)

1° Pour démontrer que $(1+x)^{6a+1}-(1+x)^{6b+2}-1$ est divisible par x^2+x+1, il suffit de faire voir évidemment que cette expression s'annule quand on y remplace x par les racines de l'équation $x^2+x+1=0$.

Ces racines sont données par la relation

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

que l'on peut écrire

$$x=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Substituons $\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ dans $(1+x)^{6a+1}-(1+x)^{6b+2}-1$, nous obtiendrons

$$\left[1+\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{6a+1}$$

$$-\left[1+\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{6b+2}-1.$$

or $$1 + \cos\frac{2\pi}{3} = 2\cos^2\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3};$$

donc l'expression peut s'écrire

$$\left[2\cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right]\right]^{6a+1}$$

$$+\left[2\cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right]\right]^{6b+2}$$

qu'on peut écrire en vertu de la formule de Moivre

$$2^{6a+1}\cos^{6a+1}\frac{\pi}{3}\left[\cos(6a+1)\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin(6a+1)\frac{\pi}{3}\right]$$

$$-\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^{6b+2}\left[\cos(6b+2) + \sqrt{-1}\sin(6b+2)\frac{\pi}{3}\right] - 1$$

ou

$$\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^{6a+1}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[2\cos\frac{\pi}{3}\right]^{6b+2}$$

$$\left[\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\right] - 1$$

Or $$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

et par conséquent l'expression a pour valeur 0; donc $x = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ est racine de l'équation

$$(1 + x)^{6a+1} + (1 + x)^{6b+2} = 0;$$

donc, comme cette équation est à coefficients réels, elle admet aussi la racine conjuguée

$$x = \cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Donc le premier membre est divisible par $x^2 + x + 1$.

2° Soit à démontrer que $x^{3a-1} + x^{3b} + x^{3c+1}$ est divisible par $x^2 + x + 1$.

On peut opérer comme précédemment. Substituons dans l'expression donnée la valeur $\cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$; en

appliquant la formule de Moivre, elle devient :

$$\cos(3a - 1)\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin(3a-1)\frac{2\pi}{3} + \cos 3b\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin 3b\frac{2\pi}{3} + \cos(3c+1)\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin(3c+1)\frac{2\pi}{3}$$

qui est égale à

$$\cos\frac{2\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3} + \cos 2b\pi + \sqrt{-1}\sin 2b\pi + \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3};$$

mais $\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = -1, \quad \cos 2b\pi = 1.$

Les parties réelles et imaginaires sont donc nulles et la proposition est démontrée.

On peut employer un procédé différent, à l'aide duquel nous pouvons même généraliser la question.

On a identiquement

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$$

et il suffit de démontrer que $(x-1)(x^{3a-1} + x^{3b} + x^{3c+1})$ est divisible par $x^3 - 1$.

Le produit est égal à

$$x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2} - x^{3a-1} - x^{3b} - x^{3c+1}.$$

Remplaçons x^3 par 1, il vient

$$1 + x + x^2 - \frac{1}{x} - 1 - x$$

ou

$$\frac{1}{x}(x^2 + x^3 - 1 - x^2)$$

et si l'on fait $x^3 = 1$ on obtient pour résultat o ; donc $(x-1)$ $(x^{3a-1} + x^{3b} + {}^{3c+1})$ est divisible par $x^3 - 1$.

3° De même pour démontrer que $x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$ est divisible par $x^3 + x^2 + x + 1$, il suffit de démontrer que $(x-1)(x^{4a} + x^{4b+1}\, x^{4c+2} + x^{4d+3})$ est divisible par $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$, c'est-à-dire par $x^4 - 1$.

Effectuons le produit, nous avons :

$$x^{4a+1} + x^{4b+2} + x^{4c+3} + x^{4d+4} - x^{4a} - x^{4b+1} - x^{4c+2} - x^{4d+3}.$$

Or ce produit est nul pour $x^4 = 1$. Donc le théorème est démontré.

D'une manière générale, $a, b, c, \ldots k, l$ étant des nombres entiers positifs et p un nombre entier positif,

$$x^{pa} + x^{pb+1} + x^{pc+2} x \times \ldots + x^{pl+p-1}$$

est divisible par

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots \times x^2 + x + 1.$$

En effet il suffit de prouver que

$$(x^{pa} + x^{pb+1} + \ldots x^{pl+p-1})(x - 1)$$

est divisible par $x^p - 1$; c'est-à-dire qu'en remplaçant x^p par 1 dans

$$x^{pa+1} + x^{pb+2} + \ldots x^{pb+p} - x^{pa} - x^{pb+1} \ldots - x^{pb+p-1}$$

on a un résultat nul.

Faisant cette substitution, on a

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{p-1} + 1 - 1 - x - x^2 \ldots - x^{p-1}$$

résultat nul.

Donc le théorème est démontré.

QUESTIONS PROPOSÉES

Ces exercices ont été choisis parmi ceux qui sont traités journellement dans les conférences et les examens des principales écoles préparatoires de Paris, et parmi les principales questions posées aux concours d'admission à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Normale supérieure dans ces dernières années.

I. MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Algèbre.

— Etant donnée la fraction continue périodique

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}}}}$$

former une équation du 2e degré admettant x pour une de ses racines.

— Résoudre l'équation $e^x - x^2 = 0$.

— Quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients des

deux polynômes $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$, $x^3 + 3a'x^2 + 3b'x + c'$, pour que ces deux polynômes aient un diviseur commun du 2e degré? — Combien obtiendra-t-on de conditions? — Que deviennent ces conditions dans le cas particulier où $a = a'$?

— Résoudre l'équation $x^3 + 6x + 5\sqrt{-1} = 0$.

— Etant donnée l'équation $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + m = 0$, combien cette équation admet-elle de racines réelles, suivant les diverses valeurs de m?

— Séparer les racines de l'équation $x - 2 \sin x = 0$.

— Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(x^2-1)^3}$. Les six coefficients sont-ils indépendants, et ne peut-on pas, connaissant les trois premiers, obtenir immédiatement les trois autres?

— Résoudre l'équation $10^x - 2 = 0$.

— Trouver la condition pour que le rapport de deux des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ soit égal à un nombre donné λ. De quel degré doit être, par rapport à λ, la relation cherchée?

— Quel est le signe de l'expression

$$L(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots\cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ pour } x \text{ positif.}$$

— Démontrer que ce signe est toujours le même pour toutes les valeurs positives de x.

— Si le produit $f(x)(x-a)$ renferme $2n+1$ variations de plus que le polynôme $f(x)$, l'équation $f(x) = 0$ a au moins $2n$ racines imaginaires.

— Faire voir, *à priori*, sans s'appuyer sur le théorème de Descartes, que la différence entre le nombre des variations du premier membre d'une équation et le nombre des racines positives de cette équation, est toujours un nombre pair.

— Calculer la dérivée n^{me} de la fonction $y = \frac{1}{1+x^2}$ ou, ce qui revient au même, la dérivée $(n+1)^{me}$ de la fonction $y = \operatorname{arctg} x$.

— Trouver toutes les valeurs de φ et la valeur de ρ qui satisfont à l'égalité $\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = -1 + \sqrt{-1}$.

— On considère une fraction $\frac{\varphi(x)}{F(x)\,f(x)}$ irréductible et dans laquelle $F(x)$ et $f(x)$ sont des polynômes premiers entre eux; on propose d'établir que l'on peut toujours trouver deux polynômes entiers P et Q tels que l'on ait identiquement

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)\,f(x)} = \frac{P}{F(x)} + \frac{Q}{f(x)}$$

Quels sont les degrés respectifs des polynômes P et Q, n et p étant ceux de polynômes F et f?

Géométrie à deux dimensions.

— La courbe $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$, où l'on suppose $a > b$, est-elle extérieure ou intérieure à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

— Soit la courbe $y^3 - x^2 = 0$. Une droite $ux + vy = 1$ coupe cette courbe en trois points; on demande la condition à laquelle doivent satisfaire u et v pour

que deux des points d'intersection soient équidistants du troisième. $\varphi(u, v)$ o, étant la condition trouvée, on propose de trouver l'enveloppe des droites $ux + vy = 1$ qui satisfont à cette condition.

— Étant données une droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, et une courbe $f(x, y) = 0$, on demande de former l'équation de la courbe qui est symétrique de la courbe donnée par rapport à la droite donnée. — On propose d'effectuer le calcul dans le cas où $f(x, y) = 0$ est une conique ayant ses axes parallèles aux axes des coordonnées supposées rectangulaires.

— Former l'équation tangentielle de la courbe $y^2 = 2px + qx^2$.

— On donne une parabole et un point A dans son plan; trouver sur la parabole un point M tel que la droite AMM' soit normale à la courbe au second point M' où elle la rencontre.

— Étant donnée l'équation $x^2 + y^2 - 1 = (2x + y - 1)^2$, calculer les coordonnées des foyers de la courbe qu'elle représente, ainsi que les coordonnées des sommets de l'axe transverse.

— Former l'équation générale des courbes du troisième degré ayant pour asymptotes les deux axes des coordonnées et la droite $x + \alpha\beta y - 1 = 0$.

— D'un point $(\alpha\beta)$ on mène des tangentes à la courbe $y^2 = \frac{x^3}{1 - x}$; calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle formé par trois quelconques de ces tangentes.

— Appliquer les méthodes générales de recherche des foyers à l'exemple $y^2 + 3xy + x^2 - 1 = 0$.

— On considère un triangle ayant un sommet O fixe; un second sommet M' décrit une circonférence; le triangle est en outre assujetti à rester semblable à lui-même. Trouver le lieu du troisième sommet M.

— (Résoudre cette question : 1° en coordonnées polaires; 2° en coordonnées rectilignes; 3° par des considérations géométriques élémentaires.)

— On mène à une ellipse deux tangentes parallèles; on joint l'un des points de conctact A au foyer le plus éloigné, et on prolonge la ligne de jonction jusqu'à la rencontre de l'autre tangente en M; démontrer que AM $= 2a$.

— Lieu des points d'où l'on voit deux circonférences données sous le même angle.

— On considère toutes les paraboles tangentes à une même droite, et passant par deux points fixes situés sur une perpendiculaire à la tangente donnée; on demande le lieu des foyers de ces paraboles.

— On considère toutes les paraboles ayant la même directrice et un point commun; trouver le lieu de leurs sommets.

Géométrie dans l'espace.

— Étant donné l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on considère la section de cette surface par le plan $z = mx + ny + p$; par chaque point de cette section on mène une tangente horizontale à l'ellipsoïde; trouver l'équation de la surface formée par l'ensemble de ces tangentes.

— Soient S et S' les deux polynômes

$$S = x^2 + y^2 + z + ax + by + cz + d$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 + a'x + b'y + c'z + d'$$

et P, P' les deux fonctions linéaires,

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \qquad P' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'$$

on demande d'étudier les propriétés de la surface du troisième degré représentée par l'équation $P'S - PS' = 0$.

— On donne l'équation $z = \frac{f(x, y)}{P}$, dans laquelle $f(x, y) = 0$ représente une ellipse réelle située dans le plan des xy, et $P = 0$ une droite située dans le même plan. On demande quelles seront les diverses surfaces représentées par l'équation proposée, suivant les diverses positions de la droite $P = 0$ dans le plan xOy. Même question quand l'équation $f(x, y) = 0$ représente une hyperbole, $P = 0$ étant une parallèle à une asymptote de cette hyperbole.

— Lieu des points équidistants du plan $Ax + By + Cz + D = 0$ et de l'axe des z.

— Etant donné le cercle ($z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$), former l'équation générale des paraboloïdes elliptiques qui contiennent ce cercle, et dont l'axe est parallèle à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$. *A priori*, combien cette équation contiendra-t-elle de paramètres variables?

— Lieu des points tels que le rapport des carrés de leurs distances à deux droites données soit égal à un carré donné.

— Soient trois axes rectangulaires et une droite OA issue de l'origine; former l'équation de la surface engendrée par une droite OB tournant autour du point O de manière que la somme des angles $BOA + BOx$ soit une constante 2φ. — Propriété importante de la section perpendiculaire à l'axe des x.

— Soit l'hyperboloïde à une nappe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; on demande le lieu des projections du centre sur l'un des systèmes de génératrices rectilignes de la surface. — Parmi les diverses surfaces contenant la courbe cherchée, trouver le cône ayant son sommet à l'origine.

— Etant donné le paraboloïde $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x$, trouver le lieu des centres des sphères d'un rayon donné qui coupent le paraboloïde suivant des cercles.

— Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les *arêtes* sont tangentes à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

— Trouver l'équation générale des plans qui coupent l'hyperboloïde à une nappe suivant deux droites parallèles.

— Former l'équation générale des surfaces du deuxième degré qui contiennent l'axe des z. — On considère sur l'axe des z le point ($x = 0$, $y = 0$, $z = h$), et on demande de trouver les équations de la deuxième génératrice rectiligne qui passe par ce point.

Courbes à construire

En coordonnées rectilignes :

1° $y = x^2 \pm \frac{1}{2} x^2 \sqrt{1 + x}$.

2° $x^3 + xy^2 + y^3 - x^2 = 0$. — Points de contact des tangentes que l'on peut mener à cette courbe par le point ($\alpha\beta$). Etudier les variations de la conique qui contient ces contacts, lorsque le point ($\alpha\beta$) se déplace dans le plan.

3° $y = 1 + x + \frac{\sin x}{x}$. — Qu'est-ce que la droite $y = x + 1$ par rapport à la courbe ?

4° $x = \frac{1 + t}{1 - t}$, $y = \frac{t}{1 - t}$. — Comment peut-on reconnaître *à priori* quelle est la ligne formée par tous les points dont les coordonnées sont définies par ces formules ?

5° Étudier autour de l'origine la courbe dont l'équation est

$$y = \sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 + bx} - \sqrt{1 - cx} - \sqrt{1 - dx}.$$

Diverses propriétés de l'origine suivant les relations qui peuvent exister entre a, b, c, d. Quand ce point est-il un point d'inflexion ?

6° $y^2 = \frac{x(x - 1)(x - 2)}{x + 3}$.

7° $y = x \pm \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$.

8° $y = \frac{\sin (x - \alpha)}{\sin^4 x}$ α étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

En coordonnées polaires :

$$\rho = \sin 3\omega$$

$$\rho = \frac{\sin \omega + \cos \omega}{\sin \frac{\omega}{3}}$$

$$\rho^2 \cos \frac{\omega}{2} - 2\rho + 4 \sin \frac{\omega}{2}$$

$$= \frac{1}{\rho} = \frac{2(\sin^3 \omega + \cos^3 \omega)}{3 \sin 2\omega}$$

$$\rho = \frac{1}{\cos \frac{\omega}{3}}$$

$$\rho = \frac{1 + \sin \omega}{1 - 2 \cos \omega}$$

$$\rho = \frac{\sin \omega - 2 \cos \omega}{1 - 2 \sin \omega}$$

$$\rho = \frac{1 + \operatorname{tg} \omega}{1 - \cos \omega}$$

$$\rho = \frac{\omega - 2 \sin \omega}{3 \omega - \operatorname{tg} \omega}$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tg} \omega}{1 - 2 \sin \omega}$$

$$\rho = \frac{\cos \omega}{1 - 2 \sin \omega}$$

II. MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

— Soit Q la partie entière du quotient de la division d'un polynôme A par un polynôme B ; on divise Q par un autre polynôme C ; démontrer que la partie entière Q' du quotient de cette nouvelle division est la partie entière du quotient de la division du polynôme A par le produit BC.

—Etant donné un triangle quelconque, on joint le point de rencontre des trois hauteurs à l'un des sommets ; déterminer en fonction des éléments du triangle l'angle formé par la ligne de jonction (qui est l'une des trois hauteurs) avec l'un des deux côtés du triangle qui partent du sommet considéré.

— a et b étant deux nombres premiers absolus, trouver deux nombres *entiers* x et y tels que $x^2 - y^2 = ab$.

— On donne trois points quelconques et un plan, dans l'espace. Faire passer par les trois points donnés une sphère tangente au plan donné.

—Etant données une circonférence O et une droite AB, d'un point quelconque M de la droite AB on mène une tangente MT à la circonférence. Prouver que si de M comme centre, avec MT pour rayon, on décrit une circonférence, cette circonférence passera par deux points fixes, c.-à-d. indépendants de la position du point M sur AB. Quels sont ces deux points fixes ?

m et n étant deux nombres entiers, et E une quantité moindre que toute quantité donnée, si un nombre α est tel que l'on puisse satisfaire à l'inégalité $m\alpha - n < E$, le nombre α est incommensurable.

— Résoudre, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, le problème de la construction d'un cercle tangent à deux cercles donnés, et passant par un point donné.

Rendre calculable par logarithmes, dans les diverses hypothèses qu'on peut faire sur a, b, a', b', l'expression

$$\frac{a + b \cos \varphi}{a' - b' \sin \varphi}.$$

— Sur une droite indéfinie Ox on porte, à partir d'une origine fixe O, deux longueurs OA, OA' qui représentent les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; on porte ensuite, à partir de la même origine, deux autres longueurs OB, OB' qui représentent les racines de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$; trouver la relation qui doit exister entre a, b, c, a', b', c' pour que les quatre points A, A', B, B' forment une division harmonique.

— Par un point pris dans l'intérieur d'un trièdre, faire passer une sphère tangente aux trois faces de ce trièdre.

Inscrire dans une ellipse le rectangle de surface maxima.

Trouver, par un procédé élémentaire, la somme des n premiers termes de la suite $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots + nx^n + \ldots\ldots$

Quel est le plus petit nombre entier admettant quinze diviseurs ?

VARIÉTÉS

ESSAIS POUR LES CONIQUES DE PASCAL

AVEC

Des notes par M. Ch. Laurens, professeur honoraire.

(Suite et fin, voir page 133.)

§ 6. — « Nous démontrerons aussi que si quatre droites, AC, AF, EH, EL s'entre-coupent aux points N, P, M, O et qu'une section de cône *(fig. 10)* coupe lesdites droites aux points C, B, F, D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du

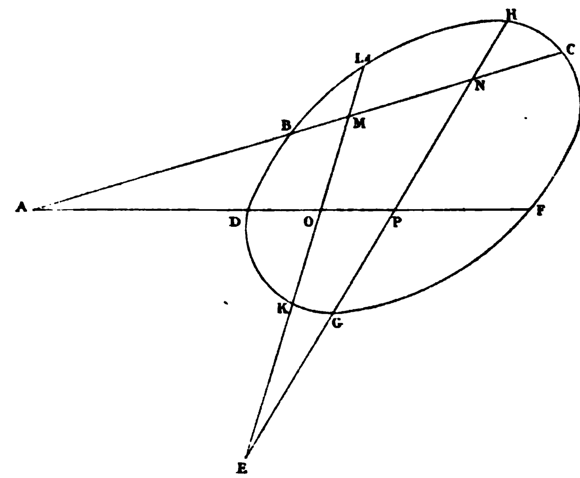


Fig. 10.

rectangle de MC et MB au rectangle des droites PF, PD et du rectangle des droites AD, AF au rectangle des droites AB, AC est la même que la raison composée des raisons du rectangle des droites ML, MK au rectangle des droites

PH, PG et du rectangle des droites EH, EG au rectangle des droites EK, EL. »

Note 6. — C'est-à-dire que si par deux points A, E, on mène deux couples de sécantes se rencontrant en M, N, O, P, et coupant la conique aux points B, C, D, F, K, G, L, M, on a la relation

$$\frac{MC.MB}{PF.PD}\cdot\frac{AF.AD}{AB.AC}=\frac{ML.MK}{PH.PG}\cdot\frac{EH.EG}{EK.EL};$$

appliquons aux deux triangles AOM, EOP la relation (5) de la note qui précède

$$\frac{OD.OF}{AD.AF}\cdot\frac{AB.AC}{MB.MC}\cdot\frac{ML.MK}{OL.OK}=1$$

$$\frac{OD.OF}{PD.PF}\cdot\frac{EK.EL}{OK.OL}\cdot\frac{PG.PH}{EG.EH}=1$$

égalant les premiers membres et supprimant le facteur commun $\frac{OD.OF}{OK.OL}$

$$\frac{ML.MK}{AD.AF}\cdot\frac{AB.AC}{MB.MC}=\frac{EK.EL}{PD.PF}\cdot\frac{PG.PH}{EG.EH}$$

que l'on peut écrire

$$\frac{MB.MC}{PD.PF}\cdot\frac{AD.AF}{AB.AC}=\frac{ML.MK}{PG.PH}\cdot\frac{EG.EH}{EK.EL}$$ relation à établir.

Remarque. — Si nous écrivons cette relation sous la forme:

$$\frac{MB.MC}{AB.AC}\cdot\frac{AD.AF}{PD.PF}\cdot\frac{PG.PH}{EG.EH}\cdot\frac{EK.EL}{MK.ML}=1,$$

on voit qu'elle exprime la relation démontrée par Carnot sur les segments déterminés par une conique sur les quatre côtés d'un quadrilatère quelconque. Le même mode de démonstration permettrait d'étendre le même théorème à un pentagone, à un hexagone, à un polygone quelconque.

§ 7. — « Nous démontrerons aussi la propriété suivante dont le premier inventeur est M. Desargues, Lyonnais, un des grands esprits de ce temps et des plus versés aux mathématiques et entre autres aux coniques, dont les écrits sur cette matière, quoique en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui auront voulu en recevoir

l'intelligence. Je veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matière à ses écrits et que j'ai tâché d'imiter, autant qu'il m'a été possible, sa méthode sur ce sujet qu'il a traité sans se servir du triangle par l'axe, en traitant généralement de toutes les sections du cône (1). La propriété merveilleuse dont il est question est telle : si dans le plan MSQ (*fig. 11*), il y a une section de cône PQV, dans le bord de laquelle, ayant pris les quatre points

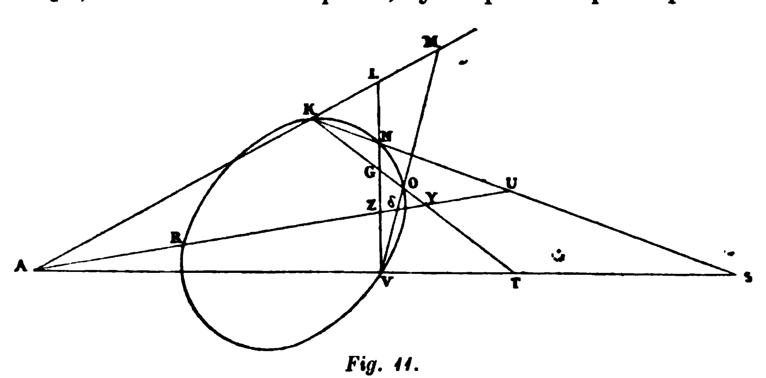


Fig. 11.

K, N, O, V soient menées les droites KN, KO. UN, VO, de sorte que par un même des quatre points ne passent que deux droites et qu'une autre droite coupe tout le bord de la section aux points R, X; que les droites KN, KO, VN, VO aux points U, Y, Z, δ, je dis que le rectangle des droites ZR, ZX est au rectangle des droites YR, YX ainsi que le rectangle de Zδ, ZU est au rectangle Yδ, YV. »

Note 7. — On peut énoncer ainsi le théorème : soit KOVN un quadrilatère inscrit dans une conique, si une transversale quelconque rencontre les quatre côtés et la courbe en six points, δ, U ; Z, Y; R, X; on a la relation :

$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX} = \frac{Z\delta.ZU}{Y\delta.YU}.$$

(1) Si on appelle axe d'un cône quelconque à base circulaire, la droite qui joint le sommet au centre de la base, le triangle par l'axe est l'intersection du cône par le plan passant par cet axe et perpendiculaire à la base. Apollonius n'employait comme plans sécants que les plans perpendiculaires au triangle par l'axe.

Les deux côtés KO, VN se rencontrent en G; considérons le triangle GZY dont chaque côté rencontre la conique en deux points, appliquant aux segments déterminés sur chaque côté du triangle la relation démontrée (note 5) connue aujourd'hui sous le nom de théorème de Carnot, nous avons:

$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX}\cdot\frac{YO.YK}{GO.GK}\cdot\frac{GN.GV}{ZN.ZV}=1\,;$$

d'où
$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX}=\frac{GO.GK}{YO.YK}\cdot\frac{ZN.ZV}{GN.GV}. \qquad (1)$$

Le triangle GZY est rencontré par les deux transversales VM, KS, donc :

$$\frac{\delta Z}{\delta Y}\cdot\frac{OY}{OG}\cdot\frac{VG}{VZ}=1 \text{ ou } \frac{Z\delta}{Y\delta}=\frac{VZ.OG}{VG.OY} \qquad (2)$$

$$\frac{ZU}{YU}\cdot\frac{KY}{GK}\cdot\frac{NG}{NZ}=1 \text{ ou } \frac{ZU}{YU}=\frac{GK}{KY}\cdot\frac{NZ}{NG} \qquad (3)$$

multipliant (2) par (3)

$$\frac{Z\delta}{Y\delta}\cdot\frac{ZU}{YU}=\frac{GO.GK}{YO.YK}\cdot\frac{ZN.ZV}{GN.GV} \qquad (4)$$

comparant (1) et (4) les seconds membres étant identiques,

on conclut : $$\frac{ZR.ZX}{YR.YX}=\frac{Z\delta.ZV}{Y\delta.YV} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Cette relation a été appelée par Desargues relation d'involution. Six points δ, U; Z, Y; R, X, étant donnés, le rapport anharmonique de quatre d'entre eux pris dans les trois groupes égale le rapport anharmonique des quatre autres; ainsi le rapport anharmonique des quatre points Z, Y, R, U égale le rapport anharmonique des quatre points Y, Z, X, δ,

c'est-à-dire : $$\frac{ZR.YU}{ZU.YR}=\frac{YX.Z\delta}{Y\delta.ZX}$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{ZR.ZX}{YR.YX}=\frac{Z\delta.ZU}{Y\delta.YU},$$

relation précédente.

Ce théorème de Desargues est aussi fécond que l'hexagramme mystique de Pascal. Nous en indiquerons plus loin quelques conséquences importantes.

§8. — « Nous démontrerons que si dans le plan de l'hyperbole

ou de l'ellipse ou du cercle AGTE (*fig. 12*), dont le centre est C, on mène la droite AB touchante au point A la section, et qu'ayant mené le diamètre AT, on prenne la droite AB dont le carré soit égal au rectangle de la figure, et qu'on mène CB, alors quelque droite qu'on mène comme DE parallèle

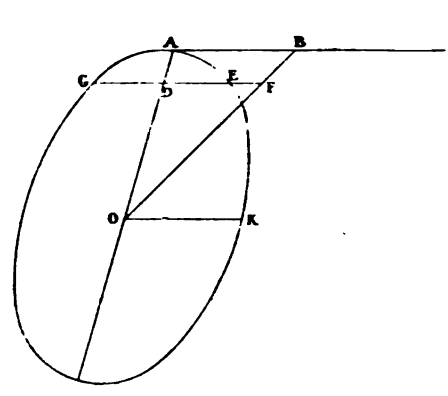


Fig. 12.

à la droite AB coupante la section en E et G, et les droites AC, CB aux points D, F, si la section AGE est une ellipse ou un cercle, la somme des carrés des droites DE, DF sera égale au carré de la droite AB, et dans l'hyperbole la différence des mêmes carrés des droites DE, DF sera égale au carré de la droite AB. »

Note 8. — Nous avons dû interpréter les mots de Pascal, *rectangle de la figure* par le carré du demi-diamètre conjugué parallèle à la tangente AB. Soit CK le demi-diamètre conjugué de CA parallèle à la tangente AB. Appelons $CA = a$ $CK = b$; $AB^2 = b^2$.

D'après la note 5, on a :

$$\frac{DE^2}{AD.DT} = \frac{CK^2}{CA^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

donc

$$DE^2 = \frac{b^2}{a^2} AD(2a - AD);$$

or

$$\frac{DF}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{a - AD}{a},$$

d'où $$DF^2 = \frac{b^2}{a^2}(a - AD)^2;$$

par suite $$DE^2 + DF^2 = \frac{b^2}{a^2}AD(2a - AD) + \frac{b^2}{a^2}(a - AD)^2$$

$$= 2\frac{b^2}{a}AD - \frac{b^2}{a^2}AD^2 + b^2 - 2\frac{b^2}{a}AD + \frac{b^2}{a^2}AD^2,$$

donc $$DE^2 + DF^2 = b^2 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si la conique était une hyperbole, la même démonstration prouverait que $DF^2 - DE^2 = b^2$.

§ 9. — « Nous déduirons aussi quelques problèmes, par exemple : *D'un point donné mener une droite touchante une section de cône donnée.*

» *Trouver deux diamètres conjugués en angle donné.*

» *Trouver deux diamètres en angle donné et en raison donnée.*

» Nous avons plusieurs autres problèmes et théorèmes et plusieurs conséquences des précédents. Mais la défiance que j'ai de mon peu d'expérience et de capacité, ne me permet pas d'en avancer davantage avant qu'il ait passé à l'examen des habiles qui voudront nous obliger d'en prendre la peine ; après quoi, si l'on juge que la chose mérite d'être continuée, nous essayerons de la pousser jusqu'où Dieu nous donnera la force de la conduire. »

Note 9. — Nous abrégerons dans cette dernière note les développements nombreux qu'exigerait ce paragraphe. Il nous suffira d'indiquer comment Pascal pouvait résoudre le problème de mener par un point extérieur une tangente à une conique déterminée par cinq points. D'après le troisième manuscrit que Leibnitz avait sous les yeux et dont il nous a conservé le titre, nous sommes porté à croire que Pascal employait ce que nous appelons aujourd'hui : la théorie des pôles et polaires.

1. Par un point P pris dans le plan d'une conique, menons des sécantes et cherchons le lieu géométrique des conjugués harmoniques du point donné par rapport aux points d'intersection de la conique et de la sécante.

Soient PBA, PDC (*fig. 13*) deux sécantes quelconques, F, E les conjugués harmoniques de P par rapport à A et B; C et D. Menons les droites AD, BC, elles se coupent sur FE;

soit M le point de concours de BC et de FE; M le point de concours de AD et FE.

Le triangle AFE rencontré par les deux transversales AD, BC, donne :

$$\frac{FM}{EM} \cdot \frac{ED}{PD} \cdot \frac{AP}{AF} = 1. \qquad \frac{FM'}{M'E} \cdot \frac{CE}{CD} \cdot \frac{BP}{BF} = 1.$$

Mais à cause de $\frac{ED}{PD} = \frac{CE}{CD}$; $\frac{AP}{AF} = \frac{BP}{BF}$ résultant des divisions harmoniques de AB et AD, on a : $\frac{FM}{EM} = \frac{FM'}{EM'}$; donc M et M' coïncident.

On verrait de même que AC et BD se coupent sur EF.

Les tangentes en A et B à la conique se rencontrent sur la même droite FE. Considérons l'hexagone inscrit AADBBCA dont deux côtés en A, B sont infiniment petits, et ont pour directions les tangentes en A et B; les côtés opposés AA, BB; AD et BC; BD et AC se rencontrent en trois points en ligne droite ; donc le point de concours H des deux tangentes en A et B est sur EF; il en sera de même des tangentes en C et D.

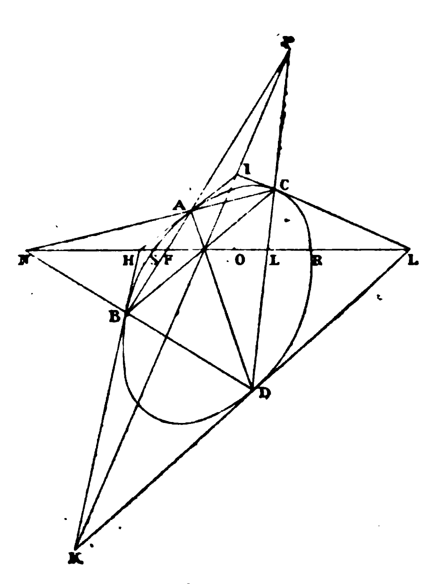


Fig. 18.

Or la droite EF est déterminée par le point H où concourent les tangentes en A et B et le point F, conjugué harmonique de P par rapport à AB; donc le lieu des points E est la droite HG que l'on peut construire en menant par le point P deux sécantes quelconques, et déterminant soit les points d'intersection M et N des droites AD, BC, AC, BC; soient les points

H, L, où concourent les tangentes en A, B; C, D; soit en déterminant les conjugués harmoniques F, E, etc., du point P par rapport à toutes les sécantes de la conique issues de P.

On verrait de même que si par N on mène différentes sécantes, le lieu géométrique des conjugués harmoniques de N par rapport aux points d'intersection de la conique et des sécantes est la droite PK.

Incidemment, nous pouvons remarquer le théorème énoncé par Pascal dans le n° 3 de ses manuscrits; si un quadrilatère HILK est circonscrit à une conique, les diagonales de ce quadrilatère se rencontrent au point M, où concourent les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés.

2. Si par le point P on mène deux tangentes à la conique, les points de contact ne sont autre chose que les points R, S, où la droite EF rencontre la conique. En effet, faisons tourner la sécante PB autour du point P, les tangentes aux points d'intersection A et B se coupent toujours sur EF; donc, lorsque le point A se confondra avec S, le point B devra aussi se confondre avec S et la sécante deviendra tangente en S ; de même R sera le point de contact d'une seconde tangente.

Le problème de mener par P des tangentes à la conique revient donc à déterminer, comme nous avons appris à le faire, la droite EF et à trouver les points où elle rencontre la conique.

Si nous considérons les deux tangentes en A et B, on peut les regarder comme les directions de deux côtés infiniment petits d'un quadrilatère AABB; AB représente deux autres côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans la conique; la transversale HM rencontre la courbe en S et R, les côtés opposés en H, H; F, F; on a donc d'après le théorème de Désargues

$$\frac{HR.HR}{HS.HS} = \frac{FR.FR}{FS.FS} \text{ ou } \frac{HR}{HS} = \frac{FR}{FS},$$

c'est-à-dire que les points cherchés R, S divisent harmoniquement la droite FH; on verrait de la même manière que que ces points R, S divisent harmoniquement la droite EL.

Soit O le milieu de RS, on doit avoir $OS^2 = OH.OF$, $OR^2 = OE.OL$; la question revient à trouver sur RS un point O d'égale puissance par rapport aux extrémités des segments HF, EL, problème que l'on résout aisément, comme on le sait, en menant par H, F et E, L deux circonférences qui se coupent; leur corde commune rencontre EF au point cherché O.

3. Nous n'insisterons pas sur la marche à suivre pour déterminer l'intersection d'une conique donnée par cinq points avec une droite quelconque; elle est comprise implicitement dans ce qui précède. Nous croyons avoir donné assez de développement aux importants théorèmes énoncés par Pascal, son hexagramme mystique, les théorèmes de Carnot, celui de Désargues et le théorème relatif aux rapports exharmoniques, pour justifier cette opinion de Leibnitz que Pascal était en possession d'une théorie géométrique complète des coniques; et celle de M. Chasles, qu'il est avec Désargues au premier rang des fondateurs de la géométrie moderne.

AVIS

Nous n'avons pas reçu de solution des questions 132, 186, 190, 192, 212, 213, 221, 226, 233, 236, 237.

Nous prions nos lecteurs de vouloir bien nous faire parvenir les questions d'examen du baccalauréat données dans les diverses facultés, en novembre et avril, et les questions de concours académiques, aussitôt qu'ils les connaîtront.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 10022-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 145 et suiv.)

IV

PARABOLE

XXXVII. **Définition.** — *La parabole est une courbe plane telle que chacun de ses points est également distant d'une droite fixe nommée* directrice *et d'un point fixe nommé* foyer.

Cette définition montre assez que l'étude de la parabole est intimement liée à celle que l'on vient de faire de l'ellipse et de l'hyperbole, et qu'elle doit se faire de la même manière. Pour cela, il faut se reporter à l'équation fondamentale qui a donné les propriétés générales de l'ellipse et de l'hyperbole, savoir

$$(m^2 - n^2)x^2 - 2dm^2x + m^2(h^2 + d^2) = 0.$$

Dans le cas de la parabole, on a, par définition, $\frac{m}{n} = 1$ ou $m = n$; alors le coefficient de x^2 s'annule et l'une des racines de cette équation devient infinie; l'autre est donnée par la relation

$$x = \frac{h^2 + d^2}{2d} \qquad (1)$$

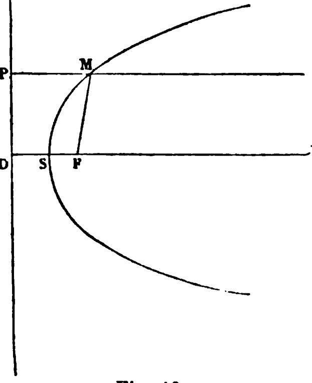


Fig. 16.

Soient *(fig. 16)*, F le foyer, D la directrice d'une parabole, FD perpendiculaire à la directrice; d'après ce qui précède, toute parallèle à FD possède un point de la courbe à une distance infinie et un second point M

déterminé par la relation (1); on peut donc dire encore que toute parallèle à FD contient deux points de la courbe et en conclure que la parabole est une courbe du *second degré*.

XXXVIII. — *La parabole est une courbe à branches infinies possédant un axe de symétrie.*

La relation (1) est indépendante du signe de h; si donc on mène de part et d'autre de FD deux parallèles à cette droite à la distance h, les deux points M et M′ de la courbe situés sur ces parallèles seront également distants et de la droite FD et de la directrice D; ces deux points seront donc symétriques par rapport à FD.

Remarque. — Pour $h = 0$, la relation (1) donne

$$x = \frac{d}{2};$$

le point correspondant S est donc à égale distance du foyer et de la directrice, ce qui était évident; c'est le ***sommet*** de la parabole.

A toute valeur de h correspond pour x une valeur réelle; donc toute parallèle à FD contient un point de la courbe, défini par l'équation (1); de plus, x augmente avec h, c'est-à-dire que les points qui correspondent à des valeurs de plus en plus grandes de h, s'éloignent de plus en plus de la directrice et donnent naissance des deux côtés de l'axe à deux branches infinies symétriques.

XXXIX. **Théorème.** — *La parabole est la limite vers laquelle tend une ellipse ou une hyperbole dont un des foyers et la directrice correspondante restent fixes tandis que l'autre foyer s'éloigne indéfiniment du premier.*

On a vu que la position du centre, du second foyer et de la seconde directrice d'une ellipse ou d'une hyperbole dépendait de la relation $\frac{x' + x''}{2} = \frac{dm^2}{m^2 - n^2}$,

x' et x'' étant les racines de l'équation que l'on sait; si l'on suppose que le rapport $\frac{m}{n}$ varie de manière à devenir égal

à 1, cette somme $\frac{x' + x''}{2}$ à la limite devient infinie, c'est-à-dire que le centre est rejeté à l'infini, de même que le second foyer et la seconde directrice ; la courbe est devenue une parabole.

Remarque I. — Dans l'hypothèse précédente, une seule longueur est restée fixe ; c'est la distance *d* ; elle porte le nom de *paramètre* ; c'est évidemment la longueur qui définit une parabole ; on la désigne par *p*.

Remarque II. — Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, cette distance *d* a pour expression $\frac{b^2}{c}$, en fonction des axes ; or, dans la transformation en parabole d'une ellipse ou d'une hyperbole, les longueurs *a*, *b*, *c* sont devenues très grandes ; seule la quantité $\frac{b^2}{c}$, ou, puisque $\frac{c}{a} = 1$ à la limite, la quantité $\frac{b^2}{a}$ reste fixe ; donc, *la parabole est la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole dont un foyer et la directrice correspondante restent fixes et la longueur des axes augmente indéfiniment, le rapport* $\frac{b^2}{a}$ *ayant une limite finie.*

XL. **Théorème.** — *Le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe est proportionnel à la distance de cette corde au sommet.*

Soit *(fig. 16)* MM' une telle corde, 2*h* sa longueur ; on a, en vertu de la relation (1) dans laquelle on a remplacé *d* par *p*

$$h^2 = 2px - p^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

or, d'après la figure,

$$SQ = x - \frac{p}{2}, \quad h = \frac{MM'}{2}$$

donc

$$\overline{MM'}^2 = 8p \times SQ$$

Remarque. — Si l'on définit un point d'une parabole par sa distance MQ $= y$ à l'axe, ou *ordonnée*, et par sa distance SQ $= x$ à la tangente au sommet, ou *abscisse*, on voit que chaque point satisfait à la relation $y^2 = 2px$

qui est l'*équation* de la parabole.

XLI. **Théorème.** — Réciproquement, *le lieu des points tels que le carré de leur distance à une droite fixe est proportionnel à leur distance à une autre droite perpendiculaire à la première, est une parabole.*

Soient *(fig. 17)* Sx et Sy les deux droites rectangulaires, M un point du lieu, c'est-à-dire, tel que k étant une constante, on ait

$$\overline{MQ}^2 = 2kSQ$$

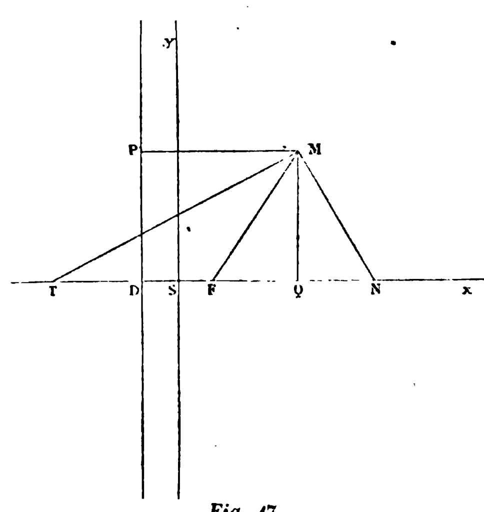


Fig. 17.

Si l'on prend $QN = k$ et si au point M on élève la perpendiculaire MT à MN, le triangle rectangle TMN donne

$$\overline{MQ}^2 = TQ \times QN = TQ \times k$$

Des deux relations précédentes, on conclut évidemment

$$TQ = 2SQ$$

ou que le point S est le milieu de TQ.

Cela étant, soient les points F et D, de part et d'autre du point S, et tels que $SF = SD = \frac{k}{2}$

il est facile de voir que le point F est le milieu de TN et par suite que $MF = FT$; de plus, la figure montre que

$$TF = TS + \frac{k}{2} = DS + SQ = DQ = MP$$

d'où résulte évidemment l'égalité

$$MF = MP$$

qui constitue la définition même de la parabole, le point F étant fixe de même que la droite DP, parallèle à Sy.

XLII. **Théorème.** — *Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une parallèle à l'axe.*

Soient *(fig. 18)* M et M′ deux points tels que la corde MM′ fasse avec l'axe un angle donné θ; MQ et MQ′ deux perpendiculaires à l'axe; on a (XL, Remarque),

$$\overline{M'Q'}^2 = 2p \times SQ'$$
$$\overline{MQ}^2 = 2p \times SQ$$

et, en faisant la soustraction, membre à membre,

$$\overline{M'Q'}^2 - \overline{MQ}^2 = 2p(SQ' - SQ)$$

Soit MN, parallèle à l'axe; la figure montre que

$$\text{tg } M'MN \text{ ou tg } \theta = \frac{M'N}{MN} = \frac{M'Q' - MQ}{SQ' - SQ}$$

or, la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{M'Q' - MQ}{SQ' - SQ} = \frac{2p}{M'Q' + MQ}$$

donc, on a l'égalité $\quad \text{tg } \theta = \frac{2p}{M'QMQ' +}$

qui prouve que la somme $M'Q' + MQ$ ou $\frac{M'Q' + MQ}{2}$ est constante pour un angle donné θ; or cette distance est précisément celle du milieu I de la corde MM′ à l'axe, donc ce point décrit une parallèle à l'axe lorsque la corde MM′ varie en conservant sa direction.

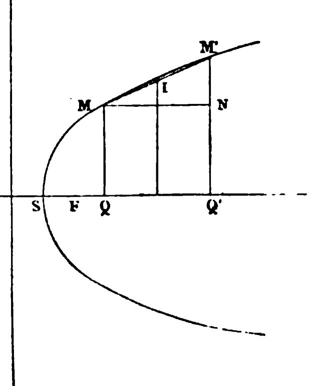


Fig. 18

Remarque I. — On appelle en général *diamètre* d'une courbe *le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée;* dans la parabole, les diamètres sont des droites parallèles à l'axe.

Remarque II. — La corde MM′ prenant toutes les positions que l'on vient de définir, il arrivera que les points M et M′ se confondront; la droite MM′ sera alors tangente à la parabole et le milieu de MM′ sera le point de contact. Donc, *si par un point d'une parabole on mène une parallèle à l'axe, les cordes parallèles à la tangente en ce point seront partagées en deux parties égales par cette parallèle.* *(A suivre.)*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir p. 201 et suiv.)

II

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE QUELCONQUE

9. *Dans un triangle quelconque on a*

$$\frac{c^2}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{\sin (A - B)}.$$

En effet, on a

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a \cos B - b \cos A}{\sin (A - B)};$$

d'autre part, on a $c = a \cos B + b \cos A$.

Multipliant le premier rapport par c et le dernier par le second membre, il vient

$$\frac{c^2}{\sin C} = \frac{a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A}{\sin (A - B)} = \frac{a^2 - b^2}{\sin (A - B)}$$

en remplaçant les cosinus par leur valeur en fonction du sinus et remarquant que l'on a

$$a \sin B = b \sin A.$$

10. *Dans un triangle quelconque on a*

$$4abc \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2} = (a - b)(a + b + c)(a + b - c).$$

En effet, le premier membre peut s'écrire

$2abc(\cos B - \cos A) = b \cdot 2ac \cos B - a \cdot 2bc \cos A.$

de même $b = r_b \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}$ $c = r_c \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$

Or, le second membre est égal à

$$b(a^2 + c^2 - b^2) - a(b^2 + c^2 - a^2) = (b + a)(a^2 - b^2)$$
$$- c^2(a - b) = (a - b)(b + a + c)(b + a - c).$$

11. *Si* $A = 2B$, *on en déduit*

$$a^2 = b(b + c).$$

En effet, l'hypothèse nous donne

$$\sin C = \sin 3B.$$

Or, la seconde égalité peut s'écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{b + c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

ou bien $$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A};$$

cette égalité devient

$$\frac{\sin 2B}{\sin B} = \frac{\sin B + \sin 3B}{\sin 2B}$$

ou bien, après réduction,

$$\sin 2B = 2 \sin B \cos B$$

formule connue.

12. On a les égalités :

$$p = r_a \operatorname{cotg}\frac{A}{2}; \quad p = r_b \operatorname{cotg}\frac{B}{2}; \quad p = r_c \operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

On en tire

$$p^3 = r_a r_b r_c \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} =$$
$$r_a r_b r_c \left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

en vertu d'une relation connue entre les angles d'un triangle.

On a aussi :

$$a = r^a \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = r^a \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = r^a \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

On en tire

$$abc = r_a r_b r_c \frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Donc

$$\frac{p^3}{abc} = \frac{\cotg\frac{A}{2} + \cotg\frac{B}{2} + \cotg\frac{C}{2}}{\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}} = \frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

13. Des formules qui donnent la surface, on déduit facilement $\sin A = \frac{2S}{bc}$; $\sin B = \frac{2S}{ca}$; $\sin C = \frac{2S}{ab}$.
on en tire par addition ou soustraction :

$$\frac{2S}{c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \sin A + \sin B = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{2S}{c}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

n multipliant membre à membre il vient :

$$\frac{4S^2}{c^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \sin(A-B)\sin C$$

Mais puisque $\sin C = \frac{2S}{bc}$, il vient :

$$\frac{2S(a^2 - b^2)}{abc^2} = \sin(A-B).$$

14. *Dans un triangle on a*

$$S^2 = \frac{1}{16}a^2b^2c^2(\sin^2 A \sin 2B + \sin^2 B \sin 2A)$$

En effet, si je remplace sin 2B et sin 2A par leur valeur, on trouve

$$S^2 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2 \sin A \sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A)$$

ou $S_2 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C.$

Or, on a $2S = ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$
en multipliant, on trouve

$$8S^3 = a^2b^2c^2 \sin A \sin B \sin C :$$

c'est la formule à établir.

15. *Si dans un triangle on a les deux relations*

$$\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2, \qquad \sin A \sin B = \frac{3}{4}$$

le triangle est équilatéral.

En effet, la première relation donne, après simplification

$$a^3 + b^3 = (a + b) c^2;$$

ou bien, en divisant par $(a + b)$, qui n'est pas nul,

$$a^2 + b^2 - ab = c^2.$$

Donc déjà $\cos C = \frac{1}{2}$ et $C = 60°$;

par suite, $A + B = 120°$.

La seconde relation donne

$$\cos (A - B) - \cos (A + B) = \frac{3}{2};$$

comme $\cos (A + B) = -\frac{1}{2}$,

on a $\cos (A - B) = 1$,

ou $A - B = 0$.

Donc $A = B = 60$.

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1880

Composition de mathématiques (trois heures).

Première Question. — *Calcul logarithmique. — Calculer la valeur de* x *donnée par la formule*

$$x = R\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta},$$

dans laquelle

$$R = 6366^{m},73, \quad \alpha = 67°42'28'', \quad \beta = 48°53'17''.$$

On a $\sin^2\alpha \sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta = (\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta) = -\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$ $= \cos(\alpha-\beta)\cos(180^\circ-\alpha-\beta)$.

$$\text{Donc}\quad \log x = \log R + \frac{1}{2}\log\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\log\cos(180^\circ-\alpha-\beta).$$

$$\alpha - \beta = 18^\circ\, 49'\, 11''$$
$$180^\circ - \alpha - \beta = 63^\circ\, 24'\, 15''$$
$$\log 6366{,}73 = 3{,}8039164\ 4$$
$$\frac{1}{2}\log\cos 18^\circ\, 49'\, 11'' = \bar{1}{,}9880690\ 9$$
$$\frac{1}{2}\log\cos 63^\circ\, 24'\, 15'' = \bar{1}{,}8254906\ 7$$
$$\log x = 3{,}6174762$$
$$x = 4144{,}539$$

2e Question. — *On donne un cône à base circulaire dont* h *est la hauteur et* R *le rayon de base, et l'on demande de déterminer la quantité* x *dont il faut diminuer la hauteur et augmenter le rayon pour que le cône, ayant* h — x *pour hauteur et* R + x *pour rayon de base, soit équivalent au cône donné. — Le problème est-il toujours possible?*

L'équation du problème est

$$\frac{1}{3}\pi^2 Bh = \frac{1}{3}\pi(R+x)^2(4-x).$$

ou bien, en développant, supprimant le facteur commun $\frac{1}{3}\pi R^2$, et divisant par x, ce qui revient à écarter la solution $x = 0$: $\quad x^2 - x(h-2R) + R^2 - 2Rh = 0.$

Les valeurs de x sont données par la formule

$$x = \frac{h - 2R \pm \sqrt{h^2 + 4hR}}{2}$$

On voit qu'elles sont toujours réelles; mais, d'après l'énoncé, on doit rejeter les valeurs négatives.

Le produit des racines est $R(R-2h)$, leur somme est $h - 2R$. Si l'on a $h < \frac{R}{2}$, le produit est positif, la somme négative; donc les deux racines sont négatives et inadmis-

sibles; il faudrait diminuer le rayon et augmenter la hauteur, ce qui est contraire à l'énoncé.

Lorsque h est plus grand que $\frac{R}{2}$, le produit est négatif, la somme négative ou positive, suivant que l'on a $h < 2R$ ou $h > 2R$. Il y a donc toujours dans ce cas une racine admissible, et il n'y en a jamais plus d'une.

3e Question. — *Inscrire dans un secteur circulaire donné* AOB, *dont l'angle au centre* O *vaut* 45°, *le rectangle dont la diagonale est minimum, un côté du rectangle étant placé sur le rayon* OA. *On donnera la valeur de la diagonale et celle du rapport des deux côtés du rectangle.*

Soit CDEF le rectangle inscrit; prenons pour inconnue l'angle $AOE = x$. On a $DE = R \sin x$, $CD = R \cos x - OC$, et comme $OC = CF = DE$, $CD = R(\cos x - \sin x)$.

En appelant d la diagonale, on aura

$$R^2 \sin^2 x + R^2 (\cos x - \sin x)^2 = d^2$$

ou bien
$$1 + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{d^2}{R^2}.$$

Cette équation devient, en remplaçant $\sin^2 x$ par $\frac{1 - \cos 2x}{2}$:

$$2 \sin 2x + \cos 2x = 3 - \frac{2d^2}{R^2}$$

ou
$$\sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{3R^2 - 2d^2}{2R^2}.$$

D'après la méthode bien connue, il suffit de poser $\frac{1}{2} = \operatorname{tg} \varphi$ $\left(\text{d'où } \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ pour obtenir l'équation simple

$$\sin(2x + \varphi) = \frac{3R^2 - 2d^2}{2R^2} \cos \varphi = \frac{3R^2 - 2d^2}{R^2 \sqrt{5}}.$$

Le second membre doit être compris entre -1 et $+1$, ce qui donne les inégalités $3R^2 - 2d^2 < R^2 \sqrt{5}$ et $2d^2 - 3R^2 > R^2 \sqrt{5}$.

La première donne le minimum demandé; d^2 doit être plus grand que $\frac{R^2(3 - \sqrt{5})}{2}$. On voit sans peine que le mini-

mum de la diagonale est égal au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison; car ce segment a pour valeur $\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ et son carré est $\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}$ ou $\frac{R^2(3-\sqrt{5})}{2}$.

Calculons les côtés du rectangle et leur rapport. On a, pour le minimum de d^2, $\sin(2x+\varphi)=1$. Donc

$$2x = 90^\circ - \varphi, \quad \sin 2x = \cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos 2x = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}.$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$$

Le carré du côté DE est $DE^2 = R^2\sin^2 x = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$ $= \frac{R^2(5-2\sqrt{5})}{10}$

De même $CD^2 = R^2(\cos x - \sin x)^2 = R^2(1-\sin 2x)$ $= \frac{R^2(5-2\sqrt{5})}{5}$.

Enfin $\frac{\overline{DE}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{10-4\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(5-\sqrt{5})(10+4\sqrt{5})}{20}$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

et
$$\frac{DE}{DC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On donne : 1° un plan PαP′ *dont les traces font avec la ligne de terre des angles* PαY = 45° ; P′αY = 36°; *et 2° un point* S *situé dans ce plan à 42 millimètres en avant du plan vertical de projection, et à 54 millimètres au-dessus du plan horizontal;*

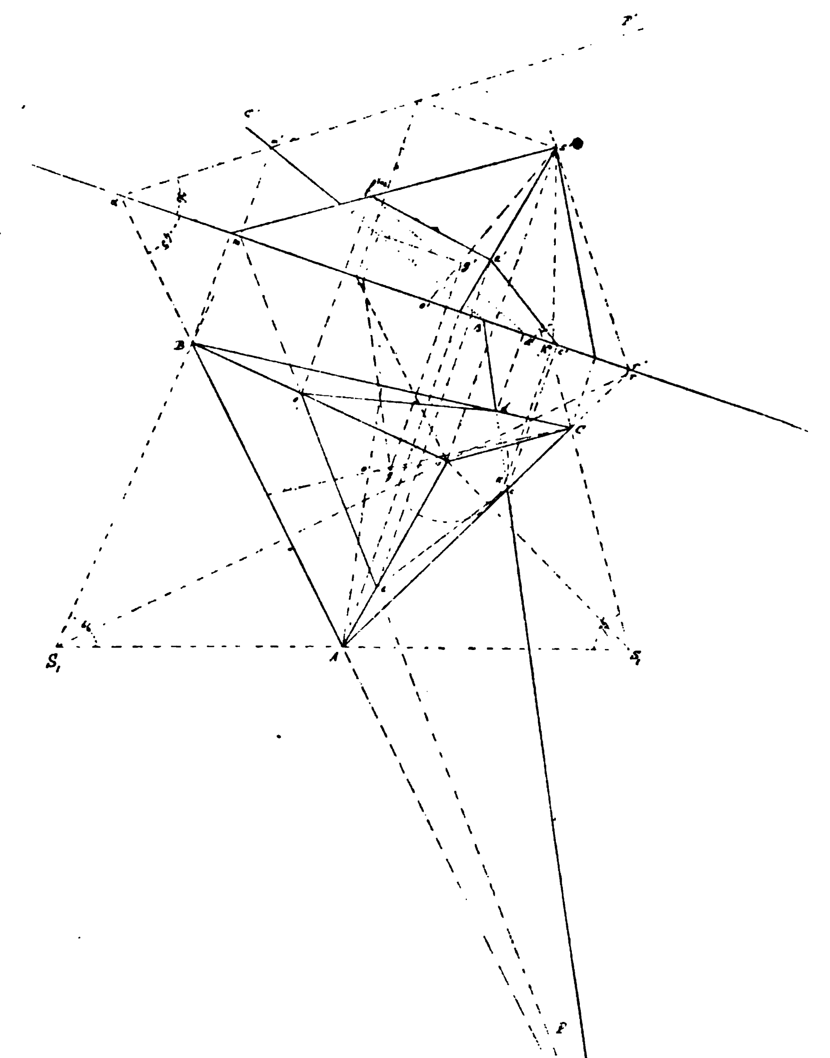
On demande :

1° De construire les projections d'une pyramide triangulaire SABC, *ayant pour sommet le point* S *et s'appuyant sur le plan horizontal par sa base* ABC *(le point* A *étant le plus éloigné de la ligne de terre), au moyen des données suivantes : le plan de la face* ASC *est perpendiculaire au plan* PαP′, *et fait un angle de 72° avec le plan horizontal ; la face* ASB *est située dans le plan* PαP′ ; *l'angle plan* ASC = 75° ; *l'angle plan* ASB = 66°; *2° de mener par le centre de gravité* G *de la pyramide un plan perpendiculaire à la droite* SG, *qui joint ce centre de gravité au sommet* S, *et de construire les projections de la section faite par ce plan dans le solide.*

Rappelons d'abord que pour trouver le point S, on prend l'intersection de l'horizontale du plan ayant une cote de 54 millimètres avec la ligne de front du plan ayant un éloignement de 42 millimètres.

I. *Projection de la pyramide.* — Par (s,s'), je mène une perpendiculaire $(sr,s'r')$ au plan, et je cherche sa trace horizontale (r,r'); par le même point (s,s') je mène une ligne de front $(sk,s'k')$ dont la projection verticale fasse avec la ligne de terre l'angle de 72°, et de s comme centre, avec sk pour rayon je décris une circonférence ; je mène par le point r une tangente rA à cette circonférence ; c'est la trace de la face ASC de la pyramide. Cette trace rencontre αP au point A; SA est l'une des arêtes de la pyramide. Pour avoir les autres sommets de la base, je rabats d'abord le plan PαP′ autour de sa trace horizontale; j'ai ainsi le rabattement AS_1 de l'arête SA, et je fais au point S_1 un angle AS_1B = 66°;

le point B, où S_1B rencontre αP est le second sommet de la base ; de même, je rabats le plan de la face ASC autour de



rA ; il me suffit pour cela de mener de s une perpendiculaire sur la trace, et, du point A comme centre, avec AS_1 pour

rayon, de décrire un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire précédente en S_2 ; ensuite, je mène S_2C, faisant avec AS_2 un angle de 75° ; le point C est le troisième sommet de la base. — J'ai donc les sommets de la pyramide en projection horizontale. Les sommets A,B,C se projettent verticalement sur la ligne de terre ; par suite je puis compléter les projections de la figure.

II. *Plan sécant et section plane.* — Le centre de gravité G de la pyramide s'obtient de la manière suivante : on prend le point O d'intersection des médianes de la base ABC ; on joint le point S' au point O, et on prend OG égal au quart de OS.

Le plan sécant passant par ce point G sera déterminé par ses traces ; sa trace horizontale rencontre en *c* et *d* la base de la pyramide : on a ainsi deux points de l'intersection. Pour avoir d'autres points de l'intersection, je prends l'intersection du plan Q'βP avec le plan donné P'αP, qui contient la face ASB ; cette droite d'intersection rencontre SB au point (f,f') et SA au point (e,e') ; en joignant le point (d,d') au point (f,f') et le point (c,c'), au point (e,e'), on aura l'intersection complète.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS A SAINT-CYR

— Calculer en fonction des trois côtés d'un triangle la médiane, la bissectrice et la hauteur issues du sommet A, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.

— Par le sommet d'un triangle ABC, mener une droite AX telle que le produit des projections des côtés AB et AC sur cette droite soit égal à un carré donné.

— Calculer le rayon de la circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée, en fonction des distances des deux points à la droite et de l'angle que fait la droite qui joint les deux points avec la droite donnée,

— Construire sur les côtés d'un carré des rectangles tels que, en joignant les sommets voisins, on forme un octogone régulier.

— On donne un cylindre et une sphère de rayon R reposant sur le plan de base du cylindre. Couper ces deux corps par un plan parallèle au premier, de façon que les volumes compris entre les deux plans soient équivalents.

— Inscrire dans un triangle donné une droite telle que les deux parties du triangle aient même périmètre et même surface.

— Circonscrire à une sphère un cône de surface donnée.

— Trouver le côté d'un triangle équilatéral, sachant que s'il augmente de *a*, sa surface augmente de b^2.

— Un triangle rectangle isocèle a 1 mètre de côté de l'angle droit. On construit sur l'un des côtés un carré et sur l'autre un triangle équilatéral, et on joint les deux sommets voisins de ces deux figures. Calculer à 0,01 près le rayon du cercle équivalent au polygone ainsi formé.

— Trouver sur la distance des centres de deux sphères un point d'où l'on voie sur les deux sphères deux zones équivalentes.

— Étant donnés un demi-cercle et un point A sur le diamètre prolongé, on mène par le point A une droite AB sous un angle donné; déterminer B sur cette droite de façon que, si l'on mène la tangente BC à la circonférence, on ait $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$.

— Étant donnée une sphère, mener un cône qui lui soit tangent de manière que sa surface latérale, limitée à la sphère, soit égale à la surface de la grande calotte sphérique qui a pour base la base du cône.

— Trouver, en fonction du rayon d'un cercle et des angles que font les rayons extrêmes avec l'axe de révolution : 1° le volume engendré par un secteur circulaire; 2° le volume engendré par le segment circulaire correspondant.

— Etant donné un segment sphérique à une base, calculer les volumes v et V de deux cônes, l'un inscrit, l'autre circonscrit au segment, et qui ont même base que lui. On suppose le segment moindre que la demi-sphère.

— A un demi-cercle on circonscrit un trapèze isocèle dont la grande base soit dirigée suivant le diamètre de ce demi-cercle. Déterminer cette base de manière que, toute la figure tournant autour du diamètre, le trapèze engendre un solide qui soit à celui de la sphère décrite par le demi-cercle comme 3 est à 2.

— Dans un cercle de rayon R, on prend un secteur dont l'angle au centre comprend n degrés. Calculer les éléments du cône droit sur lequel s'enroule exactement le secteur circulaire.

— Calculer en fonction des trois côtés d'un triangle le rayon du cercle qui a son centre sur le côté a, et est tangent aux deux autres côtés.

— Calculer le volume du cube inscrit dans un cône dont le rayon est R et la hauteur H.

— Calculer les trois angles A, B, C d'un triangle sachant que l'on a

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = p; \quad \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = q.$$

— Calculer la hauteur d'un tronc de cône dont le volume est égal à la différence des volumes des sphères construites sur les bases comme grands cercles.

— On connaît la somme A des m premiers termes d'une progression arithmétique, et celle B de n premiers termes de la progression; calculer le premier terme et la raison de cette progression.

— On donne une sphère, le cylindre circonscrit à la sphère, et le cône à deux nappes inscrit dans le cylindre. Si l'on mène un plan perpendiculaire à l'axe commun du cylindre et du cône, la section de la sphère est égale à la différence entre la section du cylindre et celle du cône, et si l'on mène deux plans perpendiculaires à l'axe commun, le segment sphérique compris entre ces deux plans est équivalent à la différence entre les segments correspondants du cylindre et du cône.

— Dans une demi-sphère, inscrire un tronc de cône droit de surface totale maxima.

— Un cylindre et un tronc de cône ont même hauteur; le cylindre a pour base la section équidistante des deux bases du tronc de cône. Calculer la différence entre le volume du tronc et celui du cylindre.

— A une sphère donnée, circonscrire un cône dont la surface latérale soit

égale à celle du cercle qui a pour rayon la distance du sommet du cône au centre de la sphère.

— Calculer les trois côtés d'un triangle, sachant que ces côtés sont trois nombres entiers consécutifs, et que la surface du triangle est égale au triple produit du côté moyen par la différence des côtés extrêmes.

— On donne la base $2b$ et la hauteur h d'un triangle isocèle; calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle.

— Trouver trois nombres entiers consécutifs dont le produit soit égal à n fois la somme, n étant entier.

— Par un point donné, mener une sécante à un cercle donné, de manière que la projection de la partie située dans le cercle sur le diamètre qui passe par le point ait une longueur donnée.

— Sur les côtés d'un triangle équilatéral, qui a pour centre le centre d'un cercle de rayon R, on construit des triangles isocèles ayant leurs sommets sur la circonférence. Quel doit être en fonction du rayon le côté du triangle équilatéral pour que le volume du tétraèdre qui a pour base ce triangle équilatéral et pour faces latérales les triangles isocèles, soit maximum.

— Trouver le maximum de $x^m y^n$ sachant que $ax^p + by^q$ est constant.

— Déterminer une progression géométrique de quatre termes connaissant l'excès a de la somme des termes extrêmes sur la somme des termes moyens et l'excès b^2 de la somme des carrés des termes extrêmes sur la somme des carrés des termes moyens.

— On a le produit $a^x b^y c^z$. Lorqu'on divise par a, le nombre des diviseurs diminue de α; si on divise par b, le nombre des diviseurs diminue de β; si on divise par c, le nombre des diviseurs diminue de γ. Trouver x, y, z.

— Etant donnée une demi-circonférence de diamètre AB, mener par le point A une sécante telle que la partie intérieure à la circonférence soit égale au segment que cette droite détermine sur la tangente en B.

— On coupe un trièdre trirectangle par un plan rencontrant les arêtes à des distances a, b, c du sommet. Trouver la surface du triangle de section.

— Résoudre un triangle connaissant l'un des angles, le côté opposé et la médiane correspondante.

— On construit extérieurement un demi-cercle sur chacun des côtés d'un triangle, et on prend les milieux des arcs ainsi tracés. Trouver les côtés et la surface des triangles qui a pour sommets les trois points ainsi déterminés.

— Trouver la valeur de $\dfrac{x + y}{x' + y'}$ déduite des équations

$$x \cos \alpha + x' \sin \alpha = x \cos \beta + x' \sin \beta$$
$$= y \cos \gamma + y' \sin \gamma = y \cos \delta + y' \sin \delta = 1$$

et montrer qu'elle ne change pas quand on intervertit l'ordre des angles.

— Dans un triangle on donne a, A et $b + c$. ou c, A et $a + b$. Résoudre dans chaque cas le triangle au moyen d'une table de logarithmes.

— Si la médiane AD d'un triangle rencontre en D le côté BC, on a

$$\text{Cotg BAD} - \text{cotg CAD} = \text{cotg B} - \text{cotg C}.$$

— Si x, y, z sont les longueurs des bissectrices d'un triangle respectivement opposées aux côtés a, b, c, on a

$$(b + c)^2 \frac{x^2}{bc} + (c + a)^2 \frac{y^2}{ca} + (a + b)^2 \frac{z^2}{ab} = (a + b + c)^2.$$

— Soit TT' la tangente en un point A à une circonférence donnée OA. On mène dans le cercle un diamètre BC, et on abaisse les perpendiculaires BB', CC' sur la tangente. Déterminer la direction du diamètre BC de façon que la surface

totale du tronc de cône engendré par le trapèze BCC'B' tournant autour de la tangente TT' soit dans un rapport donné avec la surface du cercle OA. Discuter le problème.

— On donne un angle XOY et deux points fixes A et B sur l'un des côtés. Trouver sur l'autre le point M d'où l'on voit le segment AB sous l'angle maximum.

— On donne une pyramide régulière triangulaire. Les arêtes aboutissant au sommet ont pour longueur a, et l'angle des deux arêtes est A. Calculer le volume de la pyramide. — Si a reste constant, quelle doit être la valeur de A pour que le volume soit maximum?

— Exprimer l'aire d'un triangle en fonction des trois hauteurs, ou en fonction des quatre rayons des cercles inscrits et ex-inscrits.

— Partager une droite en trois parties telles que la droite entière soit à une des parties extrêmes comme l'autre partie extrême est à la moyenne partie, et que cette dernière soit maxima.

— Un mobile décrit une circonférence de rayon égal à 100^m. Au bout de $2^h 17^m$, l'arc qu'il a parcouru a une corde de 125^m. On demande le nombre de degrés, minutes et secondes, compris dans cet arc, et la vitesse angulaire supposée uniforme.

— Une colonne verticale de hauteur h est surmontée d'un mât de longueur l. A quelle distance horizontale du pied de la colonne faut-il se placer pour voir la colonne et le mât sous des angles égaux?

— Une sphère et un cube ont même surface. Trouver le rapport de leurs volumes.

— AB et AC sont les cordes des arcs de 60 et de 90° dans un cercle de centre O. Montrer que si l'on prolonge AB et OC jusqu'à leur rencontre en D, l'arc dont la corde est DC a son cosinus égal à sa corde.

— Si l'on pose $A + B + C = 2S$, on a

$$\cos 2S + \cos 2(S - A) + \cos 2(S - B) + \cos 2(S - C) = 4 \cos A \cos B \cos C.$$

— Si a, b, c, sont les côtés d'un triangle dont l'angle C est droit, on a l'égalité

$$\cos (2A - B) = \frac{a}{c^2} (3c^2 - 4a^2).$$

— Si a et a' sont les côtés homologues de deux triangles semblables inscrits et circonscrits au même triangle, on a

$$\frac{a}{a'} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

— Si les tangentes des demi-angles d'un triangle plan sont en progression arithmétique, démontrer que les cosinus des angles entiers sont aussi en progression arithmétique.

— Si l'on a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, avec

$$\sin^3 \theta = \sin (\alpha - \theta) \sin (\beta - \theta) \sin (\gamma - \theta),$$

on a aussi $\cot \theta = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$

ou $\operatorname{cos\acute{e}c}^2 \theta = \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \alpha + \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \beta + \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \gamma$.

— Si les côtés d'un triangle sont $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$, a, b, c, A, B, C étant les éléments d'un autre triangle, les angles du premier sont les suppléments des angles 2A, 2B, 2C.

— Si A', B', C' sont les angles sous lesquels on voit les côtés d'un triangle du centre du cercle inscrit, on a la relation

$$4 \sin A' \sin B' \sin C' = \sin A + \sin B + \sin C.$$

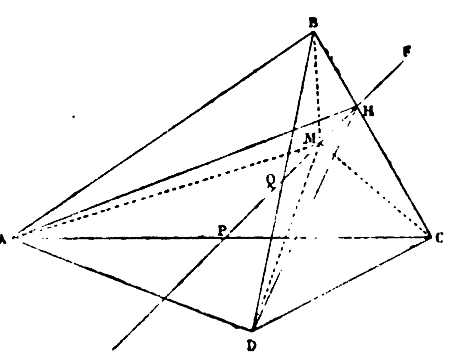
QUESTION 169

Solution, par M. Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées.

Dans un quadrilatère ABCD, *la ligne* EF *qui joint les milieux des diagonales coupe en* H *le côté* BC. *Démontrer que le triangle* AHD *est équivalent à la moitié du quadrilatère.*

(Barrieu.)

Si l'on prend un point M dans l'intérieur du quadrilatère et sur la ligne qui joint les milieux des diagonales, et si l'on joint ce point aux quatre sommets par les droites MA, MB, MC, MD, on sait que la somme des deux triangles MAD, MBC qui ont M pour sommet commun et pour bases les côtés opposés AD et BC du quadrilatère, est équivalente à la moitié du quadrilatère (page 29, 3[me] année, concours académiques de Paris, 1878, 1°).



A mesure que le point M se rapproche de H, le triangle MAD augmente et MBC diminue; mais dans toutes les positions que le point M peut occuper dans l'intérieur de la figure sur la droite EF, la somme des deux triangles MAD et MBC est constamment équivalente à la moitié du quadrilatère; donc quand les points M et H se confondent, l'aire du triangle MBC est nulle et le triangle HAD es équivalent à la moitié du quadrilatère donné.

Ce problème n'est donc qu'un cas particulier de la question résolue page 29.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Berthiot, Neret, Gangnery, de Sézanne (Marne); Hugot, de Lyon; Deslais, du Mans; Martin, de Passy.

QUESTION 171

Solution, par M. Hugot, de Lyon.

Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, A étant l'angle moyen, on a

$$tg\,\frac{B}{2}\,tg\,\frac{C}{2} = \frac{1}{3};\ cotg\,\frac{B}{2} + cotg\,\frac{C}{2} = 2\,cotg\,\frac{A}{2}.$$

(Burnier.)

Soit a le côté moyen, h la raison de la progression. On a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a-h}{\sin B} = \frac{a+h}{\sin C} = \frac{3a}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

donc

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

ou $$\frac{1}{3} = \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \text{tg}\,\frac{B}{2}\,\text{tg}\,\frac{C}{2}\right)$$

d'où $$\text{tg}\,\frac{B}{2}\,\text{tg}\,\frac{C}{2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

En second lieu

$$r = \frac{a}{\text{cotg}\,\frac{B}{2} + \text{cotg}\,\frac{C}{2}} = \frac{a-h}{\text{cotg}\,\frac{A}{2} + \text{cotg}\,\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{a+h}{\text{cotg}\,\frac{A}{2} + \text{cotg}\,\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{3a}{2\left(\text{cotg}\,\frac{A}{2} + \text{cotg}\,\frac{B}{2} + \text{cotg}\,\frac{C}{2}\right)};$$

donc $$3\left(\text{cotg}\,\frac{B}{2} + \text{cotg}\,\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

d'où $$\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{A}{2}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Blessel, à Paris ; Renaud, à Bordeaux ; Gindre, à Lons-le-Saunier ; Gino-Loria, à Mantoue, Italie ; Longueville, à Charleville ; Martin, à Passy ; Croneau, Lachesnay, à Versailles ; Speckel, à Sedan ; Dubief, à Cluny ; Vermand, à Saint-Quentin ; Sers, sergent d'infanterie de marine, à Cherbourg ; Bucheron, à Sainte-Barbe ; Vazou, collège Rollin.

QUESTION 172

Solution par M. Deslais, élève du Lycée du Mans.

Le produit des trois côtés d'un triangle rectangle évalués en nombres entiers est toujours divisible par 60.

Nous rappellerons la règle suivante, donnée par Proclus, pour trouver une expression rationnelle des côtés dun triangle rectangle.

En désignant le plus petit côté par un nombre impair; si du carré de ce nombre impair on retranche l'unité et qu'on divise le reste par 2, *on a le plus grand côté de l'angle droit. Enfin, ajoutant l'unité à cette formule, on a l'hypoténuse* (2e année, p. 50).

D'après ce qui précède le produit des trois côtés sera

$$2n(n+1)(2n+1)[2n(n+1)+1].$$

Pour que ce produit soit divisible par 60, il faut qu'il le soit par 3, 4, 5.

Or, on voit pour $n = M.3 + 1$, $2n + 1 = M.3$.

Pour $n = M.3 + 2$, $n + 1 = M.3$, enfin n entrant comme facteur, la proportion sera vraie pour $n = M.3$.

Ainsi, quel que soit n, ce produit est divisible par 3.

Maintenant si $n = M.2$, $2n = M.4$ et si $n = M.2 + 1$ $n + 1 = M.2$; par suite $2n\ (n+1) = M.4$.

Par conséquent, pour toute valeur de n le produit est divisible par 4.

Enfin, supposons $n = M.5 + 1$; alors $2n = M.5 + 2$ et $n + 1 = M.5 + 2$.

Par suite $2n(n+1)+1=(M.5+2)(M.5+2)+1=M.5$.

Pour $n=M.5+2$, $2n+1=M.5$.

Pour $n=M.5+3$, $2n=M.5+6$ et $n+1=M.5+4$. Par suite

$$2n(n+1)+1=(M.5+6)(M.5+4)+1=M.5.$$

Enfin, si $n=M.5+4$, $n+1=M.5$.

On voit donc que pour toutes les valeurs de n le produit considéré est divisible par 3, 4, 5.

Il est donc divisible par le produit $3\times4\times5=60$.

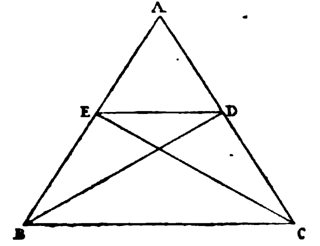
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lachesnais, Croneau, de Versailles ; Bucheron, élève de Sainte-Barbe ; Blessel, piqueur des ponts et chaussées.

QUESTION 173

Solution, par Gino-Loria, licencié de l'Institut Technique de Mantoue (Italie).

Si, dans un triangle, les bissectrices des angles à la base rencontrent les côtés opposés sur une parallèle à la base, le triangle est isocèle.

Soit ABC un triangle tel, qu'après avoir mené les bissectrices BD, CE des angles à la base, la droite ED soit parallèle à BC.



BD, CE étant bissectrices, on a :

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC};\ \frac{AE}{BE}=\frac{AC}{BC}.$$

Divisant ces égalités on a :

$$\frac{\frac{AD}{CD}}{\frac{AE}{BE}}=\frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

Mais ED est parallèle à BC, donc on aura :

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AE}{BE}$$

et par conséquent l'égalité (1) devient

$$\frac{AB}{AC}=1$$

d'où $AB=AC$. Donc le triangle est isocèle.

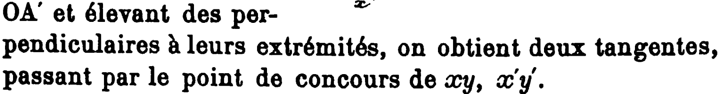
NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Renaud, à Bordeaux; Fauré, soldat au 5ᵉ de ligne à Tarbes; Bompard, collège Stanislas; Gindre, à Lons-le-Saulnier; Tricon, à Marseille; Cosme, Lecouty, Deslais, Cattereau, au Mans; Huet, à Orléans; Pasquier, à Bruxelles; Croneau, à Versailles; Blessel, à Paris; Longueville, à Charleville; Johannet à Châteauroux; Sers, sergent d'infanterie de marine à Cherbourg; Dubief, école de Cluny; Bucheron, à Sainte-Barbe; Bonneville et Gerlié, à Toulouse; Lory, à Vendôme; Vazou, collège Rollin; Marin, à Agen; Chaulet, à Montauban; Vail, école Albert-le-Grand, Arcueil; Tinel, au Havre; Gossieaux, Lafond, Vermand, Boulogne, à Saint-Quentin; Montérou, à Pau.

QUESTION 181

Solution par M. DESLAIS, élève au Lycée du Mans.

Étant données une circonférence O *et deux droites concourantes* xy, x'y' *dont le point de concours n'est pas dans les limites du dessin, mener à la circonférence une tangente passant par le point de rencontre de* xy *et de* x'y'.

Du centre O, soient $O\alpha$, $O\alpha'$ respectivement perpendiculaires sur les droites xy, $x'y'$.



Les points α et α' appartiennent à la circonférence ω décrite sur OK comme diamètre (K est le point de concours des droites xy, $x'y'$).

Connaissant les trois points O, α, α' de cette circonférence, il est facile de la construire; elle coupe la circonférence O en deux points A et A'. Joignant OA, OA' et élevant des perpendiculaires à leurs extrémités, on obtient deux tangentes, passant par le point de concours de xy, $x'y'$.

NOTA. — Ont résolu la même question: MM. Craneau, lycée Fontanes; Gerlié, de Toulouse; La Chesnais, de Versailles; Paul d'Ocagne, collège Chaptal; Hugot, de Lyon; Lory, de Vendôme; Jolly, de Tarbes.

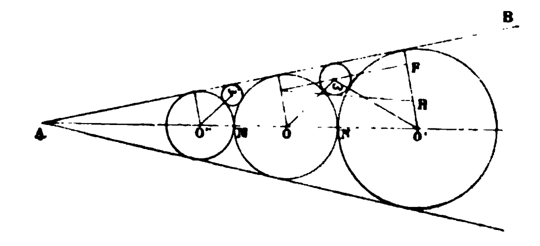
QUESTION 182

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

Soit donné un cercle O *de rayon* r *inscrit dans un angle. On trace les deux cercles* O′, O″, *tangents aux côtés de l'angle et au cercle* O, *puis les cercles* ω, ω′ *tangents à l'un des côtés et en même temps tangents respectivement à* O, O′ *et à* O, O″. *Démontrer que* x *et* y *étant les rayons des cercles* ω, ω′, *on a la relation*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}.$$

Désignons par r' le rayon du cercle O′, par r'' celui du cercle O″; menons par ω une parallèle EF au côté AB de



l'angle et par E une parallèle EH à la ligne AO. Joignons ωO, ωO′.

Les triangles OEω, O′Fω donnent respectivement

$$\overline{\omega E}^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2, \quad \text{ou} \quad OE = 2\sqrt{rx}$$
$$\overline{\omega F}^2 = (r'+x)^2 - (r'-x)^2, \quad \text{ou} \quad \omega F = 2\sqrt{r'x}$$

et le triangle EFH donne

$$\overline{EF}^2 = (E\omega + \omega F)^2 = (r+r')^2 - (r-r')^2,$$

ou, en remplaçant ωE et ωF par leurs valeurs,

$$4rr' = 4x(\sqrt{r} + \sqrt{r'})^2;$$

d'où

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r} + \sqrt{r'}}.$$

On trouverait de même

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{rr''}}{\sqrt{r} + \sqrt{r''}};$$

par suite

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{\sqrt{r}\,[\sqrt{rr'}+\sqrt{rr''}+2\sqrt{r'r''}]}{(\sqrt{r}+\sqrt{r'})(\sqrt{r}+\sqrt{r''})};$$

mais

$$\frac{r''}{r}=\frac{AO''}{AO}=\frac{AO''+r''}{AO+r}=\frac{AM}{AN}$$

$$\frac{r}{r'}=\frac{AO}{AO'}=\frac{AO+r}{AO'+r'}=\frac{AM}{AN};$$

donc

$$\frac{r''}{r}=\frac{r}{r'},\ \text{c'est-à-dire}\ r=\sqrt{r'r''},$$

par suite l'égalité précédente devient

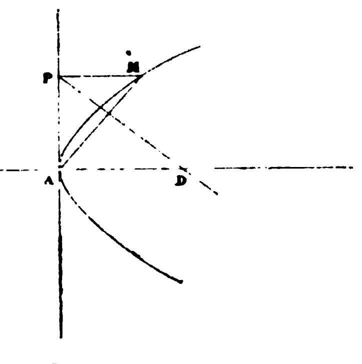
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{\sqrt{r}\,[\sqrt{rr'}+\sqrt{rr''}+2r]}{\sqrt{rr'}+\sqrt{rr''}+2r}=\sqrt{r}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Crosneau, lycée Fontanes; Blondin, à Rouen; Lavechin, au lycée Saint-Louis.

QUESTION 184

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

Si, par la projection d'un point de la parabole sur la tangente au sommet, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur issu du sommet, ces perpendiculaires vont concourir en un même point.



Les triangles rectangles PMA, PDA sont semblables, car les angles PMA, DPA sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. On a par suite

$$\frac{MP}{PA}=\frac{PA}{AD};$$

d'où $$AD = \frac{\overline{PA}^2}{MP};$$
quantité constante et égale à $2p$. Donc le point D est fixe et la propriété est démontrée.

QUESTION 188

Solution par M. PAUL D'OCAGNE, élève au Collège Chaptal.

Dans un triangle donné, inscrire un rectangle de diagonale minima et donner la longueur de la diagonale.

(W.-J.-C. MILLER.)

Soit a la base du triangle donné, h sa hauteur, x la base du rectangle cherché et y sa hauteur.

Il faut trouver le minimum de la diagonale du rectangle, ou celui du carré de cette diagonale, c'est-à-dire $x^2 + y^2$.

Mais on a $$\frac{x}{a} = \frac{h - y}{h}$$
ou $$hx + ay = ah.$$

D'après un théorème démontré page 304, tome III, le minimum a lieu pour $\frac{x}{h} = \frac{y}{a}$.

On a donc à inscrire dans le triangle un rectangle semblable à un rectangle donné; problème connu.

D'après le même théorème, la diagonale minima a pour longueur $$\alpha = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, Lesieur, lycée Henri IV; Schmidt, Pfister, école Lavoisier; Richebraque, au lycée Saint-Louis; Bonneville, à Toulouse; Boulogne, Gossieaux, à Saint-Quentin

---

QUESTION 191

Solution par M. Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées.

Partager un tronc de cône par un plan parallèle aux bases, de façon que la partie inférieure soit contenue n *fois dans le tronc tout entier.*

Posons CD $=$ R, AB $= r$ et MN $= x$; représentons par V, V' et V'' les volumes des cônes respectivement engendrés par les triangles rectangles OCD, OMN et OAB dans leur mouvement de rotation autour de l'axe commun OC; nous devons avoir, d'après les données du problème

$$\frac{V - V''}{V - V'} = n. \qquad (1)$$

Les cônes engendrés par des triangles semblables étant semblables, nous avons

$$\frac{V}{R^3} = \frac{V'}{x^3} = \frac{V''}{r^3} = \frac{V - V''}{R^3 - r^3} = \frac{V - V'}{R^3 - x^3}. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit
$$\frac{R^3 - r^3}{R^3 - x^3} = n\,;$$

d'où
$$x = \sqrt[3]{\frac{R^3(n - 1) + r^3}{n}}$$

Nota. — **La même question a été résolue par M. Deslais, du Mans.**

QUESTION 193

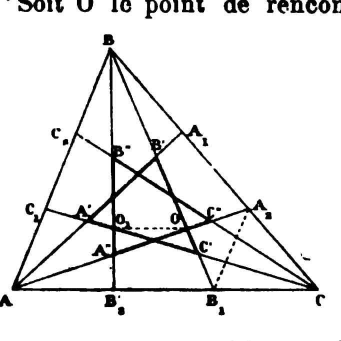
Solution par M. Deslais, élève du Lycée du Mans.

On joint les sommets A, B, C *d'un triangle aux points* A_1 *et* A_2, B_1 *et* B_2, C_1 *et* C_2, *qui divisent en trois parties égales les côtés opposés. Les droites* AA, BB_1, CC_1 *se coupent en trois points*

A', B', C', *les droites* AA_2, BB_2, CC_2, *en trois autres points* A'', B'', C''.

Démontrer que chacun des triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$ *est le septième du triangle* ABC. (Corr. de Catalan.)

Soit O le point de rencontre des droites AA_2, BB_1. A_2B_1 étant parallèle à AB, on a



$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{A_2B_1}{AB} = \frac{1}{3}$$

Si O_1 est le point de rencontre des droites CC_1, BB_2, on a de même

$$\frac{O_1B_2}{O_1B} = \frac{1}{3}$$

La ligne OO_1 est donc parallèle à AC et l'on a

$$\frac{OO_1}{B_2B_1} = \frac{BO}{BB_1} = \frac{3}{4}.$$

Par suite
$$\frac{AB_2}{OO_1} = \frac{A'B_2}{A'O_1} = \frac{4}{3},$$

d'où
$$\frac{A'B_2}{O_1B_2} = \frac{4}{7}.$$

Or $O_1B_2 = \frac{BB_2}{4}$, par suite $\frac{A'B}{BB_2} = \frac{1}{7}$.

On voit ainsi que le triangle $AA'B_2$ est le septième du triangle ABB_2, ou $\frac{1}{21}$ du triangle total. On démontrerait de même que chacun des triangles $BB'C_2$, $CC'A_2$ est égal à $\frac{1}{21}$ du triangle ABC.

Si du triangle ABC on retranche le triangle BCC_2, plus les deux quadrilatères $AC_2B'B_2$, $CC'A'B_2$, il reste le triangle $A'B'C'$.

Or, S étant la surface du triangle ABC, on a:

$$BCC_2 = \frac{1}{3}\,S.$$

$$AC_2B'B_2 = \frac{1}{3}\,S - \frac{1}{21}\,S = \frac{2}{7}\,S.$$

$$CC'A'B_2 = \frac{1}{3}\,S - \frac{2}{21}\,S = \frac{5}{21}\,S.$$

Par suite $A'B'C' = S\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{7} - \frac{5}{21}\right) = \frac{1}{7} S;$

donc $A'B'C' = \frac{1}{7} ABC.$

Même démonstration pour le triangle A'B'C'.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

DIJON

— Étant donné un tétraèdre régulier, mener un plan parallèle à deux arêtes opposées, tel que la section soit maxima.

— Par les extrémités de l'un des côtés d'un carré, on fait passer une circonférence qui coupe le côté opposé ou son prolongement sous un angle donné ω. Trouver le rayon de cette circonférence en fonction du côté a et de ω.

— Couper une circonférence par une sécante passant par un point fixe de façon que le triangle qui a pour sommets les traces de cette droite sur la circonférence et le centre de la courbe ait une aire maxima.

LYON

— Un corps pesant est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de 3m 50; à quelle hauteur parviendra-t-il? après combien de temps reviendra-t-il au point de départ?

— Inscrire dans une sphère de rayon R un cylindre dont la surface totale soit égale à la surface d'un cercle de rayon donné a. — Quelle relation doit exister entre R et a pour que le problème ait une ou deux solutions ?

CAEN

— On donne un triangle ABC; on joint les pieds E, D, F, des hauteurs. Trouver le rapport des surfaces des deux triangles ABC, DEF.

— La surface d'un rectangle est p et devient q lorsque l'angle aigu des diagonales devient double sans que ces diagonales changent de longueur. Trouver cette longueur et l'angle aigu des diagonales.

NANCY

— Connaissant les deux bases B et b d'un tronc de pyramide à bases parallèles, calculer la surface B' de la section menée par le milieu des arêtes. En appelant V le volume du tronc, démontrer la formule

$$V = \frac{H}{6}(B + b + 4B').$$

LILLE

— Par l'extrémité A du diamètre d'une demi-circonférence AB, on mène une corde AC. Quel doit être l'angle de cette corde et du diamètre, pour que le secteur BOC et le segment AMC engendrent, en tournant autour de AB, des volumes équivalents.

— On donne dans une ellipse le grand axe $2a$ et la distance focale $2c$; en un point M dont le rayon vecteur $FM = r$, on mène la tangente MT et la normale MN. On demande d'évaluer la distance NT des pieds de ces droites sur le grand axe. Quelle doit être la valeur de r pour que l'on ait $NT = 2c$?

— On donne dans une ellipse le grand axe $2a$ et la distance focale $2c$, et l'on considère un point dont la distance à l'un des foyers est r; déterminer la distance de ce point au centre, ainsi qu'à chacun des axes de la courbe.

— Par l'extrémité A du diamètre AB d'un demi-cercle, on mène une corde AC, faisant avec ce diamètre un angle x; déterminer cet angle de telle manière que les deux portions du demi-cercle engendrent des volumes égaux dans la rotation autour de AB. On évaluera cet angle à une seconde près.

BORDEAUX

— Trouver le volume engendré par un trapèze tournant autour de sa plus grande base, en fonction des quatre côtés.

— Trouver la valeur de x fournie par l'équation

$$\log\sqrt{7x+3} + \log\sqrt{3x+5} = 1 + \log 4{,}5.$$

— Partager une droite de longueur donnée a en deux parties x et y telles que $x^2 + 3y^2$ soit la plus petite valeur possible, et donner l'expression de cette valeur; appliquer à $a = 250$.

— Etant donnés les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, trouver le rayon du cercle inscrit. Trouver le rayon du cercle tangent au premier et à l'hypoténuse et un côté du triangle. Application $b = 20$; $c = 12$.

— Résoudre l'équation

$$\text{séc}\, x = \sin x + 2\cos x.$$

PARIS

Novembre 1879.

— De tous les cônes de révolution inscrits dans une sphère, quel est celui dont la surface latérale est maxima? — On prendra comme inconnue la corde BA′ joignant un point B de la circonférence de base au point A′ symétrique du sommet par rapport au centre de la sphère.

— Étant donné un hémisphère, on propose de le couper par un plan parallèle à la base de façon, que le volume compris entre ce plan et la surface sphérique soit égal à la demi-somme des cônes ayant pour base commune le cercle d'intersection et pour sommets l'un le centre et l'autre l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan.

— Une barre homogène AB, dont la longueur est 1 mètre, est mobile autour d'un point C placé au tiers de sa longueur, en sorte que AC = 2CB. On demande quel est le poids de cette barre, sachant qu'elle reste en équilibre quand on place un poids de 2 kilogr. en A et un poids de 5 kilogr. en B.

— Condition nécessaire et suffisante pour que la fraction $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ conserve la même valeur, quelle que soit la valeur de x.

— Soit AD la perpendiculaire abaissée du sommet A sur la base BC du triangle ABC. On connaît le côté AB = 5; le côté AC = 4; on sait de plus que le produit des deux segments BD et DC de la base est égal à $\frac{135}{16}$; calculer la longueur de cette base.

— Déterminer le rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre régulier de côté a.

— Un poids de 10 kilogr. glisse sur un plan incliné de 45° sur l'horizon, suivant une ligne de plus grande pente du plan; quel est le travail accompli par la pesanteur pendant que le poids se déplace de A en B, sachant que AB = 2 mètres?

— Étant donnée une sphère de rayon a, calculer la distance du centre O à un point A de telle sorte que la surface latérale du cône, ayant pour sommet le point A et circonscrit à la sphère, soit égale à la surface de la zone BDC qui a même base que le cône.

Avril 1880.

— Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et l'angle aigu B.

— Étant donné un triangle OAB, rectangle en O, trouver sur l'hypoténuse un point M tel que la différence $MP^2 - MQ^2$ entre les carrés de ses distances aux deux côtés de l'angle droit soit la plus petite possible en valeur absolue.

— Étant donné un cercle de centre O et de rayon OA, déterminer une corde AB telle que le volume engendré par le segment de cercle BMA soit dans un rapport donné avec le volume engendré par le triangle rectangle ABD (BD étant la perpendiculaire menée de B sur OA), quand ces deux figures tournent autour de OA.

— Étant données les deux bases parallèles a et b et la hauteur h du trapèze ABCD, calculer la longueur de la droite MN, parallèle aux bases et qui partage le trapèze en moyenne et extrême raison.

— Construire la directrice d'une parabole connaissant le foyer, une tangente et un point de la courbe.

— Dans un triangle ABC, l'angle A vaut 45°; les côtés b et c qui le comprennent

ont pour valeur $b = 4$. $c = \sqrt{2}$; calculer sans tables de logarithmes le sinus et le cosinus de chacun des angles B et C.

— On donne les deux équations $x^2 + ax + 1 = 0$; $x^2 + x + a = 0$; déterminer a de façon que les deux équations admettent une racine qui leur soit commune.

— Résoudre l'équation

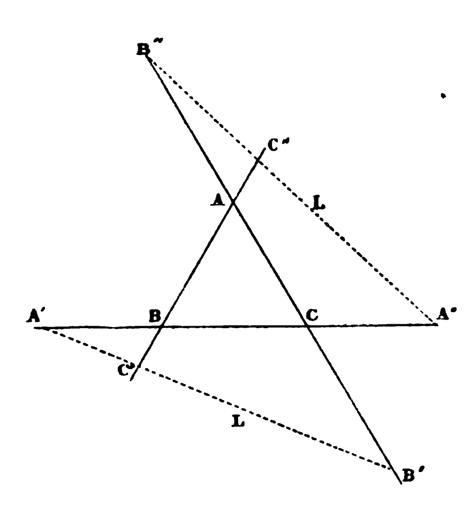
$$x + y = a; \quad xy(x^2 + y^2) = b.$$

— Les rayons de deux cercles sont 1 et 2; la distance de leurs centres est $\sqrt{7}$; calculer sans tables de logarithmes le cosinus de l'angle compris entre les tangentes menées à ces deux cercles par l'un de leurs points d'intersection. Trouver en outre le sinus, le cosinus et la tangente de la moitié de cet angle.

TRANSVERSALES RÉCIPROQUES ET APPLICATIONS

Par M. G. de Longchamps,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

1. Si l'on considère un triangle ABC coupé aux points A'B'C' par une transversale L, et si l'on prend le point A″ symétrique du point A' par rapport au milieu du côté BC : A″ et les deux points analogues B″, C″, sont situés sur une même droite L'. Cette propriété est la conséquence immédiate du théorème de Ménelaüs et de sa réciproque. Ces deux droites L, L', tellement liées l'une à l'autre qu'à la droite L correspond la droite L', et réciproquement, ont été autrefois considérées par nous (*) et, pour rappeler la propriété précé-

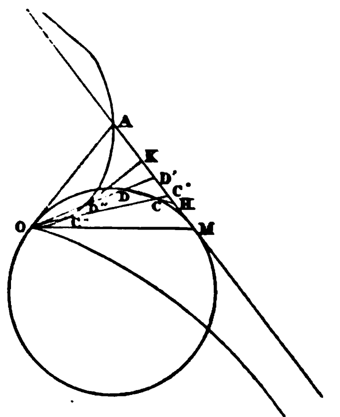


(*) *Annales de l'École normale*, t. III. 1867.

dente, nous les avons nommées *transversales réciproques*. On rencontre ces droites qui jouissent de différentes propriétés remarquables dans plusieurs questions de géométrie; nous nous proposons simplement de montrer ici comment on peut déduire, du théorème précédent, une construction de la tangente en un point pris sur quelques courbes célèbres : la *cissoïde*, droite ou oblique; la *strophoïde*, droite ou oblique; la *lemniscate de Bernoulli*; les *conchoïdes*.

2. Considérons d'abord la cissoïde. On sait que cette courbe est engendrée de la manière suivante :

Étant pris un cercle, un point O sur sa circonférence et une tangente quelconque AB; par le point O on mène une droite qui rencontre le cercle en C, la droite AB en C′; on prend enfin OC″ = CC′ le lieu du point C″ est la cissoïde. Nous nous proposons de construire la tangente au point C″.



Considérons, à cet effet, une droite OD′DD″ voisine de la précédente; les points D, D′, D″ étant d'ailleurs définis comme les points C, C′, C″. Dans le triangle OD′C′ les droites CD, C′D″ sont deux transversales réciproques; elles coupent donc la base C′D′ en deux points H et K symétriques par rapport au milieu de C′D′. Que l'on suppose maintenant que OC, OD se rapprochent et viennent se confondre, DC devient la tangente au cercle au point C; D″C″ à la cissoïde au point C″ et les points K, H sont, à la limite, deux points de la droite AB également distants du point C′. De cette remarque, on peut déduire la construction suivante :

Une cissoïde étant donnée et définie par son point de rebroussement O, *la tangente* OM *en ce point, et l'asymptote* AMB; *on construit le cercle qui passe par les points* O *et* M, *et qui, en ce point* M, *est tangent à la droite* AB. *Par le point* O, *on trace*

une droite rencontrant ce cercle, l'asymptote et la cissoïde, respectivement aux points C, C′, C″ ; *ce dernier point étant obtenu en prenant* OC″ = CC′. *Ceci fait et pour avoir la tangente en ce point* C″, *il suffira de mener la tangente au cercle au point* C; *cette droite rencontre l'asymptote en un certain point, on prend le symétrique de celui-ci par rapport à* C′ *et l'on joint ce dernier point à* C″ : *cette droite est la tangente demandée.*

3. La règle précédente s'applique évidemment à toutes les courbes transformées d'une courbe donnée par la loi suivante : On donne un point O, une droite AB, et une courbe f; par O, on trace une droite quelconque rencontrant la courbe f en C, AB en C′ et l'on prend OC″ = CC′ ; le lieu du point C″ est une courbe φ transformée de f, et la tangente à φ au point C″ s'obtient comme nous l'avons indiqué tout à l'heure pour la cissoïde.

On peut encore, et comme me l'a fait observer un de mes collègues (*), supposer que le point C″, qui se déduit des points C, C′, est défini par l'égalité

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CC'}} : \frac{\mathrm{OC''}}{\mathrm{C'C''}} = \mathrm{K},$$

K désignant une constante qui est égale à 1, dans le cas particulier qui nous a servi à définir la cissoïde. Les deux droites CD, C″D″ ne sont plus des transversales réciproques, mais, comme il est facile de le vérifier, elles jouissent encore de la propriété, la seule qui soit essentielle à notre construction, d'aller couper la droite AB en deux points symétriques par rapport au milieu de C′D′.

4. Considérons maintenant la strophoïde.

On sait qu'étant données deux droites Ax, Ay, et un point O sur Ax; si par ce point O on mène la droite OB et que l'on prenne BC″ = BA, le point C″ ainsi obtenu appartient à une strophoïde qui peut encore être engendrée de la manière suivante. Du point O comme centre avec OA pour rayon, décrivons un cercle et par O menons OE parallèle

(*) M. Walecki, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Nancy.

lèle à Ay; la droite AC″ rencontre le cercle en C et OD en C′ : je dis que CC′ = AC″. En effet, les deux triangles AOC″, OC′C, ont : OA = OC; les angles OAC, ACO sont égaux ; enfin le triangle ABC″ étant, par hypothèse, isocèle, il en est de même du triangle C′OC″. De là, on conclut l'égalité des angles AC″O, CC′O, par suite celle des triangles AOC″, COC′; donc CC′ = AC″.

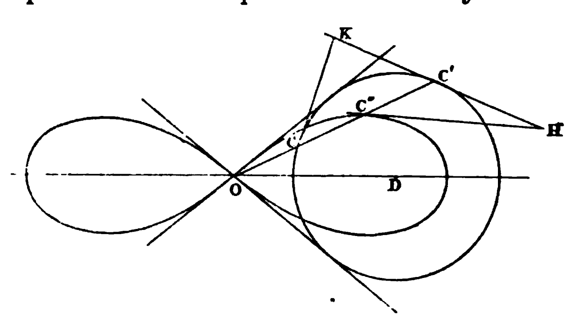
De cette génération, point par point, de la strophoïde oblique, et des remarques générales qui viennent d'être exposées, on peut conclure que la tangente à la strophoïde, au point C″, et la droite fixe OD rencontrent la tangente au cercle au point C en deux points H, K symétriques par rapport à C. Si nous ajoutons que, pour des raisons évidentes, la droite OD est symétrique de l'asymptote par rapport au point A et que les tangentes au point double A sont les deux droites rectangulaires qui joignent ce point aux points de rencontre de OD avec le cercle, on déduira des remarques précédentes la construction point par point de la strophoïde et celle de la tangente en un point donné de cette courbe supposée définie par les éléments suivants : 1° le point double ; 2° l'asymptote ; 3° les tangentes au point double, qui sont d'ailleurs rectangulaires.

5. Si d'un point O pris dans le plan d'un cercle, de centre D, on mène une sécante rencontrant le cercle aux points C, C′; et si, sur cette droite, à partir du point O, on porte OC″ = CC′; le lieu du point C″ est une courbe dont l'équation

polaire, est, en prenant pour axe polaire le diamètre du point O, $\rho^2 = 4R^2 - 4\,d^2 \sin^2 \omega,$
R désignant le rayon du cercle; d la distance OD. Dans le cas particulier où le point O est tellement placé que, de ce point, le cercle est vu sous un angle droit; si l'on a, par conséquent, $d^2 = 2R^2$
l'équation précédente devient :

$$\rho^2 = 2d^2 \cos 2\,\omega.$$

et le lieu du point C″ est donc une *lemniscate de Bernoulli*. ayant O pour centre et D pour l'un de ses foyers.



De cette remarque on déduit la construction, point par point, de la lemniscate et celle de la tangente en chacun de ses points, par la règle suivante :

Une lemniscate étant donnée et définie par son centre O *et son foyer* D *; par le point* O *on mène deux droites inclinées de* 45° *sur* OD, *et, du point* D *comme centre, on décrit un cercle tangent à ces deux droites* : *ayant tracé par le point* O *une sécante rencontrant le cercle aux points* C, C′, *on prendra sur cette droite* OC″ = CC′ *; le point* C″ *est un point de la lemniscate. Pour avoir la tangente en* C″, *on trace les tangentes au cercle aux points* C, C′, *soit* K *leur point de rencontre, on prend* C′H = C′K *et* HC″ *est la tangente cherchée.*

6. Nous ferons remarquer en terminant que les considérations précédentes s'appliquent encore aux *conchoïdes* et aux courbes que nous avons nommées (*) *conchoïdales*, parce

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique* ; t. V, mai 1879.

qu'elles sont des conchoïdes dans un cas particulier. Pour engendrer une conchoïdale il faut imaginer trois courbes f, φ, ψ; une tangente à f au point O rencontre φ et ψ respectivement en C et C′ : on prend OC″ = CC′; le lieu du point C″ quand la droite considérée roule sur f est une conchoïdale. Si la courbe f se réduit à un point, la tangente au point C″ s'obtient par la règle que nous venons de donner pour la lemniscate, qui est une conchoïdale quand f est un point et que φ et ψ sont confondues avec un seul et même cercle vu du point f sous un angle droit. Les conchoïdes ordinaires se déduisent des conchoïdales en supposant : 1° que f est un point : 2° que φ est un cercle ayant son centre en f ; ψ restant d'ailleurs une courbe arbitraire.

NOTE

SUR LE NOMBRE DES POINTS D'INFLEXION RÉELS DES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **J. Collin**, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de mathématiques.

Nous nous proposons de donner une démonstration directe et fort simple de ce théorème bien connu :

Théorème. — *Une courbe du troisième degré ne peut pas avoir plus de trois points d'inflexion réels ; et si elle en a trois, ils sont en ligne droite.*

Pour le démontrer, nous allons établir le lemme suivant :

Lemme. — *Si une courbe du troisième degré a deux points d'inflexion réels, elle en a forcément un troisième, situé sur la droite qui joint les deux premiers.*

En effet, 1° supposons d'abord qu'en ces deux points d'inflexion A et B, les tangentes ne soient pas parallèles. Prenons ces tangentes respectivement pour axes des x et des y ; l'équation de la courbe sera

$$(y - b)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x - a)^2 + xy\,(my + nx + p) + b^2 = 0$$

c'est-à-dire $\quad (ay + bx - ab)^2 + xy \,.\, \mathrm{R} = 0,$
R étant un polynôme linéaire; or, cette forme met le lemme en évidence.

2° Supposons maintenant que les tangentes en A et B soient parallèles. Prenons alors pour axe des x la droite AB, et pour axe des y la tangente en A. L'équation de la courbe sera $\quad y^2 + myx^2 + nx^3 = maxy + px^2 + x(na - p)a.$
c'est-à-dire $\quad y^3 + x(x - a)\mathrm{R} = 0;$
ce qui démontre encore le lemme.

Cela posé, passons au théorème, soit une courbe quelconque du troisième degré : 1° Elle ne peut pas avoir plus de trois points d'inflexion en ligne droite; 2° Elle ne peut pas avoir trois points d'inflexion non en ligne droite; car, en vertu du lemme précédent. elle en aurait alors une infinité.

Donc, au plus, elle peut avoir trois points d'inflexion en ligne droite;

c. q. f. d.

DU NOMBRE

QUI EXPRIME COMBIEN IL Y A DE NOMBRES PREMIERS A UN NOMBRE DONNÉ n ET COMPRIS ENTRE ZÉRO ET p

Par M. **Minine.**

(Société mathématique de Moscou, séance du 15 janvier 1880.)

Nous emploierons le symbole $\left(\varphi(\mathrm{N})\right)_0^{\mathrm{P}}$ pour désigner combien il y a de nombres premiers à N dans la suite 1, 2, 3,... P; nous désignerons par E (x) le plus grand entier contenu dans une quantité quelconque x, et nous représenterons l'expression $\mathrm{E}\left(\frac{n}{x}\right)$ symboliquement par $n\mathrm{E}\frac{(1)}{x}$.

N étant égal à $a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}.d^{\delta}\ldots$, écrivons la suite des nombres entiers $\qquad 1, 2, 3, 4, \ldots, \mathrm{P} - 1, \mathrm{P}. \qquad (1)$

Si des P nombres de cette suite je retranche les nombres qui sont divisibles par a; du reste, les nombres qui sont divisibles par b; du reste, les nombres qui sont divisibles par c, etc..., les nombres restants, dans la suite (1), seront en nombre $\left(\varphi(N)\right)_0^P$. Or dans la suite (1) il y a $E\left(\frac{P}{a}\right)$ nombres qui sont divisibles par a. Retranchant ces nombres, il vient $$P - E\left(\frac{P}{a}\right) = P\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right).$$

Retranchons du reste $E\left(\frac{P}{b}\right)\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right)$ nombres qui sont divisibles par b, il vient :

$$P\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right) - E\left(\frac{P}{b}\right)\left(1 - E\,\frac{(1)}{a}\right)$$
$$= P\left(1 - E\frac{(1)}{a}\right)\left(1 - E\,\frac{(1)}{b}\right).$$

Retranchons du reste les nombres qui sont divisibles par c, il vient $P\left(1 - E\frac{(1)}{a}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{b}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{c}\right)$ et ainsi de suite.

On a donc

$$\left(\varphi(N)\right)_0^P = P\left(1 - E\frac{(1)}{a}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{b}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{c}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{d}\right)\ldots \qquad (2)$$

Il faut remarquer que dans cette formule l'opération de la multiplication peut se faire dans un ordre quelconque, car

$$E\frac{E\frac{n}{x}}{y} = E\frac{E\frac{n}{y}}{x} = E\frac{n}{y}.$$

Si P est divisible par a, b, c..., la formule (2) se réduit à

$$\left(\varphi(N)\right)_0^P = P\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)\ldots$$

P étant égal à N, la même formule donne la formule connue

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)\ldots$$

Exemple. — Soient $N = 12$, $P = 37$. La formule (2) donne

$$\left(\varphi(12)\right)_0^{37} = 37\left(1 - E\frac{(1)}{3}\right)\left(1 - E\frac{(1)}{2}\right)$$

$$= 37 - E\frac{37}{3} - E\frac{37}{2} + E\frac{37}{2.3}$$

$$= 37 - 12 - 18 + 6 = 13.$$

Remarque. — Soient N, N, N″... des nombres premiers entre eux deux à deux; on conclut de la formule (2) que le symbole $\left(\varphi(N)\right)_0^P$ jouit de la propriété suivante:

$$\left(\varphi(N)\right)_0^P\left(\varphi(N)\right)_0^{P'}\left(\varphi(N)\right)_0^{P''}\ldots = \left(\varphi(N.N'.N''\ldots)\right)_0^{P.P'.P''\ldots}$$

Si dans cette formule on fait $P = N$; $P' = N'$, $P'' = N''\ldots$, on trouve l'équation connue

$$\varphi(N)\,\varphi(N)\,\varphi(N'')\ldots = \varphi(N.N.N''\ldots).$$

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. Jouanne, professeur au Lycée de Caen.

Équation du cercle passant par trois des pieds des normales menées d'un point à une conique à centre.

Soient α et β les coordonnées du pied d'une normale issue d'un point (X, Y);

Il en résulte les identités,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0, \quad c^2\alpha\beta X - a^2\beta Y + b^2\alpha = 0.$$

En prenant pour origine le point $(\alpha\beta)$ les équations qui donnent les pieds des normales sont :

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 + 2a^2\beta y + 2b^2\alpha x = 0,$$

$$(2) \qquad c^2xy - y(a^2X + \alpha b^2) + x(b^2Y + \beta a^2) = 0.$$

L'équation du cercle cherché qui passe par les trois autres pieds est : $x^2 + y^2 + 2Mx + 2My + P = 0$;

M, N et P sont des fonctions de $\alpha\beta$, X et Y qu'il faut déterminer.

A cet effet, cherchons d'abord l'équation aux abscisses et posons pour plus de simplicité $A = a^2X + \alpha b^2$, $B = b^2Y$

$+ \beta a^2$; cette équation est fournie par l'élimination de y entre (1) et (2); et par un calcul facile, on trouve :

$$c^4b^2x^3 + 2c^2b^2(c^2\alpha A)x^2 + [a^2B(B - 2a^2\beta) + Ab^2(A - 4c^3\alpha)]x + 2A(a^2\beta B + b^2\alpha A) = 0 \quad \text{et } x = 0.$$

L'équation du troisième degré donne les abscisses des trois pieds situés sur le cercle.

J'obtiendrai une autre forme de cette équation en tenant compte de ce que les coordonnées de ces points doivent satisfaire simultanément aux trois équations suivantes :

$$(c^2x - A)y + Bx = 0$$
$$a^2y^2 + 2a^2\beta y + b^2x^2 + 2b^2\alpha x = 0$$
$$y^2 + 2Ny + x^2 + 2Mx + P = 0$$

Pour remplir cette condition, il suffit en considérant y et y^2 comme deux variables linéaires d'écrire que le déterminant est nul : savoir

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2x - A & Bx \\ a^2 & 2a^2\beta & b^2x^2 + 2b^2ax \\ 1 & 2N & x^2 + 2Mx + P \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on a cette autre équation du troisième degré :

$$c^4x^3 + c^2[2(Ma^2 - b^2\alpha) - A]x^2 + [c^2a^2P - 2A(Ma^2 - b^2x) + 2a^2\beta P - 2Na^2B]x - Aa^2P = 0.$$

Les racines étant les mêmes que celles de la précédente, on est conduit en identifiant aux équations suivantes :

$$\frac{1}{b^2} = \frac{2(Ma^2 - b^2\alpha) - A}{2b^2(c^2\alpha - A)}$$
$$= \frac{c^2a^2P - 2A(Ma^2 - b^2\alpha) + 2a^2\beta B - 2Na^2B}{a^2B^2 - 2a^2c^2\beta B + A^2b^2 - 4b^2c^2\alpha A}$$
$$= \frac{-a^2P}{2(a^2\beta B + b^2\alpha A)}.$$

Ces équations donnent les valeurs de M, N et P, savoir :

$$2M = \frac{2a^2\alpha - A}{a^2}, \quad 2N = \frac{2b^2\beta - B}{b^2},$$

$$P2 = -2\left(\frac{\beta B}{b^2} + \frac{\alpha A}{a^2}\right).$$

Alors, l'équation du cercle est la suivante,

$$x^2 + y^2 + \left(2\alpha - \frac{A}{a^2}\right)x$$
$$+ \left(2\beta - \frac{B}{b^2}\right)y - 2\left(\frac{\alpha A}{a^2} + \frac{\beta B}{b^2}\right) = 0.$$

En y substituant les coordonnées du point diamétralement opposé à l'origine $x = -2\alpha$, $y = -2\beta$, on met immédiatement en évidence le théorème de Joachimstal.

Cette équation permet encore de vérifier le théorème de de M. Laguerre, à savoir que le cercle passe par le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la conique sur la tangente menée au point de Joachimstal.

A cet effet on ramène l'équation du cercle au centre de la conique et pour cela il suffit de poser $x = x' - \alpha$, $y = y' - \beta$, $X = X' - \alpha$, $Y = Y' - \beta$. Ce qui donne en faisant disparaître les accents

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y - Xx - \gamma y - \frac{\alpha b^2}{a^2}x - \frac{\beta a^2}{b^2}y$$
$$- \alpha X - \beta Y - \frac{\alpha^2 b^2}{a^2} - \frac{\beta^2 a^2}{b^2} = 0,$$

en remarquant qu'on a $C^2\alpha\beta = a^2\beta X - b^2\alpha\gamma$ on en tire $Y = \frac{a^2}{b^2}\frac{\beta}{\alpha} X - \frac{c^2}{b^2}$, β et en substituant l'équation du cercle devient $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y - \frac{Xa^2}{\alpha}\left(\frac{Xx}{a^2} + \frac{\beta y}{b}\right)$

$$- X\frac{a^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) + \frac{c^2\beta}{b^2}y + \frac{c^2\beta^2}{b^2} - \frac{\alpha x b^2}{a^2}$$
$$- \frac{\beta y a^2}{b^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{b^2} - \frac{\beta^2 a^2}{b^2} = 0.$$

Les coordonnées du pied de la perpendiculaire sont données par les équations

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = -a^2b^2;$$
$$b^2\alpha y - a^2\beta x = 0.$$

En posant $$d^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}}$$

$x = -\frac{d^2\alpha}{a^2}$ $y = -\frac{d^2\beta}{b^2}$: si on substitue on a :

$$d^2 - d^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) + \frac{Xa^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}\right)d^2$$

$$- \frac{Xa^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) - \left[\frac{c^2\beta^2}{b^4} - \frac{\alpha^2 b^2}{a^4} - \frac{\beta^2 a^2}{b^4}\right]$$

$$+ \left[\frac{c^2\beta^2}{a^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{b^2} - \frac{\beta^3 a^2}{c^2}\right] = 0$$: car les termes entre cro-

6

chets sont nuls et les termes entre parenthèses se détruisont.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Géométrie à deux dimensions.

— Étant donnés le pied de la directrice d'une parabole sur l'axe et un point de la courbe, trouver le lieu des sommets de toutes les paraboles ayant ces deux points communs; *à priori*, combien les données constituent-elles de conditions?

— Étant donnés une conique et un cercle tangents tous deux à l'axe des x à l'origine, on demande les sécantes communes à la conique et au cercle.

— Former l'équation du cercle qui passe par les pieds des trois normales qu'on peut généralement mener d'un point extérieur à la parabole.

— Par un point d'une hyperbole on mène deux droites parallèles à des directions fixes données; on joint les seconds points d'intersection de ces droites avec la courbe; et on demande le lieu des milieux des cordes ainsi obtenues, lorsque le premier point choisi sur l'hyperbole parcourt la courbe.

— Former l'équation générale des coniques ayant pour centre l'origine des axes et passant par deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $x' = a$, $y' = b$, $x'' = a\sqrt{-1}$ et $y'' = b\sqrt{-1}$.

— En un point M d'une parabole on mène une normale MA; par le sommet de la courbe, on mène à cette normale une parallèle sur laquelle on prend une longueur égale à la portion de la normale interceptée par la parabole. Trouver le lieu de l'extrémité de cette parallèle.

— On demande de chercher les foyers et les directrices de la courbe $xy^2 - x + 1 = 0$.

— Etant donnés une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et un cercle $x^2 + y^2 + 2dx + 2ey = 0$ qui passe par le centre de l'ellipse, on demande la relation qui doit exister entre a, b, d et e pour que l'une des cordes communes aux deux courbes soit vue du centre sous un angle droit.

— Former l'équation générale des coniques qui ont un foyer sur Ox et l'autre sur Oy, qui coupent l'axe Ox en A et l'axe Oy en B. — Lieu des sommets situés sur l'axe focal.

— Etant donnés une hyperbole équilatère et un cercle concentrique, trouver le lieu des milieux des cordes de l'hyperbole qui sont tangentes au cercle.

— Trouver la condition qui doit exister entre les coefficients de l'équation générale du 2e degré à 2 variables pour que la distance d'un foyer à la directrice correspondante soit égale à une longueur donnée δ.

— Lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée $y = mx$. dans la courbe $y = x^3$.

— On considère une ellipse et un point P mobile sur cette ellipse. Ayant joint le point P aux extrémités A et A' du grand axe, on abaisse du point A une perpendiculaire AH sur A'P, et du point A' une perpendiculaire A'H' sur AP; trouver le lieu du point M de rencontre de ces deux perpendiculaires quand le point P décrit l'ellipse. — Vérifier le résultat obtenu en supposant que l'ellipse devienne un cercle.

— On considère une série d'hyperboles, ayant les mêmes asymptotes; on demande le lieu des contacts des tangentes menées d'un point du plan à toutes ces hyperboles.

— Etant données deux coniques $f(x, y) = o$, $\varphi(x, y) = o$ et une courbe quelconque $F(x, y) = o$, on demande le lieu des points tels que leurs polaires par rapport aux deux coniques données concourent sur la courbe $F(x, y) = o$. — La courbe $F(x, y) = o$, étant elle-même une conique, on demande ce que devient le lieu trouvé.

— Etant données trois coniques $A = o$, $B = o$, $C = o$, on demande le lieu du point tel que ses polaires par rapport aux trois coniques soient concourantes. Le lieu du point de concours des trois polaires diffère-t-il du précédent? — Montrer que si les trois coniques données ont un point commun, le lieu cherché passe par ce point. — Quelles conséquences tire-t-on de ce fait?

— Soit un point P extérieur à une ellipse; trouver sur l'ellipse un point M tel qu'en joignant PM et prolongeant PM jusqu'à l'autre point de rencontre M' avec l'ellipse le rapport $\frac{PM}{PM'}$ soit égal à un rapport donné. — Quel est le lieu que décrit le point P quand on le suppose variable?

— On donne deux axes rectangulaires, et un point A sur l'axe Ox. — Trouver le lieu du foyer des coniques tangentes en A à Ox, tangentes à Oy en un point non donné, et dont une directrice passe à l'origine. Peut-on prévoir à priori que la deuxième condition donnée n'influera pas sur le lieu? — A priori, quel est ce lieu?

Géométrie analytique à trois dimensions.

— Etant donnée une droite fixe dans l'espace, trouver l'équation de la surface engendrée par un cercle dont le centre reste constamment sur la droite donnée, dont le plan tourne autour de cette droite, et dont la circonférence s'appuie sur les axes des x et des y.

— Equation générale des surfaces du second degré, qui contiennent l'axe des z, et une parallèle à l'axe des y.

— Dans le plan bissecteur du dièdre OZ, on donne un cercle ayant son centre à l'origine et de rayon connu. Ce cercle rencontre OZ en deux points A et A'; par le point A, on mène une parallèle à Ox, et par le point A' une parallèle à Oy. On demande la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer le cercle et les deux droites fixes. — Vérifier à priori le résultat obtenu. Chercher le second système de sections circulaires de la surface, et interpréter le résultat obtenu.

— Lieu des points équidistants de l'axe des Z et d'un plan quelconque $Ax + By + Cz + D = 0$.

— Etant donné un cube, on forme les équations des diagonales BA et BC, menées dans deux faces du solide à partir d'un même sommet. On demande de calculer la valeur de l'angle ABC de ces deux lignes.

— On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, par le plan $z = mx + ny + p$; par chaque point de la section on mène une tangente horizontale à l'ellipsoïde; trouver l'équation de la surface formée par l'ensemble de ces tangentes.

— Soient, en coordonnées rectangulaires

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d.$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 + a'x + b'y + c'z + d'.$$
$$\text{et } P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \quad P' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta'.$$

On demande de discuter l'équation $\frac{S}{S'} = \frac{P}{P'}$. Propriétés de la surface que la forme de l'équation met en évidence.

— Quelles sont les propriétés de la surface dont l'équation est

$$z = ax + by + c \pm \sqrt{x^2 + y^2}\,?$$

— Chercher si l'on peut placer des droites sur la surface

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 1.$$

Discuter la question.

— Equation du cylindre circonscrit à la surface $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ parallèlement à la droite $(x = 0,\ y + z = 0)$.

— On donne un ellipsoïde et un plan: trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et dont la section par le plan donné est une parabole. — Reconnaître par des raisonnements géométriques à priori la nature du lieu. Quel serait le lieu si l'on demandait que la section fût un cercle? — Chercher par des considérations géométriques, puis par le calcul, quel sera le lieu si l'on veut que la section soit une hyperbole équilatère.

— On donne deux points A et A' sur l'axe OZ, et une courbe $f(x, y) = 0$ dans le plan des xy; on demande l'équation de la surface engendrée par un cercle assujetti à passer constamment par les deux points A et A' et à toucher la courbe $f(x, y) = 0$. — Discuter suivant la nature de cette dernière courbe.

QUESTIONS PROPOSÉES

248. — Dans un quadrilatère ABCD, nous désignerons par a, b, c, e, d et d' les deux diagonales, ω leur angle; h_1 et h_2 les perpendiculaires abaissées des sommets sur la diagonale d; h_3 et h_4 les perpendiculaires abaissées sur la diagonale d'; démontrer les formules suivantes:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (d + d') \sin \omega.$$

$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h_4} = \frac{d'}{d}.$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{(h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{\sin \omega}.$$

$$h_1\, h_2\, h_3\, h_4 = \frac{a^2\, b^2\, c^2\, e^2}{d^2\, d'^2} \sin A \sin B \sin C \sin D$$

249. — Si, dans un triangle ABC, un angle C est double d'un autre angle A, la projection du côté BC sur la bissectrice intérieure de l'angle C est égale à la moitié du côté AB. *(Launoy.)*

250. — Si dans un triangle, la bissectrice intérieure d'un angle est égale à l'un des côtés de l'angle, la projection de l'autre côté sur cette bissectrice est égale à la demi-somme des côtés de l'angle. *(Launoy.)*

251. — On donne un carré ABCD et un cercle ayant pour centre le sommet A de ce carré, et pour rayon le côté du carré; à ce cercle, on mène une tangente quelconque PQ, qui rencontre les côtés BC, CD du carré aux points P Q. Trouver le lieu géométrique décrit par le centre du cercle circonscrit au triangle APQ. *(de Longchamps.)*

252. — ABCD est un quadrilatère; M et N sont les milieux des diagonales AHC, BHD qui se coupent en H. Les cercles AHB, CHD se coupent en P; les cercles HBC, HDA se coupent en Q. Démontrer que les cinq points M, N, H, P, Q sont sur un même cercle. *(The Educational Times.)*

Mathématiques spéciales.

253. — Etant donnés dans un plan un parallélogramme et une droite, on demande de construire, avec la règle et le compas, les points où la droite rencontre une ellipse inscrite au parallélogramme et touchant ses quatre côtés en leurs milieux. *(Concours général 1813.)*

254. — Si l'on désigne par S_n la somme

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n},$$

démontrer les identités suivantes :

1° $$nS_n = n + \left[\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \dots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right]$$

2° $$S_{2p} = \frac{3}{2p} + 2p\left[\frac{1}{1\,(2p-1)} + \frac{1}{2\,(2p-2)} + \dots + \frac{1}{(p-1)\,(p+1)}\right]$$

3° $$S_{2p} = (2p+1)\left[\frac{1}{1\,.\,2p} + \frac{1}{2\,(2p-1)} + \frac{1}{3\,(2p-2)} + \dots + \frac{1}{p\,(p+1)}\right]$$

4° $$S_{2p} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{2p - C_2^2} + \frac{1}{3p - C^{32}} + \dots + \frac{1}{p^2 - C_p^2}\right]$$

5° $$S^n = \frac{n+1}{2} + \left[\frac{2}{n(n-1)(n-2} + \dots + \frac{n-2}{2\,.\,3}\right]$$

6° $$(n-1)\,S_n = (n+1,\left[\frac{n-1}{1\,.\,n} + \frac{n-2}{2(n-1)} + \frac{n-3}{3(n-2)} + \dots + \frac{1}{(n-12}\right]$$

7° $$S_n = n - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{n}\right]$$

8° $$S_n = 1 + \frac{n+2}{n-2}\left[\frac{1}{2\,.\,n} + \frac{1}{3(n-1)} + \dots + \frac{1}{(n-1).3}\right]$$

9° $$2S_n = n + 1 - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-2}{n}\right]$$

10° $$S_n - S_p = \frac{n+p+1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{n(p+1)} + \frac{n-p-1}{(p+2)(n-1} + \dots + \frac{1}{n(p+1)}\right]$$

(de Longchamps.)

255. — Trouver la surface engendrée par une droite s'appuyant constamment sur l'axe OZ, sur la droite $x = 1$, $z = 1$, et sur le cercle $z = 0$, $x^2 = y^2 = R^2$. Étudier les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux plans de coordonnées, et particulièrement par le plan $z = h$: les sections obtenues dans ce dernier cas sont des conchoïdes de Nicomède. On propose de le démontrer géométriquement.

(de Longchamps.)

256. — On donne une ellipse dont les axes sont OA et OB ; la tangente en un point M de la courbe rencontre les axes en C et D ; on construit le rectangle OCPD, et on joint le sommet P au point M. Démontrer que si du centre on abaisse une perpendiculaire sur PM, cette perpendiculaire rencontre la normale en M en un point I, qui est le centre du cercle osculateur de l'ellipse au point M.

(de Longchamps.)

257. — Démontrer le théorème suivant, dû à M. Mannheim : A partir du point a où la normale en m rencontre l'un des axes, nous menons une perpendiculaire à cette normale; cette droite rencontre le diamètre qui passe en m en un point d; nous abaissons de ce point d une perpendiculaire sur l'axe dont nous avons considéré le point de rencontre avec la normale; cette perpendiculaire rencontre la normale au centre du cercle osculateur à la courbe en m.

(Cours de géométrie de l'Ecole Polytechnique.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 11174-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 241 et suiv.)

V

PROPRIÉTÉS DES TANGENTES

XLIII. **Théorème.** — *La tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur et avec la parallèle à l'axe menée par le point de contact.*

Soit *(fig. 19)* M un point d'une parabole définie par son foyer F et sa directrice D, MC la tangente en M ; on démontrerait, comme pour l'ellipse, que le quadrilatère MFCP est inscriptible dans un cercle et que par suite les angles CMF et CMP sont égaux.

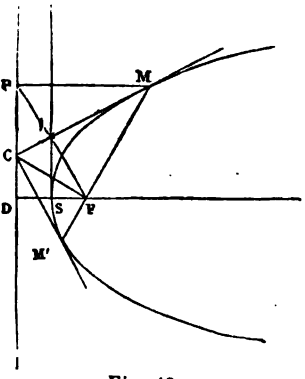


Fig. 19.

Remarque I. — *Le lieu des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.* En effet, le triangle PMF est isoscèle, MI est bissectrice de l'angle PMF, donc le point I est le milieu de PF et appartient à la tangente au sommet.

Remarque II. — *Le lieu du point symétrique du foyer par rapport aux tangentes est la directrice ;* en effet IP = IF.

Remarque III. — *La tangente est bissectrice de l'angle que fait la directrice avec la droite qui joint le foyer au point où cette tangente rencontre la directrice.* En effet, il est facile de voir que les angles FCM et PCM sont égaux.

Il est inutile de rappeler ici les différentes constructions de la tangente à la parabole; on les trouvera dans tous les ouvrages de géométrie élémentaire.

XLIV. **Théorème.** — *La polaire d'un point de la directrice par rapport à une parabole passe par le foyer.*

En effet, la ligne CF *(fig. 19)* est perpendiculaire à la fois sur les rayons vecteurs FM et FM′; donc ces deux lignes ne peuvent en faire qu'une M′FM qui est la polaire du point C.

Remarque. — *Les tangentes issues d'un point de la directrice sont rectangulaires.* En effet CM et CM′ sont les bissectrices de deux angles supplémentaires. (XLIII, Remarque III.)

XLV. **Théorème.** — *La droite qui joint le foyer au point de rencontre de deux tangentes est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact.*

MA et MB *(fig. 20)* sont deux tangentes à la parabole qui,

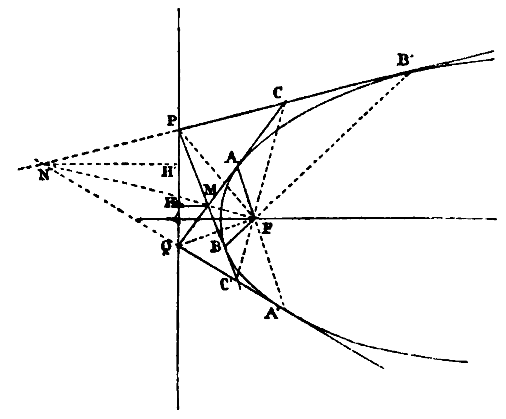


Fig. 20.

prolongées, rencontrent la directrice en Q et en P. Si l'on joint P et F, Q et F, on a le triangle PFQ dans lequel les lignes PM et QM sont bissectrices des angles FPQ et FQP (XLIII, Remarque III); le point M est alors le centre du cercle inscrit au triangle PQF et la ligne FM est bissectrice de l'angle PFQ; d'où résulte l'égalité des angles PFM et QFM.

Les triangles rectangles PFB et QFA montrent que les angles PFM et QFM sont complémentaires des angles MFB et MFA et de l'égalité des deux premiers résulte évidemment l'égalité des deux derniers.

XLVI. **Théorème.** — *Le lieu du point de concours de deux tangentes faisant entre elles un angle constant est une hyperbole qui a même foyer et même directrice que la parabole.*

Le point M (*fig.* 20) est, comme on vient de le voir, le centre du cercle inscrit au triangle PFQ; la distance du point M au côté PQ est son rayon; cette distance MH est aussi celle du point M au côté PF, de sorte que la surface du triangle PFM a pour expression

$$\frac{PF \times MH}{2}.$$

De ce que FM est bissectrice de l'angle PFQ, cette surface a encore pour expression

$$\frac{1}{2} MF \times FP \sin \frac{PFQ}{2}.$$

Égalant ces deux expressions et divisant les deux termes par $\frac{1}{2}$ PF, on trouve

$$MH = MF \sin \frac{PFQ}{2}$$

ou

$$\frac{MH}{MF} = \sin \frac{PFQ}{2}$$

Or, il est facile de voir sur la figure que dans le triangle PFQ on a

$$PFQ = \pi - 2(QPM + PQM) = \pi - 2(\pi - PMQ) = 2PMQ - \pi,$$

et si l'on désigne l'angle constant PMQ par α, on a

$$PFQ = 2\alpha - \pi$$

et

$$\sin \frac{PFQ}{2} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), = -\cos \alpha,$$

donc le rapport $\frac{MH}{MF}$ est constant et égal à $-\cos \alpha$; ce rapport étant inférieur à 1, le lieu cherché est une hyperbole.

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, MH $= 0$ et le point M décrit la directrice :

donc, *le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une parabole est la directrice.*

XLVII. **Théorème.** — *La droite qui joint le foyer au point de concours de deux tangentes est moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs des points de contact.*

Soit (*fig. 20*) AFA′ la polaire du point Q; les deux droites FM et FC′ bissectrices des angles supplémentaires AFB et BFA′ sont rectangulaires; alors le quadrilatère QMFC′ est inscriptible dans un cercle et les angles FMC′ et FQC′ sont égaux; mais dans le triangle rectangle AQA′, la hauteur est QF et les angles FQC′ et A′AQ sont égaux comme ayant même complément QA′A; on peut donc écrire la suite des égalités $\quad FMC' = FQC' = QAF.$

Les deux triangles MFB et MFA sont semblables, ayant deux angles égaux chacun à chacun (FM est bissectrice de l'angle AFB); d'où la proportion

$$\frac{MF}{FB} = \frac{FA}{MF},$$

qui donne $\quad \overline{MF}^2 = FA \times FB.$

Corollaire. — Si l'une des tangentes est la tangente au sommet, l'un des rayons vecteurs, FB par exemple, devient $\frac{p}{2}$, MF est la distance du foyer à la tangente au point A; on a alors $\quad \overline{MF}^2 = \frac{p}{2} \times FA$

c'est-à-dire que *la distance du foyer à une tangente est moyenne proportionnelle entre le demi-paramètre et le rayon vecteur du point de contact.*

Remarque I. — Soit BFB′ la corde focale, polaire du point P, *c* le point de rencontre de PB′ et de QA; les lignes MF et FC sont rectangulaires et les trois points C, F, C′ sont en ligne droite. Si l'on prolonge les tangentes PB et QA′ jusqu'à leur rencontre en N, les trois points N, M, F sont également en ligne droite; car FN, bissectrice de l'angle A′FB′ (XLV), l'est aussi de l'angle AFB, puisque les angles AFB′ et A′FB sont égaux; donc les lignes FN et FM sont confondues.

REMARQUE II. — D'après la détermination du point N, l'angle PNQ est supplémentaire de PMQ; si ce dernier est constant et égal à α, l'autre sera également constant et égal à $\pi - \alpha$. Soit NH' la distance du point N à la directrice de la parabole; on a, d'après le théorème XLVI,

$$\frac{NH'}{NF} = \cos \alpha.$$

Donc si le point M décrit une hyperbole, le point N en décrira une également; mais si l'on se reporte à l'équation (I) qui a servi à déterminer l'hyperbole d'une manière générale, on verra que cette détermination est indépendante du signe du rapport désigné par $\frac{m}{n}$ et qui est ici $-\cos \alpha$ ou $\cos \alpha$ selon que l'on considère le point M ou le point N. Ces deux points doivent donc appartenir à la même courbe; le point M considéré seul ne décrit qu'une branche d'hyperbole, le point N décrit l'autre.

Ces deux points sont tels que

$$\frac{MH}{MF} + \frac{NH'}{NF} = 0.$$

XLVIII. **Théorème**. — *Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer.*

Soient *(fig. 21)*, MA, MB deux tangentes coupées en D et D' par une troisième dont le point de contact est I; on sait (XLVII) que les deux angles IDF et DAF sont égaux; pour la même raison, les angles MAF et BMF ou D'MF sont égaux; donc les angles D'MF et D'DF, tous deux égaux à MAF, sont égaux entre eux et le quadrilatère MDFD' est inscriptible dans un cercle, ce qu'il fallait démontrer.

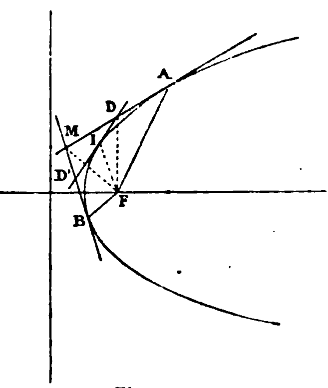


Fig. 21.

Corollaire I. — *Si d'un point de la circonférence d'un circonscrit à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les*

trois côtés, les trois points obtenus sont en ligne droite. — En effet, le point considéré peut être pris pour foyer d'une parabole tangente aux trois côtés du triangle et les trois perpendiculaires appartiennent à la tangente au sommet de cette parabole (XLII, Remarque I).

Corollaire II. — *Une parabole est déterminée par quatre tangentes.* — En effet, deux de ces droites et l'une des deux autres déterminent un triangle auquel on peut circonscrire un cercle; les deux premières et la quatrième déterminent un second cercle qui coupe le premier en deux points; l'un de ces points est le sommet commun aux deux triangles; l'autre est le foyer d'une parabole tangente aux quatre droites, ces quatre droites considérées trois à trois donnent quatre cercles pareils, qui ont un point commun; de ce point, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre tangentes; les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite. Cette droite rencontrant les quatre premières peut donner naissance à six nouveaux triangles et par suite à six nouveaux cercles indépendants des quatre premiers; ces six cercles passent également par le point considéré.

XLIX. **Théorème.** — *L'angle sous lequel est vue du foyer une tangente mobile limitée à deux tangentes fixes est constant et égal au supplément de l'angle des tangentes fixes.*

On vient de voir (*fig. 21* et théor. XLVIII) que le quadrilatère MDFD′ est inscriptible; donc l'angle DFD′ est supplémentaire de l'angle AMB. Si donc on donne l'angle fixe AMB et si autour du point F on fait tourner un angle égal au supplément de AMB, les points d'intersection D et D′ détermineront à chaque instant une droite DD′ tangente à une parabole de foyer F et tangente également aux côtés de l'angle AMB.

Remarque. — DF étant bissectrice de l'angle IFA, on a

$$\text{IFD} = \frac{\text{IFA}}{2}$$

pour la même raison $\text{IFD} = \frac{\text{IFB}}{2}$

et en additionnant membre à membre

$$\text{IFD} + \text{IFD}' \text{ ou } \text{DFD}' = \frac{\text{AFB}}{2}.$$

Or, on vient de voir que DFD′ est supplémentaire de l'angle AMB, par conséquent

$$\pi - \text{AMB} = \frac{\text{AFB}}{2}.$$

Donc, *l'angle de deux tangentes qui ne contient pas la courbe est la moitié de l'angle sous lequel on voit du foyer la corde des contacts.*

L. **Problème.** — *Déterminer le foyer d'une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.*

Soient *(fig. 22)* MA et MB les deux tangentes données, A et B les points de contact et F le foyer cherché; on sait: 1° que FM est bissectrice de l'angle AFB (théor. IX); 2° que l'angle AFB est égal à deux fois l'angle A′MB (XIII, Rem.); d'où la construction suivante. Sur AB, on décrira un segment capable de l'angle double A′MB; cette construction déterminera le milieu C de l'arc AB; en joignant le point C au point D on aura une droite qui coupera le segment au foyer cherché, car les deux angles BFC et AFC ayant même mesure sont égaux.

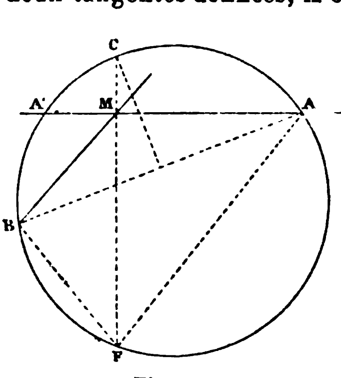


Fig. 22.

Le problème n'admet qu'une solution.

LI. **Problème.** — *Déterminer le foyer d'une parabole, connaissant trois tangentes et le point de contact de l'une d'elles.*

Soient *(fig. 23)* MD, MD′, DD′ les tangentes données, I le point de contact de DD′, F le foyer cherché; A étant le point de contact de MD, on a vu (XLVII) que les angles DAF et IDF sont égaux; or sur le cercle circonscrit au triangle DMD′, l'angle DAF a pour mesure

$$\frac{\text{arc MF} - \text{arc DA}'}{2},$$

l'angle IDF $\frac{\text{arc D'F}}{2} = \frac{\text{arc MF} - \text{arc MD}'}{2}$;

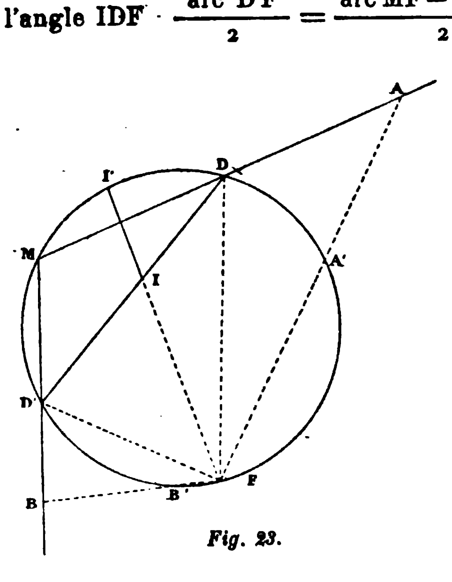


Fig. 23.

ces deux angles étant égaux, il en est de même des arcs MD' et DA'; de plus, FD étant bissectrice de l'angle IFA, les arcs DA' et DI' sont égaux, donc il en est de même des arcs MD' et DI'. On démontrerait également que B étant le point de contact de MB', les arcs DM et D'B' sont égaux et par suite D'I' et MD; d'où la construction suivante : après avoir construit le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes, on porte, à partir d'un sommet pris sur la tangente dont le contact est connu et sur le plus petit des arcs sous-tendus par l'autre tangente issue de ce sommet, un arc égal au plus petit des arcs sous-tendus par la troisième tangente; la droite qui joint le point obtenu au point de contact donné rencontre le cercle au foyer cherché.

Le problème n'admet qu'une solution.

Dans le cas où le point de contact donné se trouve sur le prolongement d'un des côtés du triangle formé par les tangentes, en A, par exemple, on prend à partir du sommet D un arc DA' égal à MD' sur le plus grand des arcs sous-tendus par la corde MD; la ligne AA' donne également le foyer F. Le point A' peut ainsi être le foyer d'une parabole tangente aux trois droites données; dans ce cas, le problème admet deux solutions.

Remarque. — Étant donnés trois tangentes et le foyer d'une parabole, il est facile de déterminer les points de contact; il suffit, d'après ce qui précède, de prendre à partir de D et D', de part et d'autre de ces points, des arcs respectivement égaux à MD' et à MD, sur la circonférence circonscrite au triangle des tangentes et de joindre les points obtenus au foyer. Les trois droites ainsi construites rencontrent les tangentes aux points de contact.

Corollaire I. — Si le triangle MDD' est isoscèle, les côtés MD et MD' étant les côtés égaux, le point I' coïncide avec le point M; alors on en conclut la propriété suivante : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle isoscèle, la droite menée par le sommet de ce triangle et par le point de contact de sa base passera constamment par le foyer de la courbe.* (Steiner, *Annales de Gergonne.*)

Corollaire II. — De ce corollaire, on déduit le suivant : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites qui joignent les points de contact des côtés du triangle avec les sommets respectivement opposés concourent toutes trois au foyer de la courbe,* et par conséquent : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites menées par les sommets et par les points de contact des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point, et le lieu de ce point est la circonférence du cercle circonscrit.* (Id., id.) *(A suivre.)*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir page 246 et suiv.)

III

RELATIONS DONNÉES PAR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE QUELCONQUE.

Dans un triangle quelconque ABC, nous appellerons :
R le rayon du cercle inscrit;
h_a, h_b, h_c les hauteurs correspondant respectivement aux côtés a, b, c;

h'_a, h'_b, h'_c, les portions des hauteurs comprises entre les sommets et le point de concours.

h''_a, h''_b, h''_c, les autres portions des hauteurs;

En appelant A', B', C' les pieds des hauteurs, posons:

$BA' = p_a$; $CB' = p_b$; $AC' = p_c$;

$CA' = q_a$; $AB' = q_b$; $BC' = q_c$.

Enfin appelons α, β, γ les angles du triangle A'B'C'; et a_1, b_1, c_1 ses côtés, S_1 sa surface, R_1 son rayon.

Cela posé, on a les relations suivantes:

16. — La similitude des triangles rectangles nous donne

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C}{A'C}$$

d'où l'on tire $$\frac{a}{b} = \frac{p_b}{q_a}$$

On a de même $$\frac{a}{c} = \frac{q_c}{p_a}.$$

17. — Les quatre points A, C', A' C étant sur une même circonférence, on a

$$AH \cdot A'H = HC \cdot HC',$$

ou bien $$h'_a\, h''_a = h'_c\, h''_c\,.$$

On aurait de même $$h'_a\, h''_a = h'_b\, h''_b\,.$$

18. — Les points H, B', C, A' étant sur une même circonférence on déduit $a \cdot p_a = h_b \cdot h'_b$.

On a de même $a \cdot q_a = h_c \cdot h'_c$.

On a les quatre formules analogues pour les autres côtés.

19. — Les triangles rectangles A'HB, ACA' ont leurs côtés perpendiculaires par suite ; on a

$$\frac{BA'}{AA'} = \frac{HA'}{CA'},$$

ou bien $$p_a\, q_a = h_a\, h''_a\,.$$

On a de même $$p_b\, q_b = h_b\, h''_b.$$

$$p_c\, p_c = h_c\, h''_c.$$

20. — On sait que l'on a

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2AB \cdot AC'.$$

Or, on a $c \cdot p_c = h_a\, h_a$.

Donc, on aura $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2h_a\, h'_a$.

On mettra le signe + ou le signe —, suivant qu'il s'agira d'un angle obtus ou d'un angle aigu. On peut, du reste, mettre toujours le signe —, et considérer le produit comme positif, si les distances AH, AA' sont comptées dans le même sens, et comme négatif dans le cas contraire.

On a donc, dans ce cas,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2h_a h'_a,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2h_b h_b,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2h_c h'_c.$$

Ajoutons membre à membre, il vient, après réduction,

$$h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

21. — Si l'on considère le triangle AHC formé par les segments h'_a, h'_c, le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est R; on a donc $h'_a \, . \, h'_c = 2h''_b \, . \, R$;
en prenant les autres triangles analogues au triangle AHC, et multipliant membre à membre les égalités ainsi obtenues, on a $(h'_a h'_b h'_c)^2 = 8R^3 h''_a h''_b h''_c.$

Si on ajoute ces égalités au lieu de les multiplier, on trouve $h'_a h'_b + h'_b h'_c + h'_c h'_a = 2R(h''_a + h''_b + h''_c)$.

22. — On a les relations

$$2S = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{a + b + c}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}.$$

Puis on a aussi

$$2S = \frac{h_a}{\frac{1}{a}} = \frac{h_b}{\frac{1}{b}} = \frac{h_c}{\frac{1}{c}} = \frac{h_a + h_b + h_c}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

En égalant ces valeurs, on a

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$
$$= \left(h_a + h_b + h_c\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

23. — Appelons K le point où AA' rencontre C'B'. Comme B'H est bissectrice de l'angle en B', on a

$$\frac{A'H}{HK} = \frac{A'B'}{B'K}.$$

De même, la droite C′A étant bissectrice extérieure de l'angle en C′, on a $\frac{A'A}{AK} = \frac{A'C'}{C'K}$.

Multiplions membre à membre, en remarquant que le quadrilatère C′HB′A est inscriptible ; il vient

$$h_a h'_a = b_1 c_1$$

de même

$$h_b h'_b = c_1 a_1;$$

$$h_c h'_c = a_1 b_1.$$

24. — Les deux triangles AHC, CB′C sont semblables comme ayant les angles égaux, puisque l'angle C est commun et que, les quatre points A, C′, H, B′ étant sur une même circonférence, l'angle en C′ est égal à l'angle en A.

Donc $AH . CC' = AC . C'B;$

ou bien $h'_a . h_c = a_1 b.$

D'autre part, on a $ab = 2Rh_c.$

Multiplions membre à membre, il vient

$$ah'_a = 2Ra_1;$$

on aura de même

$$bh'_b = 2Rb_1,$$

$$ch'_c = 2Rc_1.$$

Multiplions membre à membre, il vient

$$a_1 b_1 c_1 = \frac{abc \, . \, h'_a h'_b h'_c}{8R^3} = \frac{abch'_a h'_b h'_c}{h_a \, . \, h_b \, . \, h_c}$$

Mais, en vertu des égalités déjà établies

$$ap_a = h_b h'_b \; ; \; bp_b = h_c h'_c \; ; \; cp_c = h_a h'_a \; ,$$

on a

$$\frac{a \; b \; c}{h'_a \, h'_b \, h'_c} = \frac{h_a \, h_b \, h_c}{p_a \, p_b \, p_c}.$$

On a donc, d'après des égalités précédentes

$$a_1 \, b_1 \, c_1 = \frac{h_a \, h'_a \, h_b \, h'_b \, h_c \, h'_c}{p_a \, p_b \, p_c} = q_a \, q_b \, q_c \, .$$

On en tirerait de même

$$a_1 \, b_1 \, c_1 = p_a \, p_b \, p_c \, .$$

Enfin, en multipliant membre à membre

$$(a_1 \, b_1 \, c_1)^2 = h_a \, h_b \, h_c \, h'_a \, h'_b \, h'_c \, .$$

CONCOURS ACADÉMIQUES DE 1880

ACADÉMIE D'AIX

— Vérifier l'égalité

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

— On donne un triangle ABC, et on propose de lui circonscrire un triangle A'B'C' semblable à un triangle donné. La problème a une infinité de solutions. On demande : 1° de construire une de ces solutions; 2° de construire le triangle A'B'C' dont la surface est la plus grande possible; on examinera le cas particulier où le triangle A'B'C' est semblable au triangle ABC, les côtés homologues étant désignés par les mêmes lettres accentuées.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

— Étant donnés deux cercles, trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de l'un quelconque des points aux deux cercles soient dans un rapport donné. En s'appuyant sur ce qui précède, résoudre la question suivante : Étant données trois sphères, trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de l'un quelconque de ces points aux trois sphères soient proportionnelles à des longueurs données.

ACADÉMIE DE BORDEAUX

— On considère un ellipsoïde de révolution et les droites Δ qui coupent cet ellipsoïde en deux points tels que les plans tangents menés en ces points soient rectangulaires. On demande de trouver le cône qui contient les droites Δ qui passent par un point M. Discussion du lieu lorsque le point M occupe toutes les positions possibles.

ACADÉMIE DE POITIERS

Mathématiques élémentaires.

— On fait tourner autour de leurs bases les faces latérales SAB, SBC, SCA d'une pyramide régulière triangulaire de manière à les amener en C'AB, A'BC, B'CA et alors chacun de ces triangles forme avec la projection sur le plan ABC un même angle $\varphi > \alpha$ angle dièdre à la base de la pyramide. On représente par $2a$ le côté AB, par l la hauteur du triangle isoscèle SAB, c'est-à-dire l'apothème de la pyramide et on demande d'exprimer au moyen de φ, l, a le volume limité par les triangles équilatéraux ABC, A'B'C' et les triangles isoscèles C'AB, A'BC; B'CA, CA'B, AB'C' BC'A'.

— Pour quelle valeur de φ compris entre α et 2π le volume est-il maximum?

— Dessiner la projection sur le plan ABC du polyèdre maximum dans le cas particulier où la pyramide est un tétraèdre régulier.

ACADÉMIE DE RENNES

Mathématiques élémentaires.

— Déterminer deux points AA', connaissant leur distance $2c$, le produit b^2 de leurs distances à une droite donnée ox, celui b'^2 de leurs distances à une seconde droite également donnée ox' perpendiculaire à la première, enfin celui K^2 de leurs distances au point o où se croisent ces deux droites. — La question admet-elle toujours des solutions?

On considère en outre les plus courts chemins par lesquels on puisse aller de A en A' en passant soit par ox, soit par ox', et on demande d'en déterminer les longueurs.

Si K^2 varie, comment se déplacera le milieu de AA', et comment varieront les longueurs des plus courts chemins?

Pour chaque valeur de K^2, ou, ce qui est la même chose, pour chaque système de position des points AA', on peut construire deux ellipses admettant l'une et l'autre ces points pour foyers et touchant l'une la droite ox, l'autre la droite ox'; voir ce que ces ellipses présentent de particulier.

COMPOSITION POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE

Géométrie.

Exposer brièvement la suite des théorèmes qui conduisent à la mesure du volume d'un parallélépipède quelconque.

Faire ressortir l'enchaînement de ces propositions.

Insister sur ce qu'on entend par la mesure d'un volume.

Comme application, calculer le poids d'un parallélépipède rectangle dont la hauteur $= 1^m352$, dont la base $= 2^{mq}35622$ et dont le poids d'un décimètre cube $= 0$ kil. 661.

Statique.

Soit un triangle équilatéral pesant ABC dont le côté est a et qui n'est susceptible de se mouvoir que dans un plan vertical.

Au milieu M du côté AB on attache un fil de longueur $OM = l$ dont l'autre extrémité est fixée en un point O du mur vertical VV'.

La tension du fil donne lieu à une force T appliquée au triangle dans la direction MO. Le sommet A s'appuie sans frottement sur le mur vertical VV', c'est-à-dire que la réaction du mur donne lieu à une force normale N appliquée au sommet A.

On demande de trouver les positions d'équilibre du triangle ABC

Tracé graphique.

Étant donnés un point a, a' et une droite (BB'), dont les positions sont déterminées comme il suit :

$$aa = 0,020$$
$$aa = 0,050$$
$$ap = 0,0035$$
$$aq = 0,0155$$
$$P = 56°,30'$$
$$Q = 60°$$

1° Mener par le point a, a' une droite XX' perpendiculaire à la droite (BB') et faisant avec la ligne de terre un angle $\varphi = 40°$.

2° Construire la plus courte distance de la droite (BB') et de la droite (XX').

3° Construire sur cette plus courte distance et sur les deux droites (BB'), (XX') un parallélépipède rectangle dont les côtés pris respectivement le long de (BB') et de XX' ont pour longueur 0,030 et 0,035.

REMARQUE. — Le problème admet plusieurs solutions. On choisira celle des droites XX' qui est la moins inclinée sur le plan horizontal, et pour parallélépipède celui qui est le plus en haut et à gauche.

Arithmétique.

Calculer le volume qu'occupent 565 francs en pièces d'argent de 2 francs et de 1 franc, sachant que la densité de l'argent est 10,47 et celle du cuivre 8,95.

Algèbre.

Elle donne une équation du second degré :

$$y^2 + (1 - e^2)\, x^2 = a^2 (1 - e^2)$$

dans laquelle a et e sont des constantes, e étant $<$ 1 — et les deux relations :

$$x = ae + r \cos V$$
$$y = r \sin V$$

dans lesquelles r et V sont deux nouvelles variables.

On demande d'exprimer le plus simplement possible r en fonction de V et de déterminer les valeurs de V pour lesquelles r atteint des valeurs maximum et minimum.

Calcul numérique de trigonométrie.

On connaît dans un triangle B, c, a; calculer les autres éléments du triangle, c'est-à-dire A, C, B et la surface.

$$B = 39°,47',56''$$
$$a = 857,649$$
$$c = 703,625$$

QUESTION 170.

Solution par M. PASQUIER, Institut Léopold, à Bruxelles.

Déterminer le rayon de la sphère à laquelle appartient une calotte sphérique de surface constante, de manière que le volume du segment à une base limitée par cette calotte soit maximum.

Si c est la corde d'une calotte, on sait que celle-ci a pour surface πc^2, donc c est constant quelle que soit la sphère sur laquelle elle est tracée.

Le segment sphérique, limité par cette calotte, doit être maximum. Soit x le rayon de la sphère sur laquelle il faut la prendre et y la hauteur du segment; nous aurons

$$\pi y^2 \left(x - \frac{y}{3}\right) = \text{maximum}.$$

Or $$2xy = c^2,$$

donc $$y = \frac{c^2}{2x}.$$

par suite $$\frac{\pi c^4}{24} \left(\frac{6x^2 - c^2}{x^3}\right) = \text{maximum}.$$

d'où $$x = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

ou $$c = x\sqrt{2}.$$

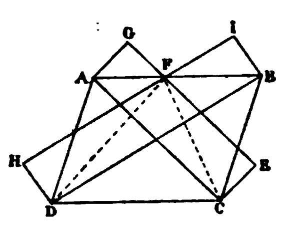
Ce qui nous montre que la corde est celle d'un quadrant et que dès lors la zone embrasse la demi-sphère sur laquelle elle est tracée.

QUESTION 174.

Solution par M. CRONEAU, élève du Lycée de Versailles.

Étant donné un parallélogramme, on construit sur les diagonales des rectangles tels que les côtés opposés aux diagonales se coupent sur l'un des côtés du parallélogramme. Démontrer que la somme

des deux rectangles est équivalente au parallélogramme.



Soient ACEB, BDHI deux rectangles construits sur les diagonales du parallélogramme ABCD tels que les côtés GE, HI opposés aux diagonales se coupent en F sur le côté AB du parallélogramme. Je joins FC, FD

$$AGEC = 2AFC, \quad BDHI = 2BFD = 2BCF$$

d'où $AGEC + BDHI = 2AFC + 2BCF = 2ABC = ABCD.$

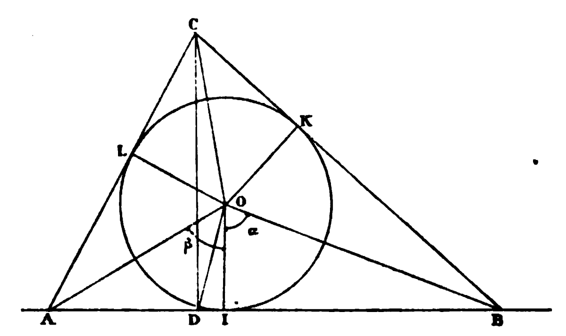
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Marin, d'Agen; Paquier, de Bruxelles; Longueville, de Charleville; Deslais, au Mans; Dubief, de Cluny Sers, à Cherbourg; Bucheron, à Sainte-Barbe; Long, à Vendôme.

QUESTION 175

Solution par M. Chavanon, élève du Lycée de Lyon.

On donne un cercle et une tangente fixe à ce cercle, en un point I. *Sur cette tangente on prend deux points mobiles* A *et* B *tels que le produit* AI × BI *soit constant. Par les points* A *et* B *on mène des tangentes qui se coupent en* C *dont on demande le lieu géométrique.*

Soit r le rayon du cercle donné O, C un point du lieu. Abaissons de ce point la perpendiculaire CD sur la tangente.



Menons les rayons OI, OK, OL et proposons-nous de calculer CD, AC, BC.

Posons AI $= m$, BI $= n$, on aura d'abord :

$$mn = K^2$$

Joignons BO, CO, AO et soit BOI $=$ BOK $= \alpha$ et AOI $=$ AOL $= \beta$. Dès lors KOC $= 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Les triangles rectangles BIO, AOI donnent respectivement

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{r}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{m}{r}$$

donc
$$\operatorname{tg} \text{KOC} = \frac{\frac{m+n}{r}}{\frac{mn}{r^2} - 1} = \frac{(m+n)\, r}{mn - r^2}$$

Le triangle rectangle CKO donne alors :

$$\text{KC} = r^2 \frac{m+n}{mn - r^2}$$

Par conséquent

$$\text{BC} = n + r^2 \frac{m+n}{mn - r^2}$$

$$\text{AC} = m + r^2 \frac{m+n}{mn - r^2}$$

Dès lors comme

$$\frac{1}{2} \text{AB} \,.\, \text{CD} = r \frac{\text{AB} + \text{BC} + \text{CA}}{2}$$

ou $(m+n)\ \text{CD} = r\left[(m+n) + (m+n) + \dfrac{2r^2\,(m+n)}{K^2 - r^2}\right]$.

On en déduit

$$\text{CD} = 2r\left[1 + \frac{r^2}{K^2 - r^2}\right] = \text{constante.}$$

Donc le lieu est une parallèle à la tangente menée à une distance de celle-ci égale à

$$2r\left[1 + \frac{r^2}{K^2 - r^2}\right] = 2r \frac{K^2}{K^2 - r^2}$$

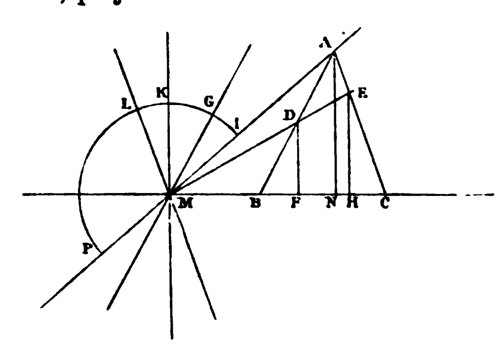
NOTA. — La même question a été résolue par M. Dupuy, de Grenoble.

QUESTION 176

Solution par M. H. SERS, sergent d'infanterie de marine (Cherbourg).

Par un point pris sur le prolongement d'un côté d'un triangle, mener une droite qui coupe les deux autres côtés et qui soit telle que la projection sur le premier de la partie interceptée entre les deux autres côtés soit égale à une longueur donnée.

Supposons le problème résolu; soit ABC le triangle, M le point donné sur le prolongement de BC et FH $= a$ la longueur donnée, projection de DE sur BC.



Abaissons les perpendiculaires DF, AN, EH et soit MF $= x$. La connaissance de MF donne la solution du problème, car si en F on élève la perpendiculaire sur BC, son intersection avec AB donne un second point de la droite ME.

A cause des triangles semblables on a

$$\frac{x+a}{x} = \frac{\text{EH}}{\text{DF}},$$

$$\frac{\text{EH}}{\text{AN}} = \frac{\text{CH}}{\text{CN}} = \frac{\text{MB} + \text{BC} - a - x}{\text{CN}},$$

$$\frac{\text{DF}}{\text{AN}} = \frac{\text{MF} - \text{BM}}{\text{BC} - \text{CN}} = \frac{x - \text{MB}}{\text{BC} - \text{CN}};$$

de là on tire

$$\frac{\text{EH}}{\text{DF}} = \frac{(\text{MB} + \text{BC} - a - x)(\text{BC} - \text{CN})}{\text{CN}(x - \text{MB})} = \frac{x+a}{x}$$

$$\frac{\text{arc MF} - \text{arc DA}'}{2},$$

l'angle IDF $\frac{\text{arc D'F}}{2} = \frac{\text{arc MF} - \text{arc MD}'}{2}$;

Fig. 23.

ces deux angles étant égaux, il en est de même des arcs MD' et DA'; de plus, FD étant bissectrice de l'angle IFA, les arcs DA' et DI' sont égaux, donc il en est de même des arcs MD' et DI'. On démontrerait également que B étant le point de contact de MB', les arcs DM et D'B' sont égaux et par suite D'I' et MD; d'où la construction suivante : après avoir construit le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes, on porte, à partir d'un sommet pris sur la tangente dont le contact est connu et sur le plus petit des arcs sous-tendus par l'autre tangente issue de ce sommet, un arc égal au plus petit des arcs sous-tendus par la troisième tangente; la droite qui joint le point obtenu au point de contact donné rencontre le cercle au foyer cherché.

Le problème n'admet qu'une solution.

Dans le cas où le point de contact donné se trouve sur le prolongement d'un des côtés du triangle formé par les tangentes, en A, par exemple, on prend à partir du sommet D un arc DA' égal à MD' sur le plus grand des arcs sous-tendus par la corde MD; la ligne AA' donne également le foyer F. Le point A' peut ainsi être le foyer d'une parabole tangente aux trois droites données; dans ce cas, le problème admet deux solutions.

REMARQUE. — Étant donnés trois tangentes et le foyer d'une parabole, il est facile de déterminer les points de contact; il suffit, d'après ce qui précède, de prendre à partir de D et D', de part et d'autre de ces points, des arcs respectivement égaux à MD' et à MD, sur la circonférence circonscrite au triangle des tangentes et de joindre les points obtenus au foyer. Les trois droites ainsi construites rencontrent les tangentes aux points de contact.

Corollaire I. — Si le triangle MDD' est isoscèle, les côtés MD et MD' étant les côtés égaux, le point I' coïncide avec le point M; alors on en conclut la propriété suivante : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle isoscèle, la droite menée par le sommet de ce triangle et par le point de contact de sa base passera constamment par le foyer de la courbe.* (Steiner, *Annales de Gergonne.*)

Corollaire II. — De ce corollaire, on déduit le suivant : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites qui joignent les points de contact des côtés du triangle avec les sommets respectivement opposés concourent toutes trois au foyer de la courbe,* et par conséquent : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites menées par les sommets et par les points de contact des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point, et le lieu de ce point est la circonférence du cercle circonscrit.* (Id., id.) *(A suivre.)*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir page 246 et suiv.)

III

RELATIONS DONNÉES PAR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE QUELCONQUE.

Dans un triangle quelconque ABC, nous appellerons :
R le rayon du cercle inscrit;
h_a, h_b, h_c les hauteurs correspondant respectivement aux côtés a, b, c;

$$\frac{\text{arc MF} - \text{arc DA}'}{2},$$

l'angle IDF $\frac{\text{arc D'F}}{2} = \frac{\text{arc MF} - \text{arc MD}'}{2}$;

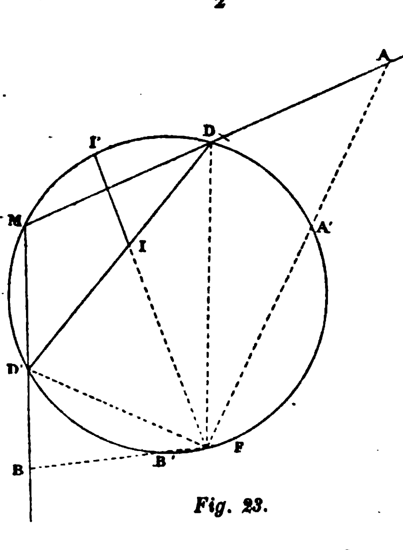


Fig. 23.

ces deux angles étant égaux, il en est de même des arcs MD' et DA'; de plus, FD étant bissectrice de l'angle IFA, les arcs DA' et DI' sont égaux, donc il en est de même des arcs MD' et DI'. On démontrerait également que B étant le point de contact de MB', les arcs DM et D'B' sont égaux et par suite D'I' et MD; d'où la construction suivante : après avoir construit le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes, on porte, à partir d'un sommet pris sur la tangente dont le contact est connu et sur le plus petit des arcs sous-tendus par l'autre tangente issue de ce sommet, un arc égal au plus petit des arcs sous-tendus par la troisième tangente; la droite qui joint le point obtenu au point de contact donné rencontre le cercle au foyer cherché.

Le problème n'admet qu'une solution.

Dans le cas où le point de contact donné se trouve sur le prolongement d'un des côtés du triangle formé par les tangentes, en A, par exemple, on prend à partir du sommet D un arc DA' égal à MD' sur le plus grand des arcs sous-tendus par la corde MD; la ligne AA' donne également le foyer F. Le point A' peut ainsi être le foyer d'une parabole tangente aux trois droites données; dans ce cas, le problème admet deux solutions.

Remarque. — Étant donnés trois tangentes et le foyer d'une parabole, il est facile de déterminer les points de contact; il suffit, d'après ce qui précède, de prendre à partir de D et D', de part et d'autre de ces points, des arcs respectivement égaux à MD' et à MD, sur la circonférence circonscrite au triangle des tangentes et de joindre les points obtenus au foyer. Les trois droites ainsi construites rencontrent les tangentes aux points de contact.

Corollaire I. — Si le triangle MDD' est isoscèle, les côtés MD et MD' étant les côtés égaux, le point I' coïncide avec le point M; alors on en conclut la propriété suivante : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle isoscèle, la droite menée par le sommet de ce triangle et par le point de contact de sa base passera constamment par le foyer de la courbe.* (Steiner, *Annales de Gergonne.*)

Corollaire II. — De ce corollaire, on déduit le suivant : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites qui joignent les points de contact des côtés du triangle avec les sommets respectivement opposés concourent toutes trois au foyer de la courbe,* et par conséquent : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites menées par les sommets et par les points de contact des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point, et le lieu de ce point est la circonférence du cercle circonscrit.* (Id., id.) *(A suivre.)*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir page 246 et suiv.)

III

RELATIONS DONNÉES PAR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE QUELCONQUE.

Dans un triangle quelconque ABC, nous appellerons :
R le rayon du cercle inscrit;
h_a, h_b, h_c les hauteurs correspondant respectivement aux côtés a, b, c;

$$\frac{\text{arc MF} - \text{arc DA}'}{2},$$

l'angle IDF $= \dfrac{\text{arc D'F}}{2} = \dfrac{\text{arc MF} - \text{arc MD}'}{2}$;

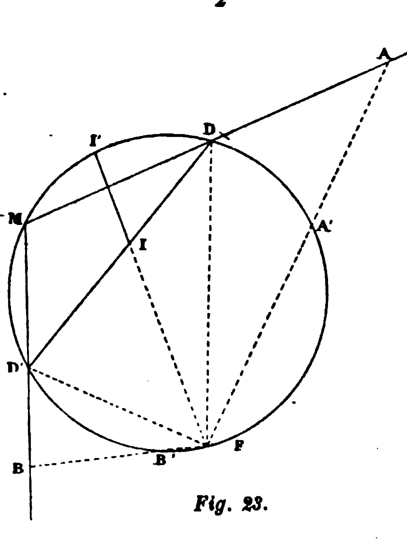


Fig. 23.

ces deux angles étant égaux, il en est de même des arcs MD' et DA'; de plus, FD étant bissectrice de l'angle IFA, les arcs DA' et DI' sont égaux, donc il en est de même des arcs MD' et DI'. On démontrerait également que B étant le point de contact de MB', les arcs DM et D'B' sont égaux et par suite D'I' et MD; d'où la construction suivante : après avoir construit le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes, on porte, à partir d'un sommet pris sur la tangente dont le contact est connu et sur le plus petit des arcs sous-tendus par l'autre tangente issue de ce sommet, un arc égal au plus petit des arcs sous-tendus par la troisième tangente; la droite qui joint le point obtenu au point de contact donné rencontre le cercle au foyer cherché.

Le problème n'admet qu'une solution.

Dans le cas où le point de contact donné se trouve sur le prolongement d'un des côtés du triangle formé par les tangentes, en A, par exemple, on prend à partir du sommet D un arc DA' égal à MD' sur le plus grand des arcs sous-tendus par la corde MD; la ligne AA' donne également le foyer F. Le point A' peut ainsi être le foyer d'une parabole tangente aux trois droites données; dans ce cas, le problème admet deux solutions.

REMARQUE. — Étant donnés trois tangentes et le foyer d'une parabole, il est facile de déterminer les points de contact; il suffit, d'après ce qui précède, de prendre à partir de D et D′, de part et d'autre de ces points, des arcs respectivement égaux à MD′ et à MD, sur la circonférence circonscrite au triangle des tangentes et de joindre les points obtenus au foyer. Les trois droites ainsi construites rencontrent les tangentes aux points de contact.

Corollaire I. — Si le triangle MDD′ est isoscèle, les côtés MD et MD′ étant les côtés égaux, le point I′ coïncide avec le point M; alors on en conclut la propriété suivante : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle isoscèle, la droite menée par le sommet de ce triangle et par le point de contact de sa base passera constamment par le foyer de la courbe.* (Steiner, *Annales de Gergonne.*)

Corollaire II. — De ce corollaire, on déduit le suivant : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites qui joignent les points de contact des côtés du triangle avec les sommets respectivement opposés concourent toutes trois au foyer de la courbe,* et par conséquent : *si une parabole touche les trois côtés d'un triangle équilatéral, les droites menées par les sommets et par les points de contact des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point, et le lieu de ce point est la circonférence du cercle circonscrit.* (Id., id.) *(A suivre.)*

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir page 246 et suiv.)

III

RELATIONS DONNÉES PAR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE QUELCONQUE.

Dans un triangle quelconque ABC, nous appellerons :
R le rayon du cercle inscrit;
h_a, h_b, h_c les hauteurs correspondant respectivement aux côtés a, b, c;

— Trouver une valeur de m telle que $2(2 + m)$ soit un carré parfait.

— Trouver deux nombres qui soient entre eux comme 30 est à 48, et dont le plus grand commun diviseur soit 21.

— Un cube terminé par 4 ou par 8 a un chiffre pair de dizaines; un cube terminé par 6 ou 2 a un chiffre impair de dizaines; un cube terminé par 5 a pour chiffre des dizaines 2 ou 7.

— Un nombre a qui a pour exposant une puissance de 2, est un multiple de $(a^2 - 1)$ augmenté d'une unité.

— Simplifier l'expression

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

puis calculer x à 0,001 près.

— Calculer à un centimètre près le côté du carré équivalent à la surface totale d'un cône dont la base a un mètre de rayon, et dont l'apothème est le côté du carré inscrit dans la base.

— Ayant calculé le nombre a des dizaines d'une racine carrée, R étant le reste correspondant, on a une limite inférieure des unités en prenant $\frac{R}{10(2a + 1)}$.

Equations à résoudre.

$$2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0.$$

$$\sqrt{2\sqrt{5} + x} = \sqrt{\sqrt{5} + x} + \sqrt{\sqrt{5} - x}.$$

$$3\sqrt{x + 8} - \sqrt{x - 8} = 2\sqrt{2x + 2}.$$

$$\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2.$$

$$\frac{x - 8}{x} + \frac{x}{x - 8} = \frac{26}{5}.$$

$$(x + \sqrt{x})^4 - (x + \sqrt{x})^2 = 159600.$$

$$1 + \sqrt{2x + 15} = 3 + \sqrt{x + 8}.$$

$$3\sqrt{x + 15} = 7\sqrt{x - 5} - 5\sqrt{x - 17}.$$

$$\sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x - 18} = \sqrt{7x + 1}.$$

$$[(x - 5)^2 - x]^2 + 6 = 7(x - 5)^2 - 7x.$$

$$\sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} = 6.$$

$$\sqrt{(1 - a)}\sqrt[4]{\frac{1 + x}{1 - x}} - \sqrt{1 + a}\sqrt[4]{\frac{1 - x}{1 + x}} \times 2\sqrt[4]{1 - a^2} = 0.$$

$$\sin x - \cos x = 4\cos^2 x \sin x.$$

$$\sin x + \cos x = 1.36602.$$

$$3\sin x + 2\cos^2 x = 3.$$

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2(a + x) - \operatorname{tg}^2(a - x).$$

RECHERCHES

SUR LES

COURBES PLANES DU TROISIÈME DEGRÉ

AYANT AU MOINS UNE ASYMPTOTE A DISTANCE FINIE

Par M. J. Collin, ancien élève de l'Ecole polytechnique,
Professeur de Mathématiques.

(Suite et fin.)

La deuxième méthode ressemble à celle que nous avons employée déjà pour les courbes à point singulier.

Théorème IV. — *Toute courbe* (M) *ou* (M_1), *peut se construire à l'aide d'une conique fixe et de deux droites parallèles fixes.*

Soit en effet une courbe

$$1 = \frac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} + \frac{l}{y - m''x - n}$$

où nous supposons indifféremment m, m', m'' inégaux ou égaux, de manière à avoir ainsi toutes les espèces de courbes (M) ou (M_1).

Si nous passons aux coordonnées polaires, le rayon vecteur d'inclinaison ω coupera cette courbe en deux points M' et M'' donnés par l'équation

$$\rho^2 - \rho\left\{\frac{n + l}{\sin\omega - m''\cos\omega} + \frac{a\cos\omega + b\sin\omega}{(\sin\omega - m\cos\omega)(\sin\omega - m'\cos\omega)}\right\}$$
$$+ \frac{n\,(a\cos\omega + b\sin\omega)}{(\sin\omega - m\cos\omega)(\sin\omega - m'\cos\omega)(\sin\omega - m''\cos\omega)} = ,$$

dont nous appellerons les racines ρ' et ρ''.

Or ce même rayon vecteur rencontre respectivement la conique directrice, l'asymptote directrice $y - m''x = l + n$, et la droite parallèle $y - m''x = n$ aux points M_1, M_2, M_3 ; et l'on a

$$OM_1 = \rho_1 = \frac{a\cos\omega + b\sin\omega}{(\sin\omega - m\cos\omega)(\sin\omega - m'\cos\omega)}$$

$$OM_2 = \rho_2 = \frac{l + n}{\sin\omega - m' \cos\omega}$$

$$OM_3 = \rho_3 = \frac{n}{\sin\omega - m' \cos\omega}$$

De là, nous concluons

$$\rho' + \rho'' = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho'\rho'' = \rho_1\rho_3$$

et nous arrivons ainsi à la construction suivante des points M′ et M″.

Sur M_1M_2 on décrira un premier cercle. On décrira ensuite un deuxième cercle ayant son centre γ sur le rayon vecteur, à une distance $O\gamma$ de O égale à $\frac{OM_1 + OM_2}{2}$, et, pour axe radical avec le premier, la perpendiculaire élevée en O au rayon vecteur. Les deux points d'intersection de ce second cercle et du rayon vecteur seront les points cherchés M′ et M″. Il va sans dire, d'ailleurs, que dans l'expression $\frac{OM_1 + OM_2}{2}$ on doit prendre $OM_1 + OM_2$ avec des signes conformes à leur direction, et cette longueur se trouve de suite sur la figure si l'on a tracé d'avance la symétrique S de l'asymptote.

Cette méthode est bien préférable à la première ; elle fait apparaître facilement la forme de la courbe.

Quant à la tangente, on pourrait encore au besoin l'obtenir à l'aide de la sous-normale ; car les deux sous-normales en M′ et M″ sont données par un système d'équations du premier degré déduites des relations ci-dessus : mais cette construction serait peu simple.

— Une troisième méthode de construction des courbes (M) ou (M_1) consisterait à les regarder comme définies par le système

$$\begin{cases} \dfrac{ax + by}{(y - mx)(y - m'x)} = \lambda & (\zeta) \\ y - m'x - n = \dfrac{l}{1 - \lambda} & (\zeta_1) \end{cases}$$

dont toutes les coniques (ζ) passent par l'origine, ont leurs centres en ligne droite et leurs axes parallèles.

— Il nous reste encore à construire les courbes (E_2) auxquelles les procédés précédents ne s'appliquent pas. Si l'on

change d'axes, ces courbes peuvent s'écrire :

$$y_1 x_1^2 = A_1(y_1 - p_1 x_1)_1 + D_1 y' x_1 + E_1 x_1 + F$$

c.-à-d. $$y_1 = \frac{-A_1 p_1 x_1^2 + E_1 x_1 + F}{x_1^2 - A_1 x_1 - D_1},$$

ce qui d'abord peut toujours se construire. Si le racines du dénominateur sont réelles, on aura aussi bien, en appelant a, b ces racines,

$$y_1 = - A_1 p_1 + \frac{h}{x_1 - a} + \frac{k}{x_1 b}$$

c.-à-d. $$y_1 = y_2 + y_3 + \text{constante}$$

et l'on appliquera ainsi la méthode de Finck, qui donne la tangente.

— Nous nous arrêtons ici. Il eût été intéressant de résoudre divers problèmes sur les tangentes en comparant les courbes $1 = \frac{d}{P} + \frac{d'}{\varphi} + \frac{d''}{R}$ avec les coniques $o = \frac{\lambda}{P} + \frac{\mu}{\varphi} + \frac{\nu}{R}$; nous en laissons le soin au lecteur.

De même, nous aurions pu étendre à un certain nombre de courbes de degré m les procédés de construction indiqués ici pour les courbes du troisième ordre.

Qu'il nous suffise, en terminant, de réparer une omission, et de démontrer une propriété des courbes à point singulier.

$$1 = \frac{2Rx}{x^2 + y^2} + \frac{a}{x}$$

pour en déduire une construction de la tangente.

Ces courbes peuvent en effet être regardées comme définies par

$$\left| \begin{array}{l} \lambda^2(x - 2a)^2 + (\lambda^2 - 8aR)\, y^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 8aR) \\ x^2 + y^2 = \lambda^2. \end{array} \right.$$

Donc toute courbe de cette espèce jouit de la propriété suivante : la distance d'un quelconque de ses points M au point singulier O est la demi-somme de ses distances aux deux points ($x = 2a$, $y = \pm 2\sqrt{2ar}$). On peut donc construire la tangente par la règle de Tchirnhausen.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. E.-J. Boquel.

(*Suite*, voir p. 161).

Autres applications. — Si l'on se reporte à la formation de la forme adjointe, on sait qu'il faut éliminer x_1, x_2, ... x_n entre les relations

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - X_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - X_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n - X_n = 0 \\ X_1x_1 + X_2x_2 + \ldots + X_n x_n - f \;= 0' \end{array}$$

Le résultat de cette élimination est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & X_2 \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & X_n \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n & f \end{vmatrix} \quad \text{égal àrézoé.}$$

De cette équation, on déduit $f = \frac{F}{\Delta}$, F étant une fonction homogène et du 2e degré en X_1, X_2, ... X_n, et Δ l'invariant de la forme f.

Comme nous l'avons dit, F est la forme adjointe de f.

Or, en ordonnant le déterminant par rapport aux éléments de la dernière ligne ou de la dernière colonne, on a :

$$A + \Delta \, . \, f = 0$$

Donc $F = -A$. Mais A n'est autre chose que le déterminant ci-dessus, où l'on a remplacé f par o ; la forme adjointe peut donc s'écrire sous forme de déterminant, comme il suit :

$$F = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & X_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & X_n \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n & 0 \end{vmatrix}$$

Cette remarque permet d'indiquer une forme intéressante et très usuelle que l'on peut donner à la forme adjointe. Il suffit pour cela de développer ce dernier déterminant, en observant qu'il est symétrique, et que l'invariant Δ de la forme f est également symétrique.

Or, en appliquant à un déterminant symétrique la règle connue pour former la dérivée d'un déterminant quelconque, il sera facile d'obtenir la dérivée d'un déterminant symétrique par rapport à l'un quelconque de ses éléments.

Si l'élément est sur la diagonale principale, on a immédiatement $\Delta'_{(a_{ii})} = \alpha_{ii}$, α_{ii} étant le mineur d'ordre $n - 1$ relatif à l'élément considéré; toutes les autres dérivées fournies par l'application du théorème général étant évidemment nulles.

Si l'élément occupe une place quelconque, a_{ik}, par exemple, on a à considérer l'élément symétrique égal a_{ki}, et toutes les dérivées fournies par l'application du théorème général sont nulles, sauf celles qui proviennent des deux éléments égaux a_{ik} et a_{ki}; ces dernières sont égales et l'on a: $\Delta'_{(a_{ik})} = 2\,\alpha_{ik}$ ou $2\,\alpha_{ki}$, ce qui est la même chose, en raison de la symétrie.

Cela posé, le développement du déterminant — F sera :

$$\Delta'_{(a_{11})} X_1^2 + \dots + \Delta'_{(a_{ik})} X_i X_k + \dots$$

Cherchons par exemple le coefficient du terme en $X_i X_k$.

Si l'on prend l'élément X_i dans la dernière colonne, son coefficient est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{vmatrix}$$

La colonne de rang $n + 1$ et la ligne de rang i ayant été supprimées dans le déterminant général, on a, pour fixer le signe du coefficient précédent, le facteur $(-1)^{n+1+i}$.

Pour avoir le coefficient du terme en $X_i X_k$, il suffit de chercher dans ce dernier déterminant le coefficient de X_k. Ce coefficient est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & a_{i-1n} \\ a_{i+1,1} & a_{1i+2,} & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & a_{i+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n2} & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

multiplié par le facteur $(-1)^{n+k}$.

Le coefficient du terme en $X_i X_k$ est donc $(-1)^{n+1+i+k}\alpha_{ik}$ ou $(-1)^{2n+i+k+1}\alpha_{ik}$, α_{ik} étant le coefficient de a_{ik} dans le déterminant Δ, c'est-à-dire dans l'invariant de la forme f. Or α_{ik} est égal au même déterminant multiplié par le facteur $(-1)^{i+k}$; le coefficient de $X_i X_k$ est donc $-\alpha_{ik}$.

D'autre part ce même terme s'obtiendra en prenant X_k dans la dernière colonne et X_i dans la dernière ligne; son coefficient sera donc $-\alpha_{ki}$; mais $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$; donc le coefficient du terme en $X_i X_k$ est $2\alpha_{ik}$, c'est-à-dire $\Delta'_{(\alpha_{ik})}$.

La forme adjointe prend donc bien la forme suivante:

$$\Delta'_{(\alpha_{11})} X_1^2 + \Delta'_{(\alpha_{22})} X_2^2 + \ldots + \Delta'_{(\alpha_{ik})} X_i X_k + \ldots$$

Cela posé, reprenons la forme quadratique ternaire $f(x, y, z)$, et supposons que dans cette forme on substitue à la place de z la valeur $-\dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma}$ tirée de la relation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; le résultat obtenu ne dépendra plus que de deux variables, et sera $f\left(x, y, -\dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma}\right)$, soit $F(X, Y, Z)$ la forme adjointe de f; je dis que l'invariant de la forme binaire qui provient de la substitution $z = -\dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma}$ aura pour valeur $\dfrac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{\gamma^2}$.

En effet, la substitution $x = x'$, $y = y'$, $z = -\dfrac{\alpha}{\gamma} x'$

$-\frac{\beta}{\gamma}y'$, est tout à fait analogue à celle de Cauchy; car il suffit de poser dans celle-ci $t = x'$, $u = y'$, avec $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$, $\alpha'' = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\beta'' = -\frac{\beta}{\gamma}$, pour qu'elle se réduise à la substitution qui nous occupe. Or, nous avons démontré que l'invariant de la nouvelle forme obtenue est précisément la valeur que prend la forme adjointe de la proposée quand on y remplace X, Y, Z par les binômes $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$, $\alpha''\beta - \beta''\alpha$ et $\alpha\beta' - \beta\alpha'$.

Mais on a :

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \frac{\alpha}{\gamma} \qquad \alpha''\beta - \beta''\alpha = \frac{\beta}{\gamma} \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

L'invariant cherché est donc $F\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1\right)$ ou $\frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{\gamma^2}$.

A l'aide de ce résultat, proposons-nous de trouver les longueurs des axes de la section d'une surface du deuxième ordre par un plan central.

Je considère la forme

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy - s(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu).$$

Si j'imagine que le plan sécant soit pris pour plan des xy, les axes des x et des y dans ce plan étant les axes mêmes de la section, et l'axe des z étant la normale au plan, la transformation des coordonnées s'exprimera par une substitution linéaire, et la forme nouvelle f' sera :

$$f' = pX^2 + p'Y^2 + 2p''Z^2 + 2qYZ + 2q'ZX - s(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Le terme en XY manquera parce que la courbe de section par le plan Xoy est rapportée à ses axes, et le facteur de s se transformera identiquement en $(X^2 + Y^2 + Z^2)$ parce que les deux expressions représentent toutes deux la distance d'un même point à l'origine, laquelle n'a pas changé.

Les deux expressions f et f' sont identiques en vertu de la substitution linéaire qui a transformé f en f', et l'identité entre elles continuera de subsister si l'on établit entre x, y, z une relation quelconque, pourvu qu'on établisse entre X, Y, Z la relation analogue (c'est-à-dire celle qui résulte de la première relation transformée au moyen de la substi-

tution linéaire qui a changée f en f'). La relation entre x, y, z est l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ du plan sécant, relation dont l'analogue après transformation est $Z = 0$. La forme f, en vertu de l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, ne dépend plus que de deux variables x et y; je détermine s par la condition que cette forme devienne un carré parfait, c'est-à-dire que son invariant soit égal à zéro; soit $\varphi(s) = 0$ l'équation en s ainsi obtenue; je dis que ses racines sont p et p'.

En effet, f et f' étant identiques, si la première devient carré parfait, il en sera de même de la seconde; or, pour $Z = 0$, la forme f' se réduit à $(p - s)\,X^2 + (p' - s)Y^2$; et pour qu'elle devienne carré parfait, il faut qu'on ait $s = p$ ou $s' = p'$. Ces valeurs sont aussi les racines de $\varphi(s) = 0$.

Il faut donc former $\varphi(s)$ quand on remplace z par $-\dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma}$. Pour cela, je prends, d'apres les considérations développées précédemment, la forme F adjointe de f, et j'y remplace X, Y, Z, par les valeurs α, β, γ; j'aurai $\varphi(s) = \dfrac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{\gamma^2}$.

L'équation cherchée sera donc $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Si l'on admet que la surface ait pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1,$$

on aura $p = \dfrac{1}{a^2}$ et $p' = \pm\dfrac{1}{b^2}$;

l'équation $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ admettra donc pour racines les inverses des carrés des demi-axes de la section par le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Or pour avoir $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, il suffit de former la forme adjointe de f, et d'y remplacer XYZ par α, β, γ;

La forme adjointe F, mise sous forme de déterminant, est:

$$\begin{vmatrix} A - s & B'' - s\cos\nu & B' - s\cos\mu & X \\ B'' - s\cos\nu & A' - s & B - s\cos\lambda & Y \\ B' - s\cos\mu & B - s\cos\lambda & A'' - s & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}$$

L'équation cherchée sera donc:

$$\begin{vmatrix} A - s & B'' - s\cos\nu & B' - s\cos\mu & \alpha \\ B'' - s\cos\nu & A' - s & B - s\cos\lambda & \beta \\ B' - s\cos\mu & B - s\cos\lambda & A'' - s & \gamma \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

— Observons encore qu'on peut avoir facilement les projections des deux axes de la section sur le plan des xy.

En effet, si l'on reprend l'identité

$$f\left(x, y, -\frac{\alpha x + \beta y}{\gamma}\right) = f'(X, Y, 0)$$

en remplaçant s par p, le second membre qui est $(p - s)X^2 + (p' - s)Y^2$ se réduit à $(p' - p)Y^2$; on aura donc Y en extrayant la racine carrée de f après y avoir remplacé s par p, qui est l'une des racines de l'équation établie plus haut. Il en sera de même de X.

L'application que nous venons de faire est d'autant plus remarquable, au point de vue de la simplicité du calcul, que nos lecteurs savent combien il est difficile d'arriver par les voies ordinaires à l'équation qui donne en *coordonnées obliques* les carrés des demi-axes de la section d'une surface du second ordre par un plan central.

Si l'on calcule cette équation pour le cas de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on vérifie que l'on retombe sur l'équation connue $\frac{\alpha^2}{\frac{1}{a^2} - s} + \frac{\beta^2}{\frac{1}{b^2} - s} + \frac{\gamma^2}{\frac{1}{c^2} - s} = 0$

c'est-à-dire en posant $s = \frac{1}{\rho^2}$:

$$\frac{a^2\alpha^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{b^2\beta^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{\rho^2 - c^2} = 0.$$

(A suivre.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1880

Mathématiques.

Soient M et N les points où l'axe des x rencontre le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points M et N; menons par un point Q, pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole; soient A et B les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites QA et QB, l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe P.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par par les points M et N est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point P décrit la droite $y = x$, quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.

Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 19 centimètres, et dont la base ABC est située dans le plan horizontal de projection. Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans BCD. L'arête BD est parallèle aux génératrices d'un cylindre dont la trace horizontale est le cercle décrit du point B comme centre avec un rayon égal à 6 centimètres. On demande de représenter en projection horizontale le corps qui reste lorsque l'on supprime dans le tétraèdre la partie comprise dans le cône et la partie comprise dans le cylindre. On indiquera à l'encre rouge la construction faite pour trouver un point de l'intersection du cône et du cylindre et la tangente en ce point.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE 1880

Mathématiques.

— Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points a et b où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A' et B' de l'autre système; soient a' et b' les points où les deux droites A' et B' sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.

1° Trouver le lieu des points a et b, et celui des points a' et b', quand la droite A décrit la paraboloïde.

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites A et B', ou A' et B.

3° Calculer le rapport des longueurs $a'b'$ et ab des perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.

Physique.

— Un manomètre à air comprimé a ses deux branches d'inégale section; la branche fermée a une section S, et la branche ouverte une section n fois plus grande. La différence de niveau dans les deux branches est y. La pression extérieure ne changeant pas, on demande ce qui se passera si on ajoute un poids P de mercure dans la branche ouverte,

On calculera numériquement l'exemple suivant :

$S = 1$ centimètre carré.

$n = 2$.

$y = 4$ centimètres.

$V = 1$ centimètre cube et demi (1 ce., 5).

$P = 20$ gr., 4.

$D = 13.6$, densité du mercure.

— Trouver le foyer principal d'une sphère en verre de rayon R et d'indice n. (On comptera la distance focale à partir de la face de sortie des rayons.)

L'expérience étant supposée faite à zéro, on demande de combien se déplacera le foyer si la température est portée à t degrés, en supposant que l'indice — 1 soit proportionnel à la densité $\left(\frac{n-1}{D} = \text{const.}\right)$. On désignera par K le coefficient de dilatation cubique du verre.

On calculera ensuite ce déplacement pour $n_0 = \frac{3}{2}$.

QUESTION 215

Solution par M. Colin, sergent au 82e de ligne, élève de mathématiques spéciales à Sainte-Barbe (classe de M. Vazeille).

Démontrer que pour trouver la dérivée d'un déterminant dont tous les éléments sont fonctions d'une même variable, il suffit de faire la somme des déterminants obtenus en remplaçant dans le déterminant proposé tous les éléments d'une colonne par leurs dérivées.

Soit un déterminant d'ordre n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^\alpha & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^n & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\alpha^1 & a_\alpha^2 & a_n^\alpha & a_\alpha^n \\ a_\alpha^1 & a_n^1 & a_n^\alpha & a_n^n \end{vmatrix}.$$

dont nous supposerons tous les éléments fonctions d'une même variable x.

Un terme quelconque est de la forme

$$a_1^\alpha a_2^\beta \ldots a_n^\nu \qquad (1)$$

et par conséquent le déterminant lui-même et la somme $\Sigma a_1^\alpha a_2^\beta \ldots a_n^\nu = \Delta$, dans laquelle Σ porte sur toutes les valeurs différentes de $\alpha, \beta, \ldots n$, depuis 1 jusqu'à n, dans un ordre quelconque.

En prenant la dérivée du terme (1), on a :

$$\begin{array}{l} (a_1^\alpha)' a_2^\beta \ \ldots \ a_n^\nu \\ + a_1^\alpha (a_2^\beta)' \ \ldots \ a_n^\nu \\ + a_1^\alpha a_2^\beta (a_3^\gamma)' \ \ldots \ a_n^\nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_1^\alpha a_2^\beta \ \ldots \ (a_n^\nu)' \end{array}$$

Pour avoir la dérivée du déterminant, il suffit de faire, pour tous les termes, les sommes des résultats analogues au précédent. Ces sommes sont les suivantes :

$$\Sigma(a_1^\alpha)'(a^\beta) \ldots a_n^\nu,$$

$$\Sigma a_1^\alpha (a_n)' \ldots a_n^\nu, \text{ etc.}$$

Or $\Sigma(a_1^\alpha)'(a_2^\beta) \ldots (a_n^\nu)$ est le déterminant proposé dans lequel on a remplacé la colonne α par les divisées de chacun de ses éléments. Il en est de même pour $\Sigma(a^\alpha)(a_2^\beta)' \ldots$, etc. ; donc le théorème est démontré.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lestoquoy, à Saint-Quentin; Arnaud, à Nice; Haure, lycée Louis-le-Grand ; Jourdan, lycée de Rouen.

QUESTION 216

Solution par M. V.-M. Arnaud, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Nice.

Trouver les dérivés des fonctions circulaires inverses arc sin x, arc cos x, arc tg x, *en s'appuyant seulement sur la définition de la dérivée et sur les formules inverses de l'addition des arcs :*

$$\textit{arc sin}\ x + \textit{arc sin}\ y = \textit{arc sin}\ (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},\ )$$
$$\textit{arc cos}\ x + \textit{arc cos}\ y = \textit{arc cos}\ (xy - \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2},)$$
$$\textit{arc tg}\ x + \textit{arc tg}\ y = \textit{arc tg}\ \frac{x+y}{1-xy} \qquad \text{(Picquet.)}$$

1° Arc sin x. — Donnons à l'arc x un accroissement Δx, la fonction $y =$ arc sin x prendra un accroissement Δy, et nous aurons : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\text{arc sin}\ (x + \Delta x) - \text{arc sin}\ x}{\Delta x}$.

Prenons les sinus des numérateurs des deux membres, il viendra :

$$\frac{\sin \Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}.$$

Multiplions les deux termes du deuxième membre par $(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$, nous aurons :

$$\frac{\sin \Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2(1-x^2) - x^2[1-(x+\Delta x)^2]}{\Delta x[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}$$

Développons et réduisons :

$$\frac{\sin \Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

Si nous faisons tendre Δx vers o, sin Δy tend vers Δy, et $\dfrac{\sin \Delta y}{\Delta x}$ tend vers la dérivée y'. Faisons donc Δx égal à o, il viendra :

$$y' = \frac{2x}{x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

— On trouverait de même la dérivée de arc cos x.

— Arc tg x. — Donnons à x l'accroissement Δx, $y =$ arc tg x prendra l'accroissement Δy; nous aurons alors:

$$\Delta y = \text{arc tg}\ (x + \Delta x) - \text{arc tg}\ x.$$

Prenons les tangentes des deux membres:

$$\text{tg}\ \Delta y = \frac{\Delta x}{1 + x(x+\Delta x)}.$$

Divisons par Δx; il vient:

$$\frac{\text{tg}\ \Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1 + x(x+\Delta x)}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro, tg Δy tendra vers Δy et $\frac{\text{tg } \Delta y}{\Delta x}$ tendra ve $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

Donc, à la limite, quand $\Delta x = 0$, on a : $y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

QUESTION 220

Solution par M. Camille Leroux, élève au Lycée Louis-le-Grand.

Soit la fonction $$y = \frac{x - a}{x^2 + 1}.$$

1° Démontrer qu'en désignant par y', y'', ... $y_{(n)}$ *les dérivées successives de* y, *on a entre trois dérivées consécutives la relation*

$$(x^2 + 1)y_{(n)} + 2nxy_{(n-1)} + n(n-1)y_{(n-2)} = 0.$$

Je prends la dérivée de la fonction y, j'ai

$$y' = -\frac{2x(x - a)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

et pour avoir une relation entre deux dérivées consécutives, j'élimine le rapport $\frac{x - a}{x^2 + 1}$, entre y et y'; j'ai

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

d'où (1) $$y'(x^2 + 1) + 2xy - 1 = 0.$$

Pour avoir une relation entre les dérivées $y_{(n)}$, $y_{(n-1)}$, $y_{(n-2)}$, je prends la dérivée $(n - 1)^{me}$ de (1).

La dérivée de $y'(x^2 + 1)$ donnée par la formule de Leibnitz

$$Z_{(n-1)} = u_{(n-1)}v + \frac{n-1}{1}u_{(n-2)}v'$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{12}u_{(n-3)}v'' + \ldots + uv_{(n-1)}$$

dans laquelle on pose

$$Z = y'(x^2 + 1) \qquad u = y' \qquad v = x^2 + 1$$

est

$$y_{(n)}(x^2 + 1) + 2\frac{(n-1)}{1}xy_{(n-1)} + (n-1)(n-2)y_{(n-2)}.$$

La dérivée $(n-1)^{me}$ de $2xy$ est

$$2\left[y_{(n-1)}x + \frac{n-1}{1}y_{(n-2)}\right]$$

d'où en ajoutant et égalant à o, on a

$$y_{(n)}(x^2+1) + 2(n-1)xy_{(n-1)} + (n-1)(n-2)y_{(n-2)}$$
$$2 + \left[y_{(n-1)}x + \frac{n-1}{1}y_{(n-2)}\right] = 0$$

ou $\quad y_{(n)}(x^2+1) + 2nxy_{(n-1)} + n(n-1)y_{(n-2)} = 0$

c. q. f. d.

2° *Démontrer que si l'on pose*

$$y_{(n)} = (-1)^n 123 \ldots n \frac{V_{(n+1)}}{(1+x2)^{n+1}}$$

V_{n+1} *est un polynôme en* x *du degré* $(n+1)$ *dont le premier terme est* x^{n+1} *et que, entre trois polynômes consécutifs, on a*

$$V_n - 2xV_{n-1} + (1+x^2)V_{n-2} = 0.$$

On a

$$y = \frac{x-a}{x^2+1} = (x-a)\left[\frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}\right]$$

en posant $\quad \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{A}{x+i} + \dfrac{B}{x-i}$

on a $\quad A = -\dfrac{1}{2i} \qquad B = \dfrac{1}{2i}$

et

$$y = \frac{x-a}{2i}\left\{(x-i)^{-1} - (x+i)^{-1}\right\}$$

$$y' = \frac{1}{2i}\left\{(x-i)^{-1} - (x+i)^{-1} + (x-a)[-1(x-i)^{-2} + 1(x+i)^{-2}]\right\}$$

$$y'' = \frac{1}{2i}\left\{\begin{array}{l}-1(x-i)^{-2} + 1(x+i)^{-2} + [-1(x-i)^{-2} + 2(x+i)^{-2}] \\ \qquad + (x-a)[12(x-i)^{-3} - 12(x+i)^{-3}]\end{array}\right\}$$

. . . .

$$y_{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}123\ldots n}{2i(x^2+1)^{n+1}}\left\{\begin{array}{l}(x-i)(x+i)^{n+1} - (x+i)(x-i)^{n+1} - (x-a)[(x+i)^{n-1} \\ \qquad - (x-i)^{n+1}]\end{array}\right\}$$

ou

$$(x+i)^{n+1} = x^{n+1} \frac{n+1}{1} ix^n + \frac{n+1}{1\,.\,2} i^2x^{n-1} + \ldots.$$

$$(x-i)^{n+1} = x^{n+1} - \frac{n+1}{1} ix^n + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2} i^2x^{n-1} + \ldots$$

d'ou effectuant $(x + i)^{n+1}$ et $(x - 1)^{n+1}$, y^n devient

$$y_n = (-1)\,1 2 3 \ldots n \left\{ \frac{x^{n+1} \frac{n(n+1)}{1.2} x^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1(n-2)}{1.2.3.4} x^{n-3}}{(x^2+1)^{(n+1)}} - \ldots a\left[\frac{n-1}{1} x^n - \ldots\ldots\right] \right\}$$

on voit donc que

$$V_{n+1} = x^{n+1} - \frac{(n)(n+1)}{12} x^{n-1} + \ldots a\left[\frac{n+1}{1} x^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{123} x^{n-2} + .\right]$$

Portant dans la relation

$$y_{(n)}(x^2+1) + 2nxy_{(n-1)} + n(n-1)y_{(n-2)} = 0,$$

les valeurs $y_n = (-1)^n \dfrac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n.}{(x^2+1)^{n+1}} V_{n+1}$

$$y_n - 1 = \frac{(-1)^{n-1}\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)}{(x^2+1)^n} V_n$$

$$y_n - 2 = \frac{(-1)^{n-2}\, 1.2.3 \ldots (n-2)}{(x^2+1)^{n-1}} V_{n-1}.$$

On a

$$\frac{(-1)^n\ 1.2.3\ldots n}{(x^2+1)^n} V_{n+1} + \frac{2nx(-1)^{n+1}\, 1.2.3 \ldots (n-1)}{(x^2+1)n} V_n + n(n-1)\frac{(-1)^{n-2}\, 1.2.3\,(n-2)}{(x^2+1)^{n-1}} V_{n-1} = 0.$$

d'où $\quad V_{n+1} - 2x V_n + (x^2+1) V_{n-1} = 0,$
relation qu'il fallait établir.

3° En posant $V = 1$ *, le théorème de Sturm s'applique à la suite des polynômes* V_n, V_{n+1} *etc. et les racines de l'équation* $V_n = 0$ *séparent celles de l'équation* $V_{n-1} = 0$.

J'ai

$$V_{n+1} = 2x V_n - (x^2+1) V_{n-1}$$
$$V_n = \ = 2x V_{n-1} (x^2+1) V_{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V^2 = 2x V_2 - (x^2+1) V_1$$
$$V_2 = 2x V_1 - (x^2+1) V$$

Je vais examiner les différentes propositions suivantes :

1° Ce qui arrive quand une des fonctions s'annule :

Quand une fonction intermédiaire V_{p-1} s'annule pour $x = k$, les deux fonctions qui la comprennent sont de signes contraires pour $x = k$.

2° Deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler pour la même valeur de x.

Car si V_p, V_{p-1} s'annulaient pour $x = k$, V_{p-2} s'annulerait aussi, et de proche en proche on voit que V s'annulerait, ce qui est impossible car $V = 1$.

3° La suite V_p, V_{p-1}, V_{p-2} ..., ne perd ni ne gagne de variations quand x passe par une racine de l'équation $V_{p-1} = 0$, V_{p-1} étant une fonction intermédiaire quelconque.

En effet si k est une racine de l'équation $V_{p-1} = 0$, on pourra toujours trouver un nombre $h > 0$ et assez petit pour que x variant de $k - h$ à $k + h$ il n'y ait pas de racines de $V_p = 0$ et de $V_{p-2} = 0$; or pour $x = k$, V_p et V_{p-2} sont de signes contraires; donc aussi pour $k - h$ et $k + h$; il y aura donc une seule variation pour $x = k - h$ et $x = k + h$; car il y a en a un nombre impair, et une suite de trois termes devant présenter un nombre impair de variations n'en peut présenter qu'une; il n'y a donc ni perte ni gain de variations Ces propriétés montrent l'identité de ces fonctions et de celles de Sturm.

La perte ou le gain de variations ne peut donc provenir que de V_{n+1}. Donc s'il y a entre deux nombres donnés v variations perdues ou gagnées, il y aura *au moins* v racines de l'équation $V_{n+1} = 0$ entre ces deux nombres.

Substituant dans la suite V_{n+1}, V_n, V_{n-1}, ..., $V - \infty$ et $+\infty$ on a les signes suivants :

1° n pair	—	+	—	+	....	pour $x = -\infty$
2° n impair	+	—	+	—	....	» »
n pair ou impair	+	+	+	+	....	pour $x = +\infty$

il y a donc, que n soit pair ou impair, perte de $(n + 1)$ variations; donc l'équation $V_{n+1} = 0$ a au moins $(n + 1)$ racines réelles; or elle est du degré $(n + 1)$, donc elle a toutes ses racines réelles. — De plus on peut en conclure que le quotient $\frac{V_n}{V_{n-1}}$ passe du négatif au positif au moment où x atteint et dépasse une racine de l'équation $V_n = 0$; donc les racines de l'équation $V_n = 0$ séparent les racines de l'équation $V_{n-1} = 0$.

4° *Les coefficients de* V *sont des fonctions linéaires de la constante* a *et en posant*

$$V_{(n+1)} = P_{(n+1)} - Q_{(n+1)}$$

on a, si

$$x = cotg\ \varphi,$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = cotg\ (n+1)\varphi$$

En conclure les expressions trigonométriques des racines de l'équation $V_{n+1} = 0$.

On a trouvé pour V_{n+1}

$$x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^{n-1} + \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-3}$$

$$- \ldots - a\left[\frac{n+1}{1} x^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-2} + \ldots\right] = 0.$$

Si l'on pose par exemple

$$x = \text{cotg}\ \varphi \text{ ou } = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

on a

$$\frac{\cos^{(n+1)}\varphi}{\sin^{(n+1)}\varphi} - \frac{n(n+1)}{1}\frac{\cos^{n-1}\varphi}{\sin^{n-1}\varphi} + \ldots$$

$$- a\left[\frac{n+1}{1}\frac{\cos^n\varphi}{\sin^n\varphi} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{\cos^{n-2}\varphi}{\sin^{n-2}\varphi} + \ldots\right] = 0.$$

ou

$$\cos^{n+1}\varphi - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\cos^{n-1}\varphi \sin^2\varphi + \ldots$$

$$-a\left[\frac{n+1}{1}\cos^n\varphi\sin\varphi - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\cos^{n-2}\varphi\sin^3\varphi + \ldots\right] = 0$$

d'où

$$a = \text{cotg}\ (n+1)\varphi.$$

Soit α le plus petit des arcs ayant pour cotangente a, on a

$$(n+1)\varphi = \alpha + k\pi.$$

$$\varphi = \frac{\alpha + k\pi}{n+1}$$

en donnant à k les $(n+1)$ valeurs 0, 1, 2, ... n, on a les $n+1$) racines trigonométriques de l'équation $V_{n+1} = 0$.

5° *On propose d'établir que le polynôme* Vn *satisfait aux deux équations suivantes.*

$$nV_{n-1} = 2nx\ V_n - (1 + x^2)V'_n,$$

$$(1 + x^2)V''_n - 2(n-2)\ xV'_n + n(n-1)V_n = 0.$$

J'ai trouvé la relation

$$V_{n+1} = 2n\ V_n - (1 + x^2)\ V_{n-1}. \qquad (1)$$

Je calcule V'_n. J'ai

$$V_n = \left[x^n - \frac{n(n-1)}{12}x^{n-2} + \frac{n(n\ 1)(n-2)(n-3}{1234}x^{n-4}\right]$$
$$- a\left[\frac{n}{1}x^{n-1} \ldots\right]$$

d'où . $V'_n = n\,V_{n-1}$ $V_{n-1} = \frac{V'_n}{n}$.

portant dans (1), on a

$$nV_{n-1} = 2nxV_n - (1 + x^2)\,V'_n.$$

De même on trouverait :

$$V''_n = n(n-1)\,V_{n-2}.$$

portant les valeurs $V_{n-1} = \frac{V'_n}{n}$, $V_{n-2} = \frac{V''_n}{n(n-1)}$, dans la relation

$$V_n = 2xV_{n-1} - (1 + x^2)\,V_{n-2},$$

j'ai $(1 + x^2)\,V''_n - 2(n-1)x\,V'_n + n(n-1)\,V_n = 0$;

c. q. f. d.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mathématiques élémentaires.

— Chercher combien il y a de fractions équivalentes à une fraction donnée et ayant des termes plus petits que ceux de cette fraction donnée.

— Trouver tous les nombres entiers x tels que $x^2 - 1$ soit divisible par un certain nombre premier p.

— a étant un nombre tel que $a^3 - 2$ soit divisible par 7, on demande s'il est toujours possible de trouver un nombre plus petit que a qui soit divisible par 7.

— Trouver les solutions entières de l'équation $x^2 - y^2 = 9$.

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ étant des fractions irréductibles, et b et d étant différents, on demande si la somme des deux fractions peut ou ne peut pas être un nombre entier.

— Etant donnés un plan P, et un triangle ABC ayant un côté BC dans le plan P, dont le plan fait avec le plan P un angle φ, on projette le sommet A en a sur le plan P, et on demande, connaissant tous les éléments du triangle de l'espace et l'angle φ, de calculer l'angle BaC du triangle projeté.

— p étant un nombre premier absolu, et a un nombre premier avec p, on peut toujours trouver une puissance entière de a qui, divisée par p, donne pour reste l'unité.

— Mener par un point donné un cercle tangent à deux droites données.

— De combien de manières peut-on décomposer le nombre $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$ en produits de facteurs différents?

— Couper un angle solide à quatre faces par un plan de manière que la section soit un parallélogramme.

— Etant donnés trois nombres a, b, c, trouver une progression arithmétique à termes entiers telle que les nombres a, b, c, en fassent partie.

— Soient deux nombres $N = a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\gamma} \ldots$ et $N' = a'^{\alpha'} b'^{\beta} c^{\gamma'} \ldots$, comment peut-on trouver tous les diviseurs communs à ces deux nombres, et combien y a-t-il de ces diviseurs?

— Démontrer que la division harmonique est projective.

— Volume engendré par un octogone régulier tournant autour d'un de ses côtés.

Algèbre.

— A et A′ étant deux valeurs approchées d'un nombre x, l'une par excès, l'autre par défaut, on réduit A et A′ en fractions continues; établir que les quotients incomplets communs à A et A′ sont ceux que fournirait la réduction de x en fraction continue.

— Sachant que $f(x)$ est un polynôme qui, égalé à zéro, a toutes ses racines inégales et autres que ± 1, on demande de décomposer l'expression

$$\frac{1}{(x^2 - 1)[f(x)]^2}$$

en fractions simples.

— Racine carrée de l'imaginaire $1 - 2\sqrt{-1}$.

— Séparer les racines de l'équation $x^3 + x^2 + \lambda x - 3 = 0$. Discussion quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Pour quelles valeurs de x la série $1 + x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots$ est-elle convergente?

— Diviseurs du second degré en x du polynôme $x^4 + ax^2 + bx + c$.

— Valeur de l'expression $x^n \mathrm{L}x$ pour $x = 0$.

— Pour quelles valeurs de x la série

$$1 + x \cos\varphi + \frac{x^2 \cos 2\varphi}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \cos 3\varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n \cos n\varphi}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

est-elle convergente?

— Calculer les dérivées des fonctions $y = \text{arc sin} \frac{x+1}{x^2+1}$ et $y = \text{arc sin} \frac{x(1+x)}{x^2+1}$, x étant un arc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

— Limite de l'expression $\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 3y}$ quand x et y augmentent simultanément et croissent tous deux jusqu'à l'infini.

— Soit la fraction $\frac{1}{a - x}$; trouver une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et telle qu'elle soit convergente pour des valeurs assez petites de x, la limite étant $\frac{1}{a - x}$.

Même question pour $\frac{1}{(a-x)^2}$.

— Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles l'expression

$$\frac{1}{a^n} \frac{nx^{n-1}(a-x)+x^n}{(a-x)^2}$$

tend vers zéro?

Géométrie analytique à deux dimensions.

— Étant donnée l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, calculer l'angle des deux droites qu'elle représente, et former l'équation homogène du 2° degré qui représente le système de leurs bissectrices.

— On donne en coordonnées rectangulaires l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots + F = 0$ d'une conique, et l'équation $ax + by + c = 0$ d'une droite; trouver les conditions que doivent remplir a, b, c, pour que la droite soit un diamètre de la courbe, et qu'elle fasse avec son conjugué l'angle θ.

Conditions pour que $\theta = 90°$.

— Par un point M d'une ellipse, on mène les deux rayons vecteurs MF et MF' ainsi que la normale ML; trouver le lieu des points P situés sur la normale et tels que l'on ait $\overline{MP}^2 = MF \times MF'$.

— Former l'équation qui représente le système des 4 normales qu'on peut mener d'un point $(\alpha\beta)$ à une ellipse, ou à une hyperbole donnée.

— Par un point fixe pris à l'intérieur d'une ellipse, on mène une sécante; sur une perpendiculaire élevée à cette sécante par le point fixe, on porte à partir de ce point une longueur égale à la moyenne géométrique des deux segments de la sécante. On demande le lieu des extrémités de ces longueurs quand on fait tourner la sécante autour du point fixe.

— Par un point M quelconque pris sur une ellipse on mène la normale MAB qui coupe le grand axe en A, et le petit axe en B. Démontrer qu'on a, quel que soit M, $MA \times MB = MF \times MF'$.

F et F' étant les deux foyers.

— Établir par le calcul qu'une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent à angle droit.

— Dans quelles régions du plan d'une hyperbole faut-il placer le point d'où l'on mène deux tangentes à la courbe pour que ces tangentes touchent la même branche de l'hyperbole?

Rechercher si un point donné $(\alpha\beta)$ est intérieur ou extérieur à la parabole $(ax + by)^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

— Trouver dans le plan de la parabole un point tel que les normales menées de ce point à la courbe fassent deux à deux entre elles des angles de 120°.

— Lieu des pôles des normales:

1° à l'ellipse; 2° à l'hyperbole; 3° à la parabole.

— Trouver les points de la courbe $\rho = a\sqrt{\cos 2\omega}$ où la tangente est parallèle à l'axe polaire.

— Construire géométriquement les éléments principaux d'une parabole dont on connait:

1° L'axe et 2 points;

2° 3 points et la direction de l'axe.

— Soit l'équation $y^2 = 2px + qx^2 + R$ (en coordonnées rectangles) p et q étaient connus, déterminer R de manière que l'origine soit un foyer et calculer l'abscisse de l'autre foyer.

— Le produit des aires du parallélogramme inscrit à l'ellipse et du parallélogramme circonscrit correspondant est égal à $8a^2b^2$.

Géométrie analytique à trois dimensions.

— Génération du paraboloïde elliptique par le mouvement d'un cercle. — Ce mode de génération peut-il donner tous les paraboloïdes elliptiques?

— Lieux des centres des sections obtenues en coupant la surface $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x$ par des plans passant : 1° par un point donné; 2° par une droite donnée.

— Trouver les divers lieux des points tel que le rapport de leurs distances :

1° à un point et à un plan fixes;

2° à une droite et à un plan fixes;

3° à une droite et à un point fixes;

4° à deux droites fixes,

soit constant.

— Lieu des perpendiculaires menées par le sommet du cône $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ à tous les plans tangents.

— Si un trièdre trirectangle a son sommet au centre de l'ellipsoïde, la somme des carrés des inverses des segments déterminés par la surface sur les trois arêtes du trièdre est constante.

— Le cône formé par les normales menées aux sections centrales d'aire constante dans l'ellipsoïde n'est pas de révolution; trouver les plans cycliques.

— Cônes du deuxième degré qui passent par la rencontre de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et du cylindre $y^2 + x^2 - Rx = 0$. Combien y en a-t-il?

— Étant données trois axes rectangulaires et un point sur chacun d'eux, calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit et celles du centre du cercle inscrit, au triangle formé par les trois points.

— Établir que si un cône a pour sommet un point d'un hyperboloïde de révolution et équilatère, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, et pour base le cercle de gorge, les sections antiparallèles sont perpendiculaires au plan du cercle de gorge.

— Par une droite ($x = az + p$, $y = bz + q$) mener les plans tangents à une surface du deuxième ordre et former l'équation qui représente le système de ces plans tangents.

Appliquer à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

— Former l'équation générale des surfaces du deuxième ordre qui contiennent deux droites données, et deux points donnés.

Distinguer entre le cas où les deux droites données sont dans un même plan, et celui où elles ne se rencontrent pas.

— Former l'équation du paraboloïde hyperbolique contenant l'axe des z, une parallèle à l'axe des x, et un point sur chacun des axes ox et oy.

— Former l'équation de l'hyperboloïde à une nappe rapporté aux deux génératrices rectilignes qui passent par un point de la surface, et au diamètre conjugué de leur plan.

Même question pour le paraboloïde hyperbolique.

— On donne la parabole ($z = 0$, $y^2 = 2px$) et on demande le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes rencontrent le plan xoy sur la parabole donnée.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 13272-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 289 et suiv.)

LII. **Théorème.** — MD, MD′, DD′ (fig. 23) *sont trois tangentes à une parabole,* I *le point de contact de* DD′, F *le foyer; on a* FD$\times$FD′ = FM$\times$FI.

Les triangles IDF et D′MF sont semblables, car, d'après le problème précédent, les angles IFD et MFD′ sont égaux, et il en est de même des angles IDF et D′MF qui ont même mesure; on en conclut la proportion $\frac{DF}{MF} = \frac{FI}{D'F}$; d'où la relation proposée.

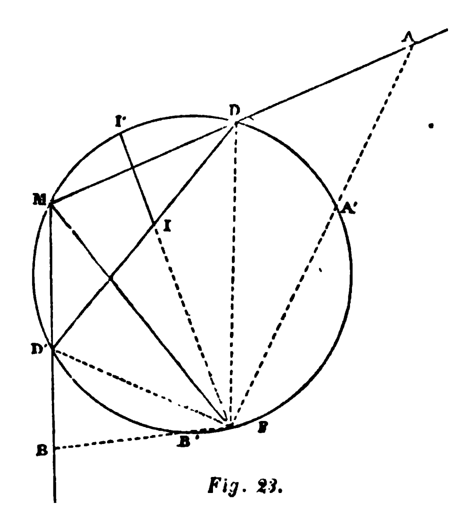


Fig. 23.

LIII. **Théorème.** — *Si deux tangentes* (fig. 23) *issues du point* M *et dont les points de contact sont* A *et* B, *sont coupées par une troisième tangente en* D *et* D′, *on a la proportion*

$$\frac{MD}{DA} = \frac{BD'}{MD'}.$$

Les triangles DFA et MFD′ sont semblables, car ils ont : 1° les angles DAF et D′MF égaux comme étant tous deux égaux à l'angle IDF (XLVII et LI); 2° les angles DFA et MFD′

égaux (LI); on en conclut la proportion

$$\frac{DA}{DF} = \frac{MD'}{D'F}.$$

De même, les triangles D'FB et MDF sont semblables comme ayant : 1° les angles D'FB et MFD égaux, puisqu'ils ont pour mesure des arcs égaux B'D' et MD (LI); 2° les angles FBD' et DMF égaux comme tous les deux égaux à l'angle DD'F; d'où la proportion

$$\frac{MD}{DF} = \frac{D'B}{D'F}.$$

En divisant ces deux proportions membre à membre, il vient

$$\frac{MD}{DA} = \frac{BD'}{MD'},$$

c'est-à-dire la proportion donnée.

Corollaire. — Si l'on a MA = MB, c'est-à-dire si les tangentes limitées à leur point de rencontre et à leurs points de contact sont égales, on peut, d'après une propriété connue des proportions, écrire la précédente

$$\frac{DA + MD}{MD} = \frac{MD' + D'B}{D'B}$$

et comme, par hypothèse

$$DA + MD = MD' + D'B,$$

il en résulte $\quad MD = D'B$

et aussi $\quad MD' = DA.$

Donc, *si deux tangentes égales menées à une parabole sont coupées par une troisième, les segments déterminés sur ces tangentes sont égaux, mais les segments égaux ne sont pas placés de la même manière sur les tangentes.*

LIV. **Théorème de Steiner.** — *Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole se trouve sur la directrice.*

Lemme. — *Dans un triangle* ABC (fig. 24) *une hauteur* AD *rencontre la circonférence circonscrite en un point* O *symétrique par rapport au côté* BC, *du point de concours des hauteurs.*

En joignant BH et BO, on a deux triangles égaux BHD et BDO, car ils ont un côté commun BD; l'angle HBC

complémentaire de l'angle C est égal à l'angle DBO, complémentaire de l'angle O, et les deux angles O et C ont même mesure, donc DH = DO.

Soient (*fig.* 24) AB, BC, AC trois tangentes à une parabole de foyer F ; la circonférence qui passe par les trois A, B, C passe aussi par le foyer F. Soient O le point de concours des hauteurs, G son symétrique par rapport à BC, I le point symétrique de F par rapport à BC, les deux droites IO et FG vont rencontrer évidemment la droite BC au même point N. On sait en outre (II, Remarque XLIII) que le point I appartient à la directrice.

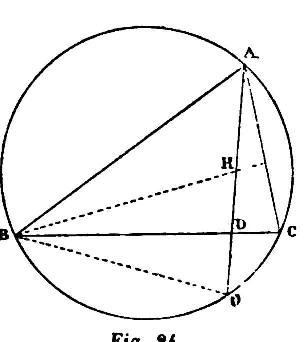


Fig. 24.

D'abord, il s'agit de déterminer l'angle APN; extérieur au triangle NBP, il est égal à la somme des angles NBP et PNB

$$APN = PNB + NBP;$$

mais, d'après la figure,

$$PNB = CNG = CAG - FAB;$$

d'autre part, l'angle NBP, extérieur au triangle ABD, a pour valeur

$$NBP = \frac{\pi}{2} + BAG$$

et par suite

$$APN = \frac{\pi}{2} + BAG - FAB + CAG = \frac{\pi}{2} + CAF.$$

Si donc, laissant fixes l'angle A et le point F, on donne à BC toutes les positions pour lesquelles l'angle BFC est supplémentaire de l'angle A, cette droite BC, comme on l'a vu (XLIX), enveloppera une parabole de foyer F et tangente aux côtés de l'angle A. Dans ce mouvement la droite NPO restera fixe, puisque l'angle APN a une valeur indépendante de la position de BC; cette droite contenant tous les points symétriques du foyer par rapport à toutes les positions de la tangente BC est la directrice de la parabole; elle contiendra

également tous les points de concours des hauteurs de tous les triangles obtenus dans le mouvement de BC.

Corollaire I. — De ce qui précède, on déduit comme cas particulier: *les centres de tous les triangles équilatéraux circonscrits à une même parabole sont situés sur la directrice de cette parabole*, et: *les directrices de toutes les paraboles inscrites à un même triangle équilatéral donné passent toutes par le centre de ce triangle.*

Corollaire II. — Si l'on remarque que quatre droites données sur un plan peuvent être touchées par une même parabole (XLVIII, Corollaire II), on dira : *dans les quatre triangles que forment trois à trois quatre droites tracées sur un même plan, les points de concours des hauteurs appartiennent tous quatre à une même droite.* (Steiner.)

LV. **Théorème.** — *Si par le point* A (fig. 25) *de con-*

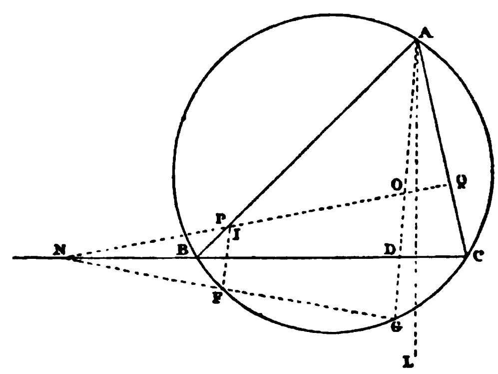


Fig. 25.

cours de deux tangentes on mène une parallèle à l'axe, l'angle LAC *que fait cette parallèle avec l'une des tangentes est égal à* FAB *que fait avec l'autre la ligne qui joint le foyer au point* A.

D'après le théorème précédent, la ligne NPO est la directrice de la parabole définie par le foyer F et les tangentes AB et AC; la parallèle AL à l'axe est perpendiculaire à cette directrice. Soit Q le point où NP rencontre AC, l'angle LAC a pour complément l'angle AQP; or l'angle APN extérieur

au triangle PAQ a pour valeur

$$APN = AQP + A,$$

d'où

$$AQP = APN - A,$$

ou à cause de la valeur de APN (LIV),

$$AQP = \frac{\pi}{2} - BAF$$

et par suite

$$LAC = BAF.$$

Corollaire I. — Dans le cas où le point F occupe le milieu de l'arc BFC, il est évident que la ligne AL coïncide avec AF; AL est l'axe lui-même de la parabole.

Corollaire II. — *Déterminer l'angle des axes de deux paraboles inscrites dans le même angle et de foyers donnés.*

Soient *(fig. 26)* A le point de concours des deux tangentes

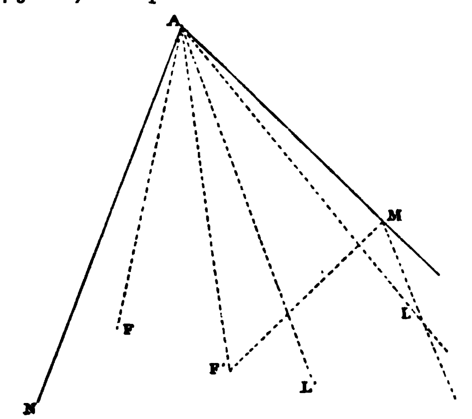


Fig. 26.

communes; F et F' les foyers; AL, AL' les parallèles aux axes menés par le point A: il est facile de voir que l'angle LAL' est égal à l'angle FAF'.

LVI. **Problème.** — *Étant donnée une parabole par son foyer et un angle circonscrit, construire une autre parabole inscrite dans le même angle dont l'axe fait avec celui de la première un angle donné, et connaissant: 1° ou son point de contact sur une des tangentes données; 2° ou une troisième tangente.*

Soient *(fig. 26)* A le sommet de l'angle circonscrit commun,

F le foyer de la première parabole; dans les deux cas on mènera la ligne AF' faisant avec AF l'angle donné (LV, Corollaire II); cette droite contiendra le foyer de la parabole cherchée; cela fait, dans le premier cas, on mènera la ligne AL' faisant avec l'une des tangentes, AM par exemple, un angle L'AM égal à l'angle F'AN; AL' sera la direction de l'axe de la deuxième parabole (LV); par le point donné M, on mènera une parallèle à AL' et par le même point une droite MF' faisant avec AM le même angle que fait avec cette droite la parallèle précédente; MF' contiendra le foyer F' (XLII); dans le second cas, le foyer sera au point de rencontre de AF' et du cercle circonscrit aux trois tangentes. Connaissant le foyer et deux tangentes, la parabole est déterminée. Dans les deux cas, le problème n'admet qu'une solution.

VI

PROPRIÉTÉS DES NORMALES

LVII. **Théorème.** — *La normale en un point d'une parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et par la parallèle à l'axe menée par ce point.*

Cette propriété est une conséquence directe du théorème VII.

Soient (*fig. 27*) MD la normale en un point M d'une parabole, MF le rayon vecteur; le triangle MFD est évidemment isoscèle et I' le milieu de MD est la projection du point F sur la normale; I étant la projection du foyer sur la tangente, le quadrilatère MIFI' est un carré et MI' = FI; par suite MD = 2FI; si l'on désigne par α l'angle FMD, le triangle ISF donne $\mathrm{IF} = \dfrac{p}{2\cos\alpha}$ et alors $\mathrm{MD} = \dfrac{p}{\cos\alpha}$,

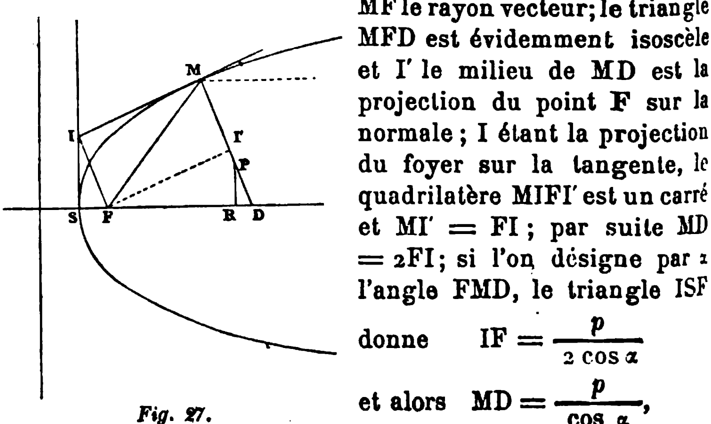


Fig. 27.

et si l'on remarque que MD cos α représente la projection de MD sur l'axe, projection que l'on appelle *sous-normale*, on dira que *dans la parabole la sous-normale est constante et égale au paramètre*. Cette projection est aussi celle de MD sur le rayon vecteur; elle est donc constante, quel que soit le point considéré.

LVIII. **Théorème.** — *Par un point pris dans le plan d'une parabole on peut, en général, mener trois normales à la courbe.*

Soient *(fig. 27)* P, le point considéré, PR sa distance à l'axe, positive si P est au-dessus de l'axe; la position de ce point sera déterminée par la longueur FR $= l$ et par PR $= d$. Le triangle PRD donne $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{\mathrm{RD}}$;

on en tire facilement

$$\frac{\sin \alpha}{d} = \frac{\cos \alpha}{\mathrm{RD}} = \frac{1}{\pm\sqrt{d^2 + \overline{\mathrm{RD}}^2}};$$

d'où
$$\cos \alpha^2 = \frac{\overline{\mathrm{RD}}^2}{d^2 + \overline{\mathrm{RD}}^2}.$$

De plus, le triangle isoscèle FMD donne

$$\mathrm{FD} = \frac{\mathrm{MD}}{2 \cos \alpha} = \frac{p}{2 \cos^2 \alpha}$$

et il est à remarquer que cette expression n'est autre que celle du rayon vecteur FM.

En outre
$$\mathrm{FD} = l + \mathrm{RD};$$

égalant ces deux expressions de FD et résolvant par rapport à $\cos^2 \alpha$, il vient $\cos^2 \alpha = \frac{p}{2(l + \mathrm{RD})}$.

Égalant aussi les deux expressions trouvées de $\cos^2 \alpha$ et ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de RD, on a

$$2\overline{\mathrm{RD}}^3 + (2l - p)\,\overline{\mathrm{RD}}^2 - pd^2 = 0. \quad (1)$$

Cette équation est du troisième degré, par rapport à RD; elle a donc trois racines; à chacune de ces racines correspond une normale issue du point P; donc de ce point partent trois normales.

Remarque. — *Si l'on porte sur l'axe d'une parabole, à partir du sommet, une longueur égale au rayon vecteur d'un point quel-*

conque de la courbe, et sur la perpendiculaire à l'axe menée du point obtenu une longueur égale à la normale au point choisi sur la courbe, l'extrémité de cette longueur est un point de la parabole.

Il suffit de remarquer qu'en vertu des expressions trouvées pour MF et pour MD, on a

$$\overline{MD}^2 = 2p \times MF \text{ (*)};$$

d'où la propriété énoncée, en vertu du théorème XLI.

LIX. **Théorème.** — *Pour tous les points d'où partent deux normales rectangulaires, la troisième normale se projette sur l'axe suivant une longueur constante.*

Soit *(fig. 28)* P un point d'où partent les normales PM, PM', PM'', les deux premières étant rectangulaires; D, D', D'' sont les points où ces normales rencontrent l'axe; d'après l'équation (1) du théorème précédent, le produit des distances du point R aux trois points D, D', D'' a pour expression :

$$RD \times RD' \times RD'' = \frac{pd^2}{2};$$

or, le triangle DPD' est rectangle en P, donc

$$\overline{RP}^2 \text{ ou } d^2 = RD \times RD'$$

et la considération des deux relations précédentes donne

Fig. 28.

$$RD'' = \frac{p}{2}.$$

De plus, la sous-normale D''Q'' étant égale à p, on a

$$RQ'' = \frac{3p}{2},$$

ce qui démontre le théorème.

(*) Cette propriété a été démontrée et utilisée par M. d'Ocagne; voy. *Journal de Math. élém.*, 3e année.

LX. **Théorème.** — *Le lieu du point d'où partent deux normales rectangulaires est une parabole.*

Il est évident, d'après le théorème précédent, que si le point P *(fig. 28)* est tel que la normale PM' a une projection sur l'axe égale à $\frac{3p}{2}$, les deux autres normales issues du même point sont rectangulaires. A la valeur de RD' égale à $\frac{p}{2}$ correspondent pour l et d des valeurs liées par une relation que l'on obtiendra en substituant à RD cette valeur $\frac{p}{2}$, dans l'équation (1) (XXIII); cette relation est

$$d^2 = \frac{p}{2}(l - p).$$

Si l'on prend à partir du point F un point S_1 tel que $FS_1 = p$, la distance du point R à ce point sera précisément $l - p$ et la relation précédente appliquée au point P s'écrira

$$\overline{RD}^2 = \frac{p}{2} RS_1,$$

ce qui prouve que, dans ces conditions, le point P se trouve sur une parabole de paramètre égal à la moitié de celui de la parabole primitive (XL).

LXI. **Théorème.** — *Le centre de gravité du triangle formé par les pieds des trois normales issues d'un même point se trouve sur l'axe.*

Soient *(fig. 29)* D_1, D_2, D_3 les points où les trois normales issues d'un point P rencontrent l'axe; on sait (LVIII) que ces points sont déterminés par l'équation

$$2\overline{RD}^3 + (2l - p)\overline{RD}^2 - pd^2 = 0 \qquad (1)$$

M_1 étant le pied d'une de ces normales, M_1Q_1 son ordonnée, les triangles semblables $M_1D_1Q_1$ et RPD_1 donnent la proportion

$$\frac{PR}{RD_1} = \frac{M_1Q_1}{Q_1D_1};$$

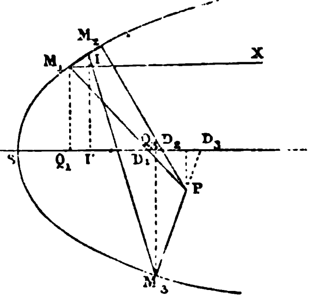


Fig. 29.

d'où, en vertu des notations employées,

$$RD_1 = \frac{pd}{M_1Q_1}.$$

Si dans l'équation (1) on remplace RD par l'expression $\frac{pd}{y}$, y désignant l'une quelconque des ordonnées des pieds des trois normales issues de P, puis multipliant tous les termes par y^2 et réduisant, on arrive à la nouvelle équation

$$y^3 - p(2l - p)y - 2p^2d = 0. \qquad (2)$$

Cette équation est privée de termes en y^2, donc la somme de ses racines est nulle; en les désignant par y_1, y_2, y_3, on a

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Pour que cette relation soit satisfaite, il faut que l'une de ces valeurs soit d'un signe contraire à celui des deux autres; dans le cas de la figure y_3 est négative, et alors

$$y_1 + y_2 = y_3.$$

Cela étant, soit I le milieu de M_1M_2; dans le trapèze $M_1Q_1Q_2M_2$, II′ joint le milieu des côtés non parallèles, donc

$$II' = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_3}{2} = \frac{M_3Q_3}{2}.$$

Soit G le point où la droite IM_3 rencontre l'axe et II′ l'ordonnée du point I; les triangles semblables II′G et M_3Q_3G montrent que, en vertu des dernières égalités,

$$IG = \frac{M_3G}{2}$$

et par suite que le point G partage la médiane IM_3 en deux parties, dont l'une est le tiers de la ligne totale, c'est-à-dire que ce point est le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

LXII. **Théorème.** — M_1, M_2, M_3 (fig. 29) *sont les pieds des normales menées d'un point* P *à une parabole : 1° la corde* M_1M_2 *qui joint les deux points situés d'un même côté de l'axe et la droite qui joint le troisième point* M_3 *au sommet sont également inclinées sur l'axe; 2° la corde qui joint deux points situés de part et d'autre de l'axe fait avec lui un angle supplémentaire de celui que fait avec cet axe la droite qui joint le sommet au troisième point.*

1° On a vu, en effet (XLI), que si θ désigne l'angle de M_1M_2

avec l'axe, on a $\qquad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{2p}{y_1 + y_2}$.

ou en vertu de la relation

$$y_1 + y_2 = y_3$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2p}{y_3},$$

Le point M appartenant à la parabole, on a aussi

$$y_3^2 = 2px_3 \text{ ou } \frac{y_3}{x_3} = \frac{2p}{y_3}$$

et par suite $\qquad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y_3}{x_3} = \operatorname{tg}\theta'.$

θ' désignant l'angle de SM_3 avec l'axe, c'est-à-dire que $\theta = \theta'$.

2° Soit θ_1 l'angle de M_1M_3 avec l'axe ; la relation du théorème VI donne dans ce cas

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{2p}{y_1 - y_3},$$

puisque y_3 est négative ; or on sait que

$$y_1 - y_3 = -y_2,$$

de sorte que $\qquad \operatorname{tg}\theta_1 = -\dfrac{2p}{y_2}.$

Le point M_2 appartenant à la parabole, on a, comme dans le premier cas, en désignant par θ'_1 l'angle de SM_2 avec l'axe

$$\operatorname{tg}\theta'_1 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{2p}{y_2} = -\operatorname{tg}\theta_1,$$

c'est-à-dire que $\qquad \theta'_1 = \pi - \theta_1.$

Corollaire. — *Le cercle qui passe par les pieds des trois normales issues d'un point et menées à une parabole, passe par le sommet.*

Par le point M_1, soit M_1X parallèle à l'axe ; l'angle $M_2M_1M_3$ est partagé par cette droite en deux parties ; d'après ce qu'on vient de démontrer, l'angle

$$M_2M_1X = \theta = \theta' = M_3SR;$$

de même l'angle M_3M_1X supplémentaire de M_1M_3 avec l'axe est égal à θ'_1 ou à M_2SR ; donc l'angle total $M_2M_1M_3$ est égal à l'angle M_3SM_2 et par suite le cercle qui passe par les trois points M_1, M_2, M_3 passe aussi par le point S.

LXIII. **Théorème.** — *Le produit des ordonnées et celui des abscisses de deux points dont les normales se coupent sur la courbe est constant.*

Le produit des racines de l'équation (2) (LXI) est donné par la relation $y_1y_2y_3 = 2p^2d$
et si l'on suppose que le point P *(fig. 29)* d'où partent les normales vient coïncider avec M_3, on a $d = y_3$ et la relation précédente devient $y_1y_2 = 2p^2$.

Comme les deux points M_1 et M_2 appartiennent à la parabole, on a $y_1^2 = 2px_1$ et $y_2^2 = 2px_2$
et par suite $y_1y_2 = \sqrt{2px_1} \times \sqrt{2px_2} = 2p\sqrt{x_1x_2}$;
d'où, en vertu de la valeur du produit y_1y_2 qu'on vient de trouver $x_1x_2 = p^2$,
ce qui justifie l'énoncé.

LXIV. **Théorème.** — *Les normales issues d'un point pris sur une parabole font avec les rayons vecteurs correspondants des angles* α, α', α'' *tels que*

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi.$$

En effet, si l'on divise par p les deux membres des deux expressions suivantes obtenues, théorèmes LXI et LXIII, savoir

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$
$$y_1y_2 = 2p^2$$

auxquelles satisfont les ordonnées des pieds de ces normales, on voit facilement qu'elles donnent lieu aux deux suivantes

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha'' = 0$$
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = 2.$$

En vertu de la seconde, on a

$$\operatorname{tg} (\alpha + \alpha') = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha'}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha'$$

ou, à cause de la première,

$$\operatorname{tg} (\alpha + \alpha') = - \operatorname{tg} \alpha'';$$

égalité qui ne peut avoir lieu que si

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi.$$

Corollaire. — *L'angle que fait une normale issue d'un point d'une parabole avec la normale en ce point est supplémentaire de l'angle que fait avec l'axe la seconde normale issue du même point.*

Soient *(fig. 15)* P le point d'où partent les normales PM_1, PM_2, A et B les points où elles rencontrent l'axe, C le point où la normale en P rencontre cet axe. Le triangle PBC renfermant les angles $\widehat{PBC} = \alpha'$, $\widehat{PCB} = \alpha'$, il faut, en vertu de la relation que l'on vient d'obtenir, que l'angle BPC soit égal à α; de même l'angle APC est égal à α'.

LXV. **Théorème.** — *Si sur chacune des deux normales issues d'un point* P *d'une parabole, autres que celle qui est normale en ce point, on porte, à partir du point* P *une longueur égale à la portion interceptée entre l'axe et la courbe, les deux points obtenus sont sur un cercle tangent en* P *à la parabole.*

Soient *(fig. 30)* A' et B' les points ainsi obtenus, c'est-à-dire tels que

$$PB' = M_2B, \; PA' = M_1A;$$

on sait (LVII) que les longueurs M_1A et M_2B ont pour expressions

$$M_1A \text{ ou } PA' = \frac{p}{\cos\alpha} \quad M_1A \text{ ou } PB' = \frac{p}{\cos\alpha'}$$

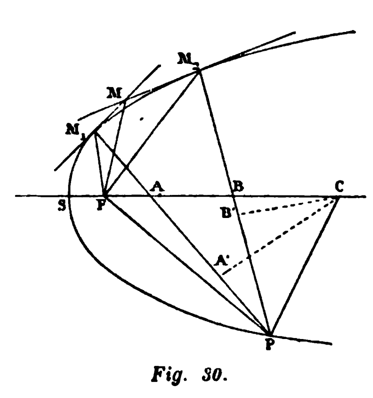


Fig. 30.

L'angle A'PC est d'après le corollaire du théorème précédent égal à α'; donc la portion de la normale PC qui se projette suivant PA' a pour expression

$$\frac{p}{\cos\alpha\cos\alpha'};$$

or de ce que l'angle CPB' est égal à α, la portion de PC qui se projette suivant PB' a la même valeur; donc les perpendiculaires élevées en A' et B' à PA et PB coupent PC au même point, et par suite les points P, A', B' sont sur un cercle dont le diamètre est la normale en P, c'est-à-dire tangent en P à la courbe.

Remarque. — L'expression obtenue dans le théorème LXIV, savoir

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha = 2,$$

peut s'écrire $\sin\alpha \sin\alpha' = 2 \cos\alpha \cos\alpha'$

ou

$\cos\alpha \cos\alpha' = \sin\alpha \sin\alpha' - \cos\alpha \cos\alpha' = -\cos(\alpha + \alpha') = \cos\alpha''$

en vertu de la relation

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi.$$

Il en résulte que le diamètre du cercle précédent a pour expression $\dfrac{p}{\cos\alpha \cos\alpha'} = \dfrac{p}{\cos\alpha''}$, c'est-à-dire la longueur de la normale en P, limitée à la courbe et à l'axe.

LXVI. **Théorème.** — *1° La bissectrice de l'angle des rayons vecteurs de deux points dont les normales se coupent en un point d'une parabole, est parallèle à la normale en ce point ; 2° le lieu du point de concours des tangentes en deux pareils points est une droite perpendiculaire à l'axe.*

1° On sait *(fig. 30)* que le triangle M_1FA est isoscèle et que l'angle M_1FA est égal à $\pi - 2\alpha$; de même $M_2FB = \pi - 2\alpha'$; si donc la ligne FM est bissectrice de l'angle M_1FM_2, l'angle MFA a pour expression $\dfrac{\pi - 2\alpha + \pi - 2\alpha'}{2} = \pi - (\alpha + \alpha')$ $= \alpha''$, c'est-à-dire qu'il est égal à l'angle PCA ou que les droites FM et PC sont parallèles.

2° Soit M le point de concours des tangentes en M_1 et M_2; on sait que la ligne FM est bissectrice de l'angle M_1FM_2 (XLIV) et de plus (XLVI) que

$$\overline{FM}^2 = FM_1 \times FM_2;$$

or, on sait (LVIII), en employant les notations des théorèmes précédents, que

$$FM_1 = \frac{p}{2\cos^2\alpha}, \quad FM_2 = \frac{p}{2\cos^2\alpha'}$$

et comme, d'après la remarque du théorème XXX,

$$\cos\alpha \cos\alpha' = \cos\alpha'',$$

on a $$\overline{FM}^2 = \frac{p^2}{4\cos^2\alpha''},$$

d'où $$FM = \frac{p}{2\cos\alpha''}.$$

Cette longueur est précisément égale à la moitié de la normale PC; or on sait que celle-ci se projette sur l'axe suivant une longueur constante p; donc la ligne FM qui lui est parallèle, se projettera sur l'axe suivant une longueur égale à $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire que le point M se projettera sur l'axe à la distance $\frac{p}{2}$ du foyer et, par suite se trouvera toujours sur une perpendiculaire à l'axe menée à cette distance du foyer.

LXVII. **Problème.** — *Construire les tangentes et les normales en deux points tels que ces normales se coupent sur la courbe en un point donné.*

On sait, d'après le théorème précédent, que le point M *(fig. 30)* de concours des tangentes est à la fois sur une parallèle à la normale en P, menée par le foyer, et sur une perpendiculaire à l'axe, distante du foyer de la longueur $\frac{p}{2}$; d'où les constructions suivantes : on construira à la distance $\frac{p}{2}$ du foyer une perpendiculaire à l'axe; la normale au point donné étant construite, on mènera par le foyer une parallèle à cette normale; les deux droites ainsi obtenues se couperont en un point qui sera le point de concours des tangentes cherchées; on construira ces tangentes d'après le procédé connu, et il suffira de joindre leurs points de contact au point donné pour avoir les normales correspondantes.

LXVIII. **Théorème.** — *Le cercle circonscrit au triangle* M_1M_2P (fig. 30) *et qui passe par le sommet* (LXII, Corollaire) *passe aussi par le pôle* M *de la corde* M_1M_2.

En effet, dans le quadrilatère MM_1MM_2 les angles PM_1M et PM_2M étant des angles droits, les deux angles M_1MM_2 et M_1PM_2 sont supplémentaires, et par suite le quadrilatère M_1PM_2M est inscriptible dans un cercle, ce qui démontre le théorème.

On déduit de ce qui précède une autre solution du problème XXXII; le cercle déterminé par les points P, S, M_1, M_2, M a évidemment pour diamètre la droite PM, par conséquent l'angle MSP est droit; d'où la construction suivante: la droite, lieu du point M étant menée, on élèvera en S une perpendiculaire à SP qui rencontrera la droite précédente au point M, d'où partent les tangentes cherchées.

LXIX. **Problème.** — *Construire dans une parabole la corde de longueur minimum normale à la courbe à une de ses extrémités.*

Soit *(fig. 30)* PM_1 une pareille corde; en menant les ordonnées des deux extrémités, on voit facilement que la longueur PM_1 a pour expression, d'après les notations employées,

$$PM_1 = \frac{y_1 - y_2}{\sin \alpha};$$

or, on sait que $y_1 = p \operatorname{tg} \alpha, \quad y_2 = p \operatorname{tg} \alpha'$;

donc $$PM_1 = \frac{p(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha')}{\sin \alpha}.$$

Mais en vertu des relations établies (LXIV), on a

$$\operatorname{tg} \alpha' = -\operatorname{tg}(\alpha + \alpha') = -\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' = -\operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

de sorte que, finalement, il vient

$$PM_1 = \frac{2p\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)}{\sin \alpha} = \frac{2p}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Cette expression montre que le minimum de PM_1 correspond au maximum du produit $\sin^2 \alpha \cos \alpha$, en appliquant à ce produit le principe de Fermat, on trouve facilement que, pour le cas du maximum, l'angle α doit satisfaire la relation $$\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 0,$$
d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{2}.$$

A cette valeur double de $\operatorname{tg} \alpha$ correspondent deux cordes symétriques par rapport à l'axe et répondant à l'énoncé.

Il est à remarquer que cette valeur est indépendante du paramètre de la parabole; elle convient donc à toutes les paraboles.

Pour construire cette corde, il est commode de déterminer la longueur du rayon vecteur du point où elle est normale; pour cela, on a

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

d'où, par le rayon vecteur (LVIII)

$$FM_1 = \frac{p}{2\cos^2\alpha} = \frac{3p}{2}.$$

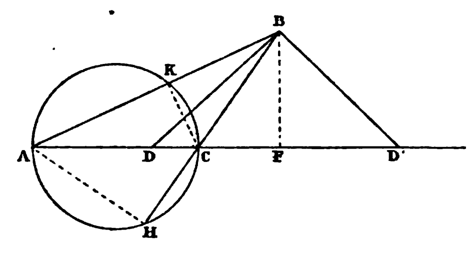
On en déduit la construction suivante: Du foyer comme centre avec $\frac{3p}{2}$ pour rayon on décrit un arc de cercle qui coupe la courbe en deux points et l'axe en un point; en joignant ce point à chacun des deux autres, on a les deux cordes symétriques par rapport à l'axe et qui répondent à la question. *(A suivre.)*

QUESTION 179.

Solution par M. Longueville, Collège de Charleville.

Construire géométriquement un triangle connaissant un côté, le pied de la hauteur correspondante et sachant que les bissectrices d'un des angles adjacents à ce côté sont égales.

Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle



demandé. On connaît le côté BC, le pied H de la hauteur correspondante et l'on sait que les bissectrices de l'angle B sont égales.

Dans le triangle AHC, qui est rectangle,

$$ACH = BCF = 45^\circ + \frac{B}{2};$$

donc $CAH = 90^\circ - 45^\circ - \frac{1}{2}B = 45^\circ - \frac{B}{2}.$

De même, dans le triangle BAF, $BAF = 45^\circ - \frac{B}{2}$, donc CAH = CAB. Il résulte de là que si sur AC comme diamètre on décrit une circonférence, les cordes CK et CH seront égales. De là, la construction suivante :

Au point H, on élèvera sur BCH une perpendiculaire ; puis, du point C comme centre avec CH pour rayon, on décrira une circonférence ; par le point B, on mènera une tangente à cette circonférence, et la rencontre de la perpendiculaire avec cette tangente déterminera le point A, et par suite le triangle.

Du point B, on peut mener deux tangentes à la circonférence décrite avec CH pour rayon ; on obtiendra donc deux triangles qui répondront à la question. Or, ces deux triangles étant égaux, il n'y aura en réalité qu'une solution à ce problème.

Pour que le problème soit possible

on doit avoir $CH \leq CB$

ou comme $CH = CK$

$CK \leq CB$

c'est-à-dire que la perpendiculaire CK est plus petite que l'oblique CB. Le problème est donc toujours possible.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gindre, de Lons-le-Saulnier ; Arthus Bertrand, école Albert-le-Grand, Arcueil ; Deslais, au Mans ; Marin, à Angers ; Chaillet, à Montauban.

QUESTION 180.

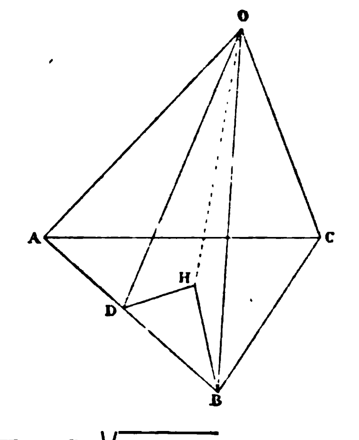
Solution par M. LONGUEVILLE, élève au Collège de Charleville.

Sur les trois arêtes d'un trièdre on prend trois longueurs égales à l'unité OA, OB, OC.

Démontrer que si l'on appelle V *le volume du tétraèdre, on a*

$$3V=\sqrt{\sin\frac{(a+b+c)}{2}\sin\frac{b-c-a}{2}\sin\frac{(c+a-b)}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}$$

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet O sur la base ABC. H coïncide dans ce cas avec le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



Soient

$$AOB = a,\quad AOC = b,\quad BOC = a,\quad BC = l,\quad AC = m,\quad AB = n,$$

$$l + m + n = 2p.$$

On a $3\ V = \text{aire ABC . OH} = S\sqrt{1 - R^2}$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16\ S^2 - l^2m^2n^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16p(p-l)(p-m)(p-n) - l^2m^2n^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2l^2m^2 + 2m^2n^2 + 2l^2n^2 - l^4 - m^4 - n^4 - l^2m^2n^2}$$

Dans le triangle ABO abaissons la perpendiculaire OD, nous aurons

$$\frac{n}{2} = \sin\frac{c}{2}, \qquad n = 2\sin\frac{c}{2};$$

de même on aurait $$l = 2 \sin \frac{a}{2}$$

$$m = 2 \sin \frac{b}{2}$$

remplaçons l, m, n par leur valeur respective, on a

$$3\,V = \frac{1}{4}\sqrt{4(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{4}}$$

ou en remplaçant $\cos^2 b$ par $(1 - \sin^2 b)$, $\cos^2 c$ par $1 - \sin^2 c$,

et ajoutant et retranchant $\frac{\sin^2 b \sin^2 c}{4}$

$$3\,V = \sqrt{\frac{-\cos^2 a - 1 + \sin^2 b + \sin^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c + \sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c}{4}}$$

mais

$$-1 + \sin^2 b + \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c = -\cos^2 b \cos^2 c,$$
$$= -(1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c);$$

dès lors

$$3\,V = \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{4}}$$

ou

$$3V = \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c)(\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c)}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos (b - c) - \cos a}{2} \cdot \frac{\cos a - \cos (b + c)}{2}}$$

$$= \sqrt{\sin \frac{(a + b - c)}{2} \cdot \sin \frac{(a + c - b)}{2} \cdot \sin \left(\frac{b + c - a}{2}\right) \sin \frac{(a + b - c)}{2}}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lesoille, Speckel, à Sedan; Croneau, à Versailles.

QUESTION 183.

Solution par M. DESLAIS, élève au Lycée du Mans.

Prouver que (a — b) $\sqrt{ab}$ *est divisible par* 24 *si* ab *est un carré parfait et que* a *et* b *soient de même parité.*

Nous allons démontrer que ce produit est divisible par 8 et par 3.

1° *Par* 8. Supposons a et b pairs ; $a = 2n$, $b = 2n'$. Le produit peut se mettre sous la forme

$$2(n - n')\sqrt{4nn'} = 4(n - n')\sqrt{nn'}.$$

Si n et n' sont de même parité, $n - n'$ est divisible par 2; dans le cas contraire le facteur pair est divisible par 4, puisque nn' est carré parfait. Le produit est donc divisible par 8. Soient a et b impairs ; $a - b$ est pair, $ab = (2n + 1)(2n' + 1)$ est un carré parfait, c'est-à-dire un multiple de 8 augmenté de 1 ; il en résulte que a et b sont des multiples de 8 augmentés de 1 et alors $a - b$ est divisible par 8.

2° *Par* 3. Si a et b sont multiples de 3, $a - b$ est divisible par 3. Il en est de même si a et b sont des multiples de 3 plus 1 ou plus 2. Si un seul de ces facteurs est multiple de 3, il l'est de 9, puisque ab est un carré parfait, $\sqrt{ab}$ est alors multiple de 3.

Ils ne peuvent être l'un $m3 + 1$ et l'autre $m3 + 2$ parce qu'un carré parfait n'est jamais $m3 + 2$.

Le produit proposé, étant toujours divisible par 3 et par 8, dans les limites de l'hypothèse, est divisible par 24.

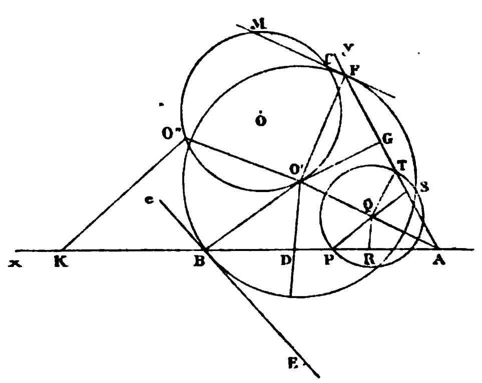
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Clouet, à Epernay ; Croneau, élève du lycée Fontanes ; Huet, à Orléans.

QUESTION 187.

Solution par M. BREUILLÉ, élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

Décrire un cercle ayant son centre sur une circonférence donnée et coupant sous des angles donnés deux droites données.

Soient O la circonférence donnée, Ax, Ay les deux droites



également données.

Supposons que O′ soit la circonférence répondant à la question. Menons en B et en F les tangentes BC, FM.

$$CBx = \alpha, \quad MFy = \beta.$$

Or DBE $=$ CB$x = \alpha$, O′BD $= 90 - \alpha$, BO′D $= \alpha$.

On démontrerait de même que GO′F $= \beta$.

Si l'on connaissait le rayon de la circonférence cherchée, on pourrait construire les deux triangles O′DB et O′FG. Joignons O′A et prenons sur O′A un point quelconque Q; de Q menons QP parallèle à O′B, et de ce même point Q comme centre avec PQ pour rayon décrivons une circonférence. Cette circonférence est homothétique à O′ par rapport à A.

Elle coupe donc Ax et Ay sous les mêmes angles que O′ et réciproquement. Or nous connaissons PQR $= \alpha$ et SQT $= \beta$. Nous pouvons donc construire ces triangles, en nous donnant un rayon arbitraire R.

La circonférence obtenue coupera Ax et Ay sous des angles donnés α et β, mais n'aura pas son centre sur O. Nous joindrons alors QA; nous prolongerons cette ligne en O′ et O″; de O′ et O″ nous mènerons O′B, O″K parallèles à PQ. De O′ et O″ comme centres avec O′B et O″K comme rayons on décrira des circonférences qui seront les circonférences répondant à la question.

Nota. — M. Doguillon, du Lycée Henri IV, a résolu la même question.

QUESTION 195.

Solution par M. GOSSIEAUX, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Sur un quadrant de centre O *on prend un point* C; *déterminer sur la tangente en* A *un point* D *tel que les surfaces des triangles* ACD, OCD *soient entre elles dans un rapport donné* K.

Soit α l'angle AOC, γ l'angle inconnu AOD.

On a

$$\mathrm{DAC} = \frac{\mathrm{AOC}}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Il faut déterminer le point D de façon que

$$\frac{\text{surf ACD}}{\text{surf OCD}} = \mathrm{K};$$

or,

$$\text{surf ACD} = \frac{\mathrm{AD} \,.\, \mathrm{AC} \,.\, \sin \frac{\alpha}{2}}{2}$$

et comme

$$\mathrm{AD} = \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\gamma$$
$$\mathrm{AC} = 2\mathrm{R} \sin \frac{\alpha}{2}$$

on a

$$\text{surf ACD} = \mathrm{R}^2\,\mathrm{tg}\,\gamma \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

de même

$$\text{surf OCD} = \frac{\mathrm{OC} \,.\, \mathrm{OD} \sin(\alpha - \gamma)}{2}.$$

Or

$$\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{R}}{\cos\gamma};$$

donc

$$\text{surf OCD} = \frac{\mathrm{R}^2 \sin(\alpha - \gamma)}{2\cos\gamma};$$

dès lors

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{R}^2\,\mathrm{tg}\,\gamma \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\mathrm{R}^2 \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\cos\gamma}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\gamma \cos\gamma \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin(\alpha-\gamma)}$$

$$\mathrm{K} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\sin\alpha - \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma};$$

d'où $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{K \sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + K\cos\alpha};$$

Si $\alpha = 0 \quad \sin\alpha = 0 \quad \sin\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \cos\alpha = 1;$

donc $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{0}{K} = 0.$$

La tangente étant nulle, D est en A; le problème est impossible.

Si α augmente de 0 à 90° en restant plus petit que 90°, $\operatorname{tg}\gamma$ prend des valeurs positives, de même γ.

Si $\alpha = 90$, $\sin\alpha = 1$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$, $\cos\alpha = 0$.

Dès lors $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{K}{1} = K.$$

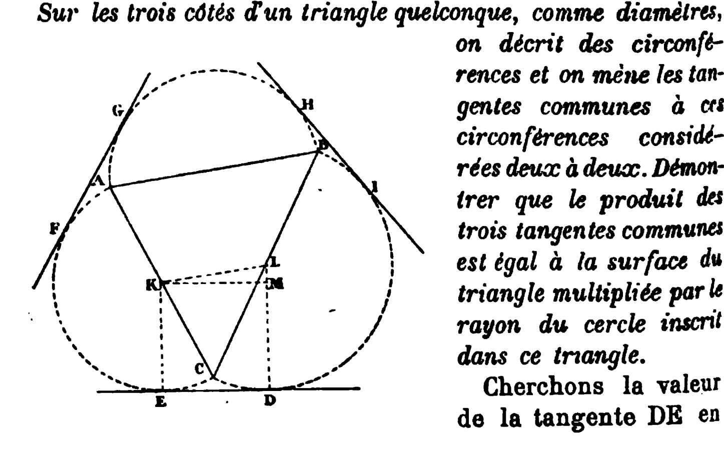
Si $\alpha = 90°$, K est la valeur maximum de $\operatorname{tg}\gamma$, puisque cette valeur est le maximum de α.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, Hoet, de Saint-Quentin ; Letellier, de Tarbes ; Daguillon, lycée Henri IV, à Paris.

QUESTION 196.

Solution par M. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV.

Sur les trois côtés d'un triangle quelconque, comme diamètres, on décrit des circonférences et on mène les tangentes communes à ces circonférences considérées deux à deux. Démontrer que le produit des trois tangentes communes est égal à la surface du triangle multipliée par le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.



Cherchons la valeur de la tangente DE en

fonction des côtés. On a :

$$DE = KM = \sqrt{KL^2 - (DL - KE)^2}.$$

Or $$KL = \frac{c}{2}, \quad DL = \frac{a}{2}, \quad KE = \frac{b}{2};$$

donc $$DE = \frac{\sqrt{c^2 - (a-b)^2}}{2} = \sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

De même on trouverait

$$FG = \sqrt{(p-b)(p-c)} \text{ et } HI = \sqrt{(p-a)(p-c)}$$

Dès lors

$$DE \times FG \times HI = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Or $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

et $$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

donc

$$\text{Surf ABC} \times r = (p-a)(p-b)(p-c);$$

par suite

$$DE \times FG \times IH = \text{surf ABC} \times r.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. G. Loria, à Mantoue ; Lachesnais, à Versailles ; Martin, école de Passy ; Arbez, école Saint-Joseph, à Thonon ; Deslais, au Mans ; Bénard, à Châteauroux.

QUESTION 197.

Solution par M. Guéroult, élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

Si par un point O pris dans l'intérieur d'un triangle on mène des parallèles aux trois côtés, on détermine sur chaque côté trois segments ; le carré du produit des trois segments intermédiaires est égal au produit des six autres.

Il faut démontrer que l'on a

$$(C'C'' \cdot B'B'' \cdot A'A'')^2 = AC' \cdot AB' \cdot CB' \cdot CA'' \cdot BA' \cdot BC''.$$

Les triangles C'OC'', B'OB'', A'OA'' sont semblables en vertu du parallélisme des droites AB, A'B''; AC, A''C'; BC, B'C''; et

en vertu du parallélisme des mêmes droites, les figures AC'OB', OB'CA'', OC''BA' sont des parallélogrammes.

Or dans les triangles semblables OC'C'', OA'A', OB'B', on a les relations

$$\frac{C'C''}{C'O} = \frac{OA'}{A'A'}, \quad \frac{OB'}{B'B'} = \frac{A'A'}{OA'}, \quad \frac{C'C'}{OC'} = \frac{OB'}{B'B'}$$

ou en chassant les dénominateurs

$$C'C'' \,.\, A'A' = OA' \,.\, C''O$$
$$B'B' \,.\, A'A' = OB' \,.\, OA'$$
$$C'C' \,.\, B'B' = OC' \,.\, OB''$$

multipliant

$$(A'A'' \,.\, B'B' \,.\, C'C')^2 = OA' \,.\, C'O \,.\, OB' \,.\, OA' \,.\, OC' \,.\, OB'.$$

Mais $OA' = BC' \quad OA' = CB'$
$OC' = BA' \quad OC' = AB''$
$OB' = CA' \quad OB' = AC'$

Substituant ces valeurs on trouve définitivement

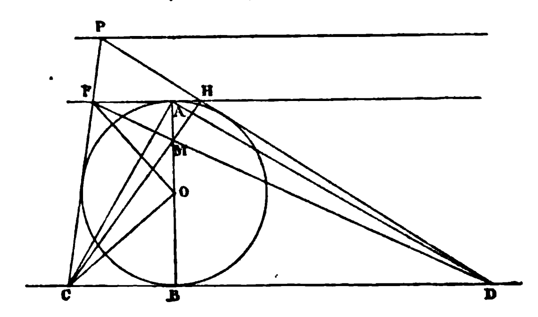
$$(C'C' \,.\, B'B'' \,.\, A'A')^2 = AC' \,.\, AB' \,.\, CB' \,.\, CA' \,.\, BA' \,.\, BC'.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, Lesieur, élèves du lycée Henri IV; Prugnet, de Châteauroux; Gossicaux, Boulogne, Hoet, de Saint-Quentin; Montérou, à Pau; Tricon, à Marseille; Hugot, à Lyon; Deslais, au Mans; Latapie, à Saint-Paul-lès-Dax; Bousquet, à Nice.

QUESTION 200.

Solution par M. Dupuy, élève du Lycée de Grenoble.

On donne une circonférence, un diamètre AB *et les tangentes à*



ses extrémités. Un angle droit dont le sommet est en A *coupe la*

tangente en B *aux deux points* C *et* D. *Par* C *et* D *on mène des tangentes à la circonférence; ces tangentes rencontrent en* F *et en* H *la tangente en* A *et se coupent elles-mêmes au point* P.

1° *Les diagonales du trapèze* CDHF *se coupent sur la diamètre* AB *en un point* M *tel que* $AM = \frac{AB}{5}$.

2° *Lieu du point* P *quand l'angle droit tourne autour de* A.

(Nomy.)

On sait que dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle les deux diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés sont quatre droites se coupant en un même point (Rouché, *Géométrie*); par conséquent le point d'intersection des droites CH, FD est sur AB. Or on a $\frac{AM}{MA} = \frac{AF}{BD}$, et $\overline{AB}^2 = BD\ .\ BC$; de plus les triangles semblables OAF, OCB donnent $\frac{AF}{AO} = \frac{OB}{CB}$ et comme $AO = OB$, on a $\overline{OB}^2 = AF\ .\ BC$.

Donc $$\frac{AF}{BD} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{AB}^2}.$$

De plus, $AB = 2OB$, $$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$$

ou encore $$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}.$$

2° Le cercle et la tangente étant fixes, le produit $CB\ .\ BD = \overline{AB}^2 =$ constante. On est donc ramené au lieu énoncé dans la question n° 175 (t. III, p. 223).

Le lieu est une parallèle à CBD menée à une distance égale à $\frac{8}{5}$ R.

Nota. — **M. Deslais, élève au Lycée du Mans, a résolu la même question.**

QUESTION 201.

Solution par M. VUATTOUX, pensionnat Saint-Joseph, à Thonon.

Soient O *le centre d'un cercle,* ABC *un triangle circonscrit à ce cercle,* A'B'C' *les points de contact des côtés* BC, CA, AB. *Désignons par* R *le rayon du cercle, par* S *et* S' *les aires des triangles* ABC, A'B'C'. *Démontrer les relations*

$$S^2 = R^4 \frac{CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{OA'B' \times OB'C' \times OA'C'}$$

$$S = \frac{4 \cdot CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{S'^2}.$$

Soit R' le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. On sait que

$$AB' = AC' = p - a$$
$$BC' = BA' = p - b$$
$$CA' = CB' = p - c$$

Les angles formés autour du point C étant les suppléments respectifs des angles A, B, C, on aura

$$\text{Surf. } CA'B' = \frac{1}{2}(p - c)^2 \sin C,$$

$$\text{Surf. } BA'C' = \frac{1}{2}(p - b)^2 \sin B,$$

$$\text{Surf. } AB'C' = \frac{1}{2}(p - a)^2 \sin A,$$

et

$$\text{Surf. } OA'B' = \frac{1}{2} R^2 \sin C,$$

$$\text{Surf. } OB'C' = \frac{1}{2} R^2 \sin A,$$

$$\text{Surf. } OC'A' = \frac{1}{2} R^2 \sin B.$$

Portant ces valeurs dans la première des relations données, on a :

$$S^2 = R^4 \frac{\frac{1}{2}(p-a)^2 \sin A \times \frac{1}{2}(p-b)^2 \sin B \times \frac{1}{2}(p-c)^2 \sin C}{\frac{1}{2} R^2 \sin C . \frac{1}{2} R^2 \sin B . \frac{1}{2} R^2 \sin A}$$

ou $$S^2 = \frac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{R^2}.$$

Or $$R^2 = \frac{p(p-a)(p-b) p-c)}{p^2}.$$

Remplaçant R^2 par cette valeur dans la formule précédente, on a $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$
qui est une identité. Donc la première des relations est vérifiée.

La surface du triangle $A'B'C' = \frac{1}{2}R^2(\sin A + \sin B + \sin C)$;

or $\sin A = \frac{a}{2R'}$, $\sin B = \frac{b}{2R'}$, $\sin C = \frac{c}{2R'}$;

donc $$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R'};$$

dès lors $$S' = \frac{1}{2}R^2\frac{p}{R'} = \frac{pR^2}{2R'} = \frac{RS}{2R'};$$

on en tire $$S'^2 = \frac{R^2S^2}{4R'^2}.$$

En portant cette valeur ainsi que celles trouvées précédemment dans la seconde des relations trouvées, on a

$$S^2 = \frac{\frac{1}{2}(p-a)^2 . \frac{1}{2}(p-b)^2 \frac{1}{2}(p-c)^2 . \sin A \sin B \sin C \times 4R'^2 \times 4}{R^2S^2}$$
$$= \frac{2R'^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \sin A \sin B \sin C}{R^2S^2}$$

ou $$S = 2R'^2 \sin A \sin B \sin C$$
en remplaçant
$$R^2S^2 \text{ par } (p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2;$$
or $$2R'^2 \sin A \sin B \sin C = S.$$

D'où la deuxième relation devient une identité.

NOTA. — MM. Deslais, du Mans, et Hugot, pensionnat Saint-Joseph à Thonon, ont résolu la même question.

QUESTION 202.

Solution par M. Harel, élève de mathématiques préparatoires, École Albert-le-Grand (Arcueil).

Résoudre le système d'équations

$$x + y + z = (a + b + c)(a + b - c)$$
$$xy + xz - yz = b[(a + c)(a - c)(2a - b) + 2ab^2]$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2)$$

(Combier.)

Si l'on pose

$$(A)\left\{\begin{aligned} (a + b + c)(a + b - c) &= m, \\ b[(a+c)(a-c)(2a-b)+2ab^2] &= p, \\ (a^2+b^2-c^2)^2 + 2b^2(a^2+c^2) &= q, \end{aligned}\right.$$

on a à résoudre
$$x + y + z = m,$$
$$xy + xz - yz = p,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = q.$$

On obtient facilement

$$xy + xz + yz = \frac{m^2 - q}{2};$$

d'où
$$yz = \frac{m^2 - q - 2p}{4}. \qquad (1)$$

Les relations (A) donnent

$$m^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4ab(a^2 + b^2 - c^2) + 4a^2b^2$$
$$q = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2)$$
$$-2p = -4ab^3 - 2b(2a - b)(a^2 - c^2);$$

dès lors
$$m^2 - q - 2p = 4b^2(a^2 - c^2);$$

portant dans (1) cette valeur, il vient

$$yz = b^2(a^2 - c^2). \qquad (2)$$

D'autre part la seconde des équations données peut s'écrire

$$x(y + z) - yz = p,$$

et la première donne

$$y + z = m - x;$$

dès lors
$$x(m - x) = p + yz = \frac{m^2 - q + 2p}{4},$$

ou $$x^2 - mx = \frac{q - m^2 - 2p}{4}$$

et $$x = \frac{m \pm \sqrt{q - 2p.}}{2}.$$

Or $q = (a^2 - c^2)^2 + b^4 + 4a^2b^2$

$-2p = -4ab^3 - 2b(2a - b)(a^2 - c^2)$

et $q - 2p = (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)^2$

par suite

$$x = \frac{(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) \pm (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)}{2}$$

d'où
$$x' = a^2 + b^2 - c^2$$
$$x'' = 2ab$$

Par suite $y + z = 2ab$

ou $y + z = a^2 + b^2 - c^2$ (B)

suivant que l'on donnera à x les valeurs x' ou x'' dans l'équation $y + z = m - x.$

Combinant successivement les équations (B) avec l'équation (2)

on tire
$$y = b(a + c)$$
$$z = b(a - c) \quad \text{(C)}$$

ou
$$y = b^2$$
$$z = a^2 - c^2 \quad \text{(C')}$$

On a donc pour x, y, z les deux systèmes de valeurs

$$x = a^2 + b^2 - c^2$$
$$y = b(a + c)$$
$$z = b(a - c)$$

et

$$x = 2ab$$
$$y = b^2$$
$$z = a^2 - c^2$$

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS A SAINT-CYR

(*Suite*, voir p. 312 et suiv.)

Équations à résoudre.

$\frac{1 - \text{tg}\, x}{1 + \text{tg}\, x} = 2 \cos 2x.$

$2 \text{ tg}\, x + \text{tg}(\alpha - x) = \text{tg}(\beta + x).$

$\sin 2x = \cos 3x.$

$\text{Sin}^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{6}.$

$3 + \cos 4x = 4 \cos 2x + 2 \cos^3 x \sin x.$

$\text{séc}\, x\, \text{séc}\, \alpha + \text{tg}\, x\, \text{tg}\, \alpha = \text{séc}\, \beta.$

$\sin x \cos x = \frac{2}{5}.$

$8 \sin x = 3 \cos^2 x.$

$6 \text{ tg}\, x + 12 \text{ cotg}\, x = 5\sqrt{3}\, \text{séc}\, x.$

$25 \sin x (\sin x - \cos x) = 4.$

$\text{tg}\, x = \text{coséc}\, 2x.$

$\text{tg}\, \frac{x}{2} = \text{coséc}\, x - \sin x.$

$4 \sin x \cos 3x = 1.$

$\text{tg}\, x + 2 \text{ cotg}\, 2x = \sin x\left(1 + \text{tg}\, \frac{x}{2}\, \text{tg}\, x\right).$

$\sin x + \text{coséc}\, x = 1{,}5.$

$\cos x + \text{séc}\, x = 2$

$\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x = 3.$

$\cos^2 \frac{x}{2} - \text{séc}^2 \frac{x}{2} = 2\sqrt{3}\, \text{cosec}^2 x.$

$\text{tg}\, 2x\, \text{cotg}\, x = 2.$

$\text{cotg}\, (\pi - 3x) = \text{tg}\, (x - \pi).$

$\sin 3x = n \sin x.$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2.$

$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 5.$

$\sin (2x + a) - \sin (2x - a) = \sin (x - a) - \sin (x + a).$

$\sin 2x + \sin 3x = \sin x.$

$\text{tg}^2 2x - \text{tg}^2 x = 2 \text{ tg}\, 2x\, \text{tg}\, x.$

$a \sin x + b \text{ tg}\, x = c \sin 2x.$

$\sin 2x = \sin^4 x + \cos^4 x.$

$\sin 2x = 6 \sin^2 x - 8 \cos^3 x.$

$16 \text{ tg}\, x = 15 \cos x.$

$\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} 2x - 4.$

$3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x.$

Résoudre les équations simultanées

$x + \sqrt{x+y} = 12 - y; \qquad x^2 = 41 - y^2.$

$x^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = y^{\frac{8}{3}}; \qquad y^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = x^{\frac{2}{3}}.$

$2^x \ 3^y = 560; \qquad 5x = 7y.$

$x^y = y^x; \qquad x^3 = y^2.$

$x^y + y^n = a; \qquad \log x + \log y = b.$

$xy + x + y + 1 = 0; \qquad x^2 + y^2 = x \quad y \quad 22.$

$x - y = 10 (\sqrt{x} - \sqrt{y}); \qquad \sqrt{xy} = 16.$

$x^2 - y^2 + (x - y) = 26; \qquad (x^2 - y^2)(x - y) = 48.$

$x^2 + y^2 + 3xy = 79; \qquad 2xy + x + y = 38.$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y - x}; \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$

$x^2y + x = 21; \qquad x^4y^2 + x^2 = 333.$

$x - \frac{1}{y} = a; \qquad y - \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$

$(x + y)(yx + 1) = axy; \qquad (x^2 + y^2)(x^2y^2 + 1) = bx^2y^2.$

$\frac{xyz}{x + y} = a; \qquad \frac{xyz}{x + z} = b; \qquad \frac{xyz}{y + z} = c.$

— Résoudre
$$(x + y)(x^2 + y^2) = 15.$$
$$(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = 85.$$

— Résoudre le système
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{c}.$$
$$\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1 + \frac{y}{c}.$$

— Résoudre le système
$$x + y = 4$$
$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280.$$

— Rèsoudre le système
$$x + y = a.$$
$$x^3 + mxy^2 + mx^2y + y^3 = b^3.$$

— Vérifier que, quel que soit n, l'expression
$$nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$$
est divisible par $(x - 1)^2$.

— Résoudre le système
$$x^2 + xy + y^2 = a^2; \qquad xy = b^2.$$

— Résoudre le système
$$x + y = 13; \quad z + u = 11;$$
$$xy = zu; \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 170.$$

— Résoudre le système
$$x + y = u + v; \quad xy = uv;$$
$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{m}{n}; \quad x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = a^2.$$

— Résoudre le système
$$x^2 + y^2 = 52$$
$$xy = 12(x - y).$$

— Des équations

$$x = by + cz + du$$
$$y = ax + cz + du$$
$$z = ax + by + du$$
$$u = ax + by + cz$$

déduire la relation

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = 1.$$

— Résoudre les systèmes d'équations simultanées suivantes :

$$\sin x = m \sin y; \quad \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} y.$$
$$\sin x + \sin y = a; \quad \cos x + \cos y = b.$$
$$\sin x = a \sin y; \quad 2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{y}{2}.$$
$$\frac{\operatorname{séc} x - \operatorname{séc} y}{\operatorname{séc} x + \operatorname{séc} y} = \frac{\operatorname{coséc} x - \operatorname{coséc} y}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{coséc} y}; \sin x = \operatorname{tg} y.$$
$$\sin (x - y) = \cos (x + y) = 0{,}5.$$
$$x \sin (\delta - y) = p; \ x \cos (\delta - y) = 9.$$
$$\sin x = 2 \operatorname{cotg} y; \quad \operatorname{tg} x = \sin y.$$
$$\sin^2 x + \cos^2 y = a; \quad \cos^2 x - \sin^2 y = b.$$
$$a \sin x = b \cos y; \quad \sin^2 x + \sin^2 y = c.$$
$$9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4; \quad 2 \operatorname{cotg} x + 4 \operatorname{cotg} y = 1$$
$$\sin x \cos y = a; \quad \cos x \sin y = b.$$
$$\cos x \sin y + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} y = 0; \quad \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1 = 0.$$
$$\sin x = \cos y; \quad \sin y = \operatorname{tg} z; \quad \sin z = \operatorname{cotg} x.$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a; \quad \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = b; \quad \operatorname{cotg} z - \operatorname{cotg} x = c.$$

Etant données les équations :

$$u = 3v; \quad \operatorname{tg} u = x + 1; \quad \operatorname{tg} v = x - 1;$$
$$x - y = 2a; \quad \sin^2 x - \sin^2 y = b;$$
$$x \sin (\alpha - y) = a; \quad x \sin (\beta - y) = b;$$
$$x + y + z = p; \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m; \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = n.$$

calculer x.

— Trouver la condition pour que les équations

$$a \sin x + b \cos x = c$$
$$a' \sin x + b' \cos x = c'$$

oient satisfaites pour une même valeur de a.

— Trouver les valeurs de x et y, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ qui satisfont aux équations $\sin x = \cos 2y; \ \sin 2x = \cos y.$

— Eliminer x entre les équations

$$\operatorname{coséc} x - \sin x = a; \quad \operatorname{séc} x - \cos x = b.$$

— Eliminer x et y entre les équations

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = m; \quad b \sin^2 y + a \cos^2 y = n; \quad a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y.$$

— On a $\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin^2 x + 4 \sin^3 x = 0;$
on demande de calculer x.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FORMES QUADRATIQUES

ET LEURS APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

Par M. **E.-J. Boquel.**

(*Fin*, voir p. 318.)

Théorème. — *Lorsque l'invariant d'une forme quadratique est nul, sa forme adjointe est un carré parfait.*

Nous avons vu, en effet, que si l'on désigne par α_{ik} le coefficient du terme a_{ik} dans l'invariant développé de la forme f, la forme adjointe a pour expression, au signe près :

$$F = \Sigma \alpha_{ik} X_i X_k$$

ou, ce qui revient au même

$$F = \frac{d\Delta}{da_{11}} X_1^2 + \ldots + \frac{d\Delta}{da_{ik}} X_i X_k + \ldots$$

Δ étant l'invariant de la forme f (*).

Multiplions F par α_{11} ; nous aurons :

$$\alpha_{11} F = \alpha_{11}^2 X_1^2 + 2\alpha_{12} X_1 X_2 + \ldots + 2\alpha_{1n} X_1 X_n + \alpha_{11}\alpha_{22} X_2^2 + \ldots + \ldots\ldots + 2\alpha_{11}\,\alpha_{n-1,n} X_{n-1} X_n + \alpha_{11}\,\alpha_{nn} X_n^2$$

Considérons le carré parfait

$$(\alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1n}X_n)^2$$

je dis que, si $\Delta = 0$, ce carré est précisément égal à $\alpha_{11}F$.

En effet, le coefficient du terme en $X_i X_k$ dans le produit $\alpha_{11}F$ est $2\alpha_{11}\,\alpha_{ik}$; le coefficient du même terme dans le carré est $2\alpha_{1i}\,\alpha_{1k}$; il suffit donc de prouver que l'on a la relation $\alpha_{11}\,\alpha_{iK} - \alpha_{1i}\,\alpha_{1k} = 0$.

Or, d'après la règle du produit de deux déterminants, on reconnaît, en multipliant ligne par ligne, que cette différence est un déterminant contenant le déterminant Δ en facteur; Δ étant nul par hypothèse, le théorème est donc établi.

(*) Les personnes qui ne seraient pas familiarisées avec les notations différentielles, que nous emploierons désormais, si elles sont adoptées cette année pour la préparation à l'Ecole polytechnique, peuvent écrire :

$$F = \Delta'a_{11}\, X_1^2 + \ldots + \Delta'a_{ik} X_i X_k + \ldots$$

— Si l'on applique ce théorème à la forme ternaire $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$, dont la forme adjointe est

$$F = X^2(A'A'' - B^2) + Y^2(A''A - B'^2) + Z^2(AA' - B''^2)$$
$$+ 2YZ(B'B'' - AB) + 2ZX(B''B - A'B') + 2XY(BB' - A''B'')$$

on est conduit à conclure que si l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

la forme F est un carré parfait.

Cette remarque est susceptible de nombreuses applications, dont nous aurons l'occasion de citer plusieurs dans la seconde partie de ce travail.

— Il n'est pas sans intérêt de faire connaître ici une interprétation géométrique que le P. Joubert a donnée de la forme adjointe dans le cas des formes ternaires.

Soit une surface à centre représentée par l'équation (1) $f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = H$. Considérons le plan tangent en un point quelconque de cette surface, et menons du centre une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons un point M tel qu'en appelant O le centre de la surface et I le pied de la perpendiculaire sur le plan tangent, on ait $OI \cdot OM = K^2$. Je dis que *la forme adjointe de* f(x, y, z) *est le premier membre de l'équation des points* M.

Le plan tangent au point (x, y, z) de la surface (1) a pour équation

$$X(Ax + B''y + B'z) + Y(B''x + A'y + Bz)$$
$$+ Z(B'x + By + A''z) = H.$$

Les équations de la perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan sont

$$\frac{X}{Ax + B''y + B'z} = \frac{Y}{B''x + A'y + Bz} = \frac{Z}{B'x + By + A''z}$$
$$= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{(Ax + B''y + B'z)^2 + (B''x + A'y + Bz)^2 + (B'x + By + A''z)^2}}.$$

On a : $OM^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

D'autre part

$$OI = \frac{H}{\sqrt{(Ax+B''y+B'z)^2+(B''x+A'y+Bz)^2+(B'x+By+A''z)^2}}$$

et le rapport commun précédent devient alors :

$$\frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\ .\ OI}{H} \quad \text{ou} \quad \frac{K^2}{H}$$

Pour obtenir l'équation du lieu, il faut éliminer x, y, z entre les équations de la perpendiculaire et l'équation (1). Or les premières peuvent s'écrire

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{l} X = (Ax + B''y + B'z)\lambda \\ Y = (B''x + A'y + Bz)\lambda \\ Z = (B'x + By + A''z)\lambda \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{sous la condition} \\ \lambda = \dfrac{K^2}{H} \end{array}$$

L'équation (1), en vertu des précédentes, prend d'ailleurs la forme $\frac{Xx}{\lambda} + \frac{Yy}{\lambda} + \frac{Zz}{\lambda} = H = \frac{K^2}{\lambda}$

c'est-à-dire $\qquad Xx + Yy + Zz = K^2 \qquad (3)$

et l'élimination de x, y, z entre les équations (2) et (3) est précisément le calcul qui sert à former la forme adjointe.

— Nous avons dit, dans un de nos précédents articles, qu'une forme quadratique n'a d'autre invariant que son discriminant, et c'est pour ce motif que nous avons employé indifféremment dans le langage les mots d'invariant et de discriminant. Mais il faut justifier ce fait, qui est bien loin d'être évident *à priori*.

Lorsqu'on considère une forme quelconque, quel qu'en soit le degré, on voit que cette forme contient un certain nombre de coefficients, a, b, c,....

Si l'on y fait une substitution linéaire, les coefficients a, b, c .... seront remplacés par d'autres a', b', c', ... et nous appellerons avec Cayley *invariant* de la forme considérée *une fonction entière et homogène* $\varphi(a, b, c, ...)$ *de ses coefficients, telle que l'on ait identiquement*

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = R^\lambda \varphi(a, b, c, \ldots)$$

R *désignant le déterminant de la substitution linéaire.*

Telle est la définition générale d'un invariant ; on voit que l'invariant que nous avons donné pour les formes quadratiques, satisfait bien à la définition, puisque nous avons prouvé dès le début que l'on a : $\Delta' = \Delta R^2$.

Nous allons montrer maintenant que les formes quadratiques n'ont pas d'autre invariant que Δ ou ses puissances.

Prenons d'abord, comme exemple, le cas d'une forme binaire $ax^2 + 2bxy + cy^2$, dont l'invariant est $ac - b^2$. Admettons pour un instant qu'il y ait un autre invariant $\varphi(a, b, c)$; on devrait avoir

$$\varphi(a', b', c') = R^\lambda \varphi(a, b, c),$$

en vertu de la définition générale.

La substitution linéaire $x = \alpha x' + \beta y'$
$y = \gamma x' + \delta y'$

a pour déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$. Or a', b', c', sont des fonctions du second degré de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; si donc n est le degré de φ, la fonction $\varphi(a' b'c')$ sera du degré $2n$ par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

R est du second degré en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; R^λ est donc du degré 2λ, et $\varphi(a', b', c')$ étant du degré $2n$, on doit avoir $2n = 2\lambda$, c'est-à-dire $n = \lambda$, ce qui donne $\varphi(a', b', c') = R^n\varphi(a, b, c)$.

Mais $a'c' - b'^2 = (ac - b^2) R^2$.

Admettons que n soit pair, $n = 2m$. On aurait

$$\varphi(a', b', c') = R^{2m}\varphi(a, b, c)$$

et aussi $$(a'c' - b'^2)^m = R^{2m}(ac - b^2)^m$$

c'est-à-dire $$\frac{\varphi(a' b' c')}{(a'c' - b'^2)^m} = \frac{\varphi(a, b, c)}{(ac - b^2)^m}.$$

Or deux formes quadratiques sont toujours telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire (*); on peut donc supposer a, b, c fixes et a', b', c' quelconques. Il faut alors que le quotient $\frac{\varphi(a'b'c')}{(a'c' - b'^2)^m}$ soit une constante, et l'on a :

$$\varphi(a'b'c') = K(a'c' - b'^2)^m \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si n est impair, on forme le carré de la première égalité, et il vient : $\varphi^2(a'b'c') = R^{2n}\varphi^2(a,b,c)$

et $(a'c' - b'^2)^{2n} = R^{2n}(ac - b^2)^{2n}$

Le raisonnement se fait alors comme dans le cas de n pair, et l'on a

$$\frac{\varphi^2(a'b'c')}{(a'c' - b'^2)^{2n}} = K, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(*) Deux polynômes homogènes du même degré renfermant le même nombre de variables, sont dits *algébriquement équivalents* quand ils jouissent de cette propriété.

Ce mode de raisonnement est général. Soit, en effet, la forme ternaire

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

L'invariant $AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$, multiplié par R^2 est égal au nouvel invariant $A_1A'_1A''_1 + \ldots$

Supposons qu'il y ait une autre fonction entière et homogène $\varphi(A,A',\ldots)$ telle que l'on ait

$$R^\lambda \varphi(A, A',\ldots) = \varphi(A_1,A'_1\ldots)$$

Soit n le degré de φ; $A_1, A'_1\ldots$ sont toujours des fonctions du deuxième degré des coefficients de la substitution linéaire, et le premier membre de l'égalité étant du degré 3λ, puisque R est un déterminant du troisième ordre, il en résulte qu'on doit avoir $2n = 3\lambda$.

Cette relation exige que n soit multiple de 3,

$$n = 3\mu; \quad \text{alors } \lambda = 2\mu.$$

Par suite $\quad R^{2\mu}\varphi(A, A',\ldots) = \varphi(A_1, A'_1\ldots)$.

D'autre part on a : $\quad \Delta R^2 = \Delta_1$.

Donc $\quad \Delta^\mu R^{2\mu} = \Delta_1{}^\mu$.

Il en résulte par division :

$$\frac{\varphi(A, A', \ldots)}{\Delta^\mu} = \frac{\varphi(A_1, A'_1 \ldots)}{\Delta_1{}^\mu}.$$

Or, les deux formes étant algébriquement équivalentes, on peut supposer que A, A', ... sont fixes, et A_1, A'_1 ... quelconques. Il faut donc que le quotient précédent soit constant.

Donc Δ et ses puissances sont les seules quantités jouissant de la propriété invariantive. C'est ce que nous voulions établir.

— Je bornerai là pour le moment ces considérations sommaires sur les formes quadratiques ; les principes fondamentaux sont posés ; mais il reste encore beaucoup à dire, et d'ailleurs je n'ai donné jusqu'ici que les applications strictement indispensables à l'intelligence des théorèmes. A la rentrée prochaine et pendant l'année scolaire qui va s'ouvrir, je publierai une seconde partie de ce travail ; elle comprendra surtout des applications des théorèmes démontrés dans la première partie ; mais j'y ajouterai cependant quelques

propriétés nouvelles que je regarde comme vraiment fécondes. Les articles que je me propose de donner à nos lecteurs deviendront d'autant plus intéressants que la théorie des formes quadratiques binaires, ternaires et quaternaires entre dès cette année dans le programme d'admission à l'École polytechnique, et j'en proposerai des applications aussi nombreuses que possible dans les questions à résoudre.

A mon grand regret, les développements que j'ai donnés cette année ont été parfois trop succincts, ce qui a dû nuire à leur clarté. Mais le mal sera vraisemblablement réparé cette année par les professeurs de spéciales, qui, ayant à exposer dans leurs cours la théorie élémentaire des formes, insisteront nécessairement sur les points que je n'ai pu qu'effleurer.
E.-J. B.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

Solution du problème des mathématiques spéciales par M. KŒNIGS, élève de l'École normale supérieure.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point P *dans le plan de l'ellipse de gorge, par ce point on mène une parallèle* PH *à une génératrice* G *quelconque de la surface ; la courbe d'intersection de l'hyperboloïde avec un cylindre de révolution autour de* PH *et passant par* G, *se projette sur le plan de l'ellipse de gorge suivant une courbe du troisième degré ayant un point double : on demande le lieu de ce point double lorsque la droite* G *décrit la surface.*

L'hyperboloïde et le cylindre ayant la génératrice G commune se coupent suivant une courbe gauche du troisième degré. Cette courbe se projettera sur le plan de l'ellipse de gorge suivant une courbe du troisième ordre. Or si on remarque que la droite G se projette suivant une tangente T à l'ellipse de gorge, et la droite PH suivant une parallèle à T, on verra que les cordes parallèles à l'axe oz de l'hyperboloïde ont pour plans diamétraux conjugués :

1° Dans l'hyperboloïde le plan de l'ellipse de gorge;

2° Dans le cylindre le plan mené par PH et par la perpendiculaire PQ à la droite T.

Le plan mené par cette droite PQ et par la parallèle PK à oz coupera l'hyperboloïde suivant une hyperbole U dont un axe coïncidera avec PQ, le second étant parallèle à PK; et le cylindre suivant une ellipse E dont PQ et PK sont les deux axes.

Ces deux coniques se couperont en quatre points, l'un d'eux M sera l'intersection de la droite G et du plan QPK : les trois autres N, N' et N" seront les traces de la courbe de gauche sur le même plan; mais il résulte de la position des axes de ces coniques que les cordes communes MN et N'N" sont parallèles à PK ou à oz. La corde MN percera le plan de l'ellipse de gorge au pied Q de la perpendiculaire PQ abaissée sur P, car cette corde projette sur ce plan le point M qui appartient à G.

Enfin le point R où la droite N'N" perce le plan de l'ellipse de gorge est la projection sur ce plan de deux points de la courbe gauche : ce sera le point double de la projection de cette courbe.

Nous allons traduire analytiquement ce que nous venons de dire, pour en tirer le lieu du point R.

Soit $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$
l'équation de l'hyperboloïde.

Soit $$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \qquad (2)$$
l'équation de la droite T, on a
$$p = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \qquad (3)$$

Soit $$\frac{x - \alpha}{\cos \varphi} = \frac{y - \beta}{\sin \varphi} = \rho \qquad (4)$$
l'équation de la droite PQ (α, β étant les coordonnées du point P), ρ désigne la distance au point P du point de la droite PQ dont (x, y) sont les coordonnées.

Enfin, appelons R le rayon du cylindre et θ l'angle de la génératrice G avec oz.

Les axes de l'ellipse E dirigés, comme nous l'avons vu,

suivant PQ et PK ont pour longueur 2R et $\frac{2R}{\sin\theta}$, l'équation de l'ellipse E dans le plan QPK est donc

$$\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{R}{\sin\theta}\right)^2} = 1$$

ou

$$z^2 = \frac{R_2 - \rho^2}{\sin^2\theta}.$$

Nous aurons l'équation de l'hyperbole U dans le même plan, et rapportée aux mêmes axes en remplaçant dans l'équation (1) les variables x et y par leurs valeurs tirées des équations (4), soit

$$\frac{(\alpha + \rho\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(\beta + \rho\sin\theta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

En éliminant z^2 entre cette équation et la précédente, on trouve

$$\frac{(\alpha + \rho\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(\beta + \rho\sin\theta)^2}{b^2} - \frac{R^2 - \rho^2}{c^2\sin\theta} - 1 = 0.$$

Cette équation, du second degré en ρ, définit les points Q et R sur la droite PQ.

Désignons par ρ_1 la longueur PQ, nous avons

$$\frac{(\alpha + \rho_1\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(\beta + \rho_1\sin\theta)^2}{b^2} - \frac{R^2 - \rho_1^2}{c^2\sin^2\theta} - 1 = 0.$$

Retranchons cette équation de la précédente, où ρ désigne la longueur PR : on trouve après division par $\rho - \rho_1$ qui n'est pas nul :

$$(\rho + \rho_1)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} + \frac{1}{c^2\sin^2\theta}\right) + \frac{2\alpha\cos\theta}{a^2} + \frac{2\beta\sin\theta}{b^2} = 0. \qquad (5)$$

L'angle θ est celui que forme avec la droite oz la parallèle à G menée par l'origine, laquelle a pour équations :

$$\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{y}{\cos\varphi} = \frac{z}{c\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b}}}$$

On en tire :

$$\cos^2\theta = \frac{c^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right)}{1 + c^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right)}$$

et on en déduit sans peine par substitution que le coefficient de $(\rho + \rho_1)$ se réduit à

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

D'autre part ρ_1 est connu et égale $p - \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi$; car c'est la distance du point P à la droite T ; l'équation (5) devient donc :

$$\rho + p - \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi + \frac{2\,b^2c^2\,\alpha\cos\varphi}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + \frac{2\,a^2c^2\beta\sin\varphi}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} = 0$$

ou :

$$\rho + p - \frac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)+b^2c^2}\alpha\cos\varphi - \frac{b^2(a^2+c^2)-a^2c^2}{b^2(a^2+c^2)+a^2c^2}\beta\sin\varphi = 0.$$

Appelons un instant α' et β' les coefficients de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ dans cette équation : on a, en tirant p de l'équation (3) :

$$\rho - \alpha'\cos\varphi - \beta'\sin\varphi = -\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi};$$

multiplions par ρ et tenons compte des relations (4) il vient :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\alpha'(x-\alpha)-\beta'(y-\beta) = -\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}$$

On peut mettre l'équation de ce lieu sous une forme plus commode :

Posons $\alpha_1 = \alpha + \alpha' = \dfrac{2ba^2\,(b^2+c^2)\,\alpha}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$$\beta_1 = \beta + \beta' = \frac{2b^2\,(a^2+c^2)\,\beta}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Et considérons les coniques

$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta_1)p}{b^2} - 1 = 0,$$

qui est l'ellipse de gorge transportée parallèlement à elle-même.

Cherchons la *podaire* du point P dans cette conique, c'est-à-dire le lieu de projection du point P sur les tangentes à cette conique.

$$(x-\alpha_1)\cos\varphi + (y-\beta_1)\sin\varphi - \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = 0$$

est une tangente quelconque à la conique

$$\frac{x-\alpha}{\cos\varphi}=\frac{y-\rho}{\sin\varphi}=\rho$$

la perpendiculaire issue du point P.

On en tire en remplaçant $\rho\cos\varphi$ et $\rho\sin\varphi$ par $(x-\alpha)$ et $(y-\beta)$ dans l'équation de la tangente :

$$-(x-\alpha_1)(x-\alpha)+(y-\beta_1)(y-\beta)$$
$$\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}=0$$

ou encore :

$$(x-\alpha)^2-(\alpha_1-\alpha)(x-\alpha)-(\beta_1-\beta)(y-\beta)$$
$$-\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}=0$$

c'est-à-dire $(x-\alpha)^2-\alpha'(x-\alpha)-\beta'(y-\beta)$

$$-\sqrt{a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2}=0.$$

C'est précisément l'équation touvée pour le lieu.

Donc :

Le lieu du point R est la podaire du point P relativement à une ellipse qui n'est autre que l'ellipse de gorge transportée parallèlement à elle-même, de sorte que son centre vienne en un point (α_1, β_1).

Ou voit aussi que le point Q décrit la podaire du point P par rapport à l'ellipse de gorge elle-même.

La discussion des podaires des coniques est des plus faciles, et il est inutile de la donner ici.

QUESTION 219.

Solution par M. V.-M. Arnaud, élève au Lycée de Nice.

Démontrer la règle de Leibnitz pour trouver la dérivée n^e *d'un produit* uv *de deux fonctions de* x

$$y_{(n)}=vu_{(n)}+C_1^n v' u_{(n-1)}+C_2^n v'' u_{(n-2)}+\cdots$$

en démontrant que, si cette règle est vraie pour la dérivée d'ordre $n-1$*), elle est encore vraie pour la dérivée d'ordre* n.

Appliquer ce théorème à la recherche de la dérivée n^{me} *de la onction* $y=e^{ax}\cos(mx+p)$.

La règle de Leibnitz est facile à vérifier pour les dérivées des premiers ordres, car on a

$$y' = vu' + uv'$$
$$y'' = vu'' + 2u'v' + uv''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Supposons donc la loi vraie pour la dérivée d'ordre $(n - 1)$

$$y_{(n-1)} = vu_{(n-1)} + C_1^{n-1} v'u_{(n-2)} + C_2^{n-1} v''u_{(n-3)} + \ldots$$

je dis qu'elle est vraie pour la dérivée d'ordre n.

En effet, prenons la dérivée de $y_{(n-1)}$, en écrivant sur une première ligne horizontale les termes de la forme vu' et sur une deuxième les termes de la forme uv'; nous aurons

$$y_{(n)} = vu_{(n)} + \left.\begin{matrix} C_1^{n-1} \\ 1 \end{matrix}\right| v'u^{u-1} + \left.\begin{matrix} C_2^{n-1} \\ C_1^{n-1} \end{matrix}\right| v''u_{(n-2)} + \left.\begin{matrix} C_3^{n-1} \\ C_2^{n-1} \end{matrix}\right| \begin{matrix} v'''u_{n-3} \\ + \ldots \end{matrix}$$

Or d'après les propriétés des coefficients du binôme

$$C_1^{n-1} + 1 = C_1^n, \quad C_2^{n-1} + C_1^{n-1} = C_2^n.$$
$$C_3^{n-1} + C_2^{n-1} = C_3^n \ldots$$

Donc $y_{(n)} = vu^{(n)} + C_1^n v'u_{(n-1)} + C_2^n v''u_{(n-2)} + \ldots$

et la règle est démontrée.

Appliquons cette règle à la fonction

$$y = e^{ax} \cos (mx + p),$$

en observant que $(e^{ax})_{(n)} = a^n e^{ax}$ et que les dérivées de cos $(mx + p)$ sont périodiquement $- m \sin (mx + p)$, $- m^2 \cos (mx + p)$, $m^3 \sin (mx + p)$, $m^4 \cos (mx + p)$; nous aurons

$$y_{(n)} = \cos (mx + p)\, a^n e^{ax} - mC_1^n \sin (mx + p)\, a^{n-1} e^{ax}$$
$$- m^2 C_2^n \cos (mx + p)\, a^{n-2} e^{ax}$$
$$+ m^3 C_3^n \sin (mx + p)\, a^{n-3} e^{ax} + m^4 C_4^n$$
$$\cos (mx + p)\, a^{n-4} e^{ax} \ldots$$

ou bien

$$y^{(3)} = e^{ax} \cos (mx + p)[a^n - m^2 C_3^n a^{n-2} + m^4 C_4^n a^{n-4} \ldots]$$
$$- e^{ax} \sin (mx + p)[mC_1^n a^{n-1} - m^3 C_3^n a^{n-3}$$
$$+ m^5 C_5^u a^{n-5} - \ldots].$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Louis Godard, élève du Lycée de Saint-Etienne (classe des mineurs).

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(*Suite*, voir p. 333 et suiv.)

Algèbre.

— Appliquer le théorème de Rolle à l'équation $x^3 - 2x - 1 + \frac{3}{x} = 0$.

— Prendre la dérivée de la fonction $y = \text{arc sin} \frac{2x}{1+x^2}$ et expliquer le résultat obtenu.

— Même question pour la fonction y arc cos $\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

— Même question pour la fonction $y = \text{arc tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

— Prendre la dérivée de la fonction implicite

$$x^2 + y^2 = a^2 e^{2 \text{arc tg} \frac{y}{x}}$$

— La fonction $e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ est-elle susceptible de maximum ou de minimum ?

— Étant donnée l'équation $x^4 - x^2 + 2x - a = 0$, déterminer a de manière que le produit de deux des racines soit égal à la somme de ces mêmes racines, et résoudre l'équation dans ce cas.

— $f(x)$ étant du degré $m - 2$ au plus, et $\varphi(x)$ du degré m, si $a, b, c, \ldots, l$ sont les racines supposées distinctes de $\varphi(x) = 0$, établir l'identité

$$\frac{f(a)}{\varphi'(a)} + \frac{f(b)}{\varphi'(b)} + \ldots + \frac{f(l)}{\varphi'(l)} = 0.$$

Démontrer qu'il y a une seconde identité quand $f(x)$ est du degré $m - 3$, et la trouver.

— Décomposer en facteurs réels du deuxième degré en x le polynôme $x^4 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$.

— Calculer la sixième dérivée de la fonction.

$$y = \frac{x^{10}}{(1-x)^2(1+x)^3}.$$

— Ayant une relation entière entre $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, on peut toujours la mettre sous la forme $f(\sin\varphi, \cos\varphi) = f(\sin\varphi) + \cos\varphi\, f_1(\sin\varphi)$; établir qu'on ne peut le faire que d'une seule manière.

Mathématiques élémentaires.

— Lieu des points dont les distances à deux droites fixes sont dans un rapport constant.

— Trouver des nombres entiers a, b, c, tels que l'on ait $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$.

— De combien de manières peut-on décomposer un nombre A en facteurs premiers entre eux deux à deux ?

— Trouver la limite vers laquelle tend $\frac{1-\cos x}{x^2}$ quand x tend vers zéro.

— Combien de fois le nombre 7 est-il facteur dans le produit $1 . 2 . 3 . 4 \ldots 99 . 100$?

— Construire un triangle, connaissant deux côtés et une médiane.

— Résoudre l'équation $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = b$.

— Trouver le maximum de $x^{\frac{m}{m'}} y^{\frac{n}{n'}} z^{\frac{p}{p'}}$ quand $x + y + z$ est une constante.

— Trouver les nombres dont le carré divisé par le produit pq donne pour reste 1, p et q étant deux nombres premiers.

— On inscrit un triangle dans une circonférence ; on mène deux hauteurs qui se coupent en H ; on prolonge l'une des hauteurs jusqu'à la rencontre de la circonférence en M. Cette hauteur coupe la base correspondante du triangle en P ; faire voir que PH = PM.

— Etant donnés deux cercles sur la sphère, trouver sur la même sphère les cercles qui coupent orthogonalement les deux cercles donnés.

— Etant donnés un cercle O et un point P dans son plan, trouver sur la droite OP un point Q tel que $OP \times OQ = R^2$; démontrer que toutes les circonférences passant par les points P et Q coupent le cercle O orthogonalement.

— a et b étant deux nombres entiers, on demande comment il faut choisir ces nombres pour que $a^2 + b^2$ soit de la forme $4m - 1$.

— Résoudre par des procédés élémentaires l'équation $x^5 - 1 = 0$ en présentant les racines dans les formules finales sous la forme $a + b\sqrt{-1}$.

— On donne un triangle ABC, et sur le prolongement de BC un point D. On demande de mener par ce point une transversale telle que l'aire du triangle AEF soit égale à une surface donnée. On trouve deux solutions ; devait-on s'y attendre? — Quelle est l'enveloppe des droites telles que EFD?

— a, b, c, d, f pouvant prendre des valeurs absolument quelconques, quelles sont dans tous les cas les conditions pour que le polynôme $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f$ soit un carré parfait?

— Etant donné un tétraèdre, on mène le plan bissecteur d'un dièdre. Démontrer que ce plan divise l'arête opposée en segments proportionnels aux aires des faces du dièdre considéré.

— P et R étant deux nombres premiers, trouver les nombres qui sont premiers avec le produit PR et inférieurs à ce produit.

— Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

— Etant donné un nombre quelconque a premier avec un nombre p, trouver un nombre x tel que la division du produit ax par p donne pour reste l'unité.

— De combien de manières peut-on décomposer un nombre donné en facteurs de même parité?

— Chercher quelle est la plus haute puissance de p $(p < n)$ qui divise le produit $1 . 2 . 3 \ldots n$.

— n' étant le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{n}{p}$ et n'' étant de même le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{n'}{p}$, faire voir que n'' est le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{n}{p^2}$.

— Mener par un point donné :

1° Une circonférence tangente à une droite et à un cercle donnés ;

2° Une circonférence tangente à deux circonférences données.

ERRATA DU NUMÉRO DE JUIN.

Un certain nombre de fautes d'impression se sont glissées dans le numéro de juin. Nous nous empressons de les signaler parce qu'elles modifient la solution de deux questions.

Page 250, ligne 20 : *au lieu de* $\frac{1}{3}\pi^2 Bh = \frac{1}{3}\pi(R + x)^2(4 - x)$

il faut $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(R + x)^2(h - x)$.

Page 252, ligne 7 : *au lieu de* $\sin 2x = \cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$

il faut $\sin 2x = \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Lignes 11 et suivantes, *il faut lire*

Le carré du côté DE est $DE^2 = R^2 \sin^2 x = \frac{R^2(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{5}} = \frac{R^2(5 - \sqrt{5})}{10}$

de même $CD^2 = R^2(\cos x - \sin x)^2 = R^2(1 - \sin 2x) = \frac{R^2(5 - 2\sqrt{5})}{5}$

Enfin

$$\frac{DC^2}{CE^2} = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} + 5)(10 - 4\sqrt{5})}{20} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$$

et $\frac{DC}{CE} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Page 280 : *au lieu de* $c^2\alpha\beta X - a^2\beta\gamma + b^2\alpha = 0$

il faut $c^2\alpha\beta - a^2\beta X + b^2\alpha Y = 0$.

Page 282, ligne 15 : *au lieu de* $-\gamma y$, *il faut* $-Yy$.

ligne 17 : *au lieu de* $-b^2\alpha\gamma$, *il faut* $-b^2\alpha Y$.

ligne 19, dans la parenthèse :

au lieu de $\frac{Xx}{a^2}$, *il faut* $\frac{\alpha X}{a^2}$.

ligne 21 : *au lieu de* $\frac{\alpha^2 a^2}{b^2}$, *il faut* $\frac{\alpha^2 b^2}{a^2}$.

Page 283, lignes 2 et 3 : *au lieu de* $-\left[\frac{c^2\beta^2}{b^4}\right.$ — etc., jusqu'à la fin,

il faut

$$+ d^2\left[\left(\frac{c^2\beta^2}{b^4} - \frac{\alpha^2 b^2}{a^4} - \frac{\beta^2 a^2}{b^4}\right)d^2 - \left(\frac{c^2\beta^2}{b^2} - \frac{\alpha^2 b^2}{a^2} - \frac{\beta^2 a^2}{b^2}\right)\right] = 0,$$

car les termes entre crochets s'annulent ainsi que les autres.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 15140-0.

DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE
DE LA PARABOLE
ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite, et fin* voir p. 337 et suiv.)

LXX. **Théorème.** — MM′ (fig. 31) *est une corde normale en* M *à une parabole,* I *son milieu,* D *le point où elle rencontre l'axe; la parallèle à l'axe menée par le point* I *rencontre l'ordonnée du point* M *en un point* A *tel que la ligne* AD *est perpendiculaire à* MM.

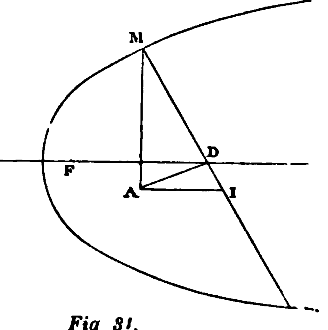


Fig 31.

De la valeur trouvée pour MM′ dans le théorème précédent, on déduit

$$MI = \frac{p}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

et à cause du triangle rectangle IAM

$$AM = IM \sin \alpha = \frac{p}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Or, on sait que $MD = \dfrac{p}{\cos \alpha}$;

donc, en vertu des relations précédentes,

$$MD = AM \sin \alpha$$

c'est-à-dire que le triangle ADM est rectangle en D.

LXXI. **Théorème.** — α *et* α' *étant les angles que font avec les rayons vecteurs correspondants deux normales égales issues d'un point du plan d'une parabole, ces normales étant comptées de ce point à la courbe, on a*

$$tg\, \alpha\; tg\, \alpha'\; tg\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) = \frac{d}{p}$$

d *étant la distance de ce point à l'axe.*

Si l'on remarque que la longueur d'une normale comptée comme il est dit dans l'énoncé, a pour expression

$$\frac{p}{\cos\alpha} + \frac{d}{\sin\alpha},$$

un calcul analogue à celui qui a été fait pour l'ellipse conduit à la relation donnée.

LXXII. — *Valeur du rayon du cercle osculateur en un point d'une parabole. Sa construction.*

Il suffit de se reporter à la pareille détermination faite par l'ellipse pour voir que, si R désigne le rayon du cercle osculateur en un point d'une parabole, on a

$$R = \frac{p}{\cos^3\alpha}.$$

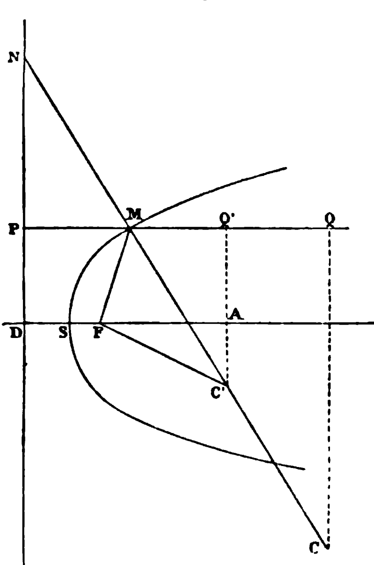


Fig. 32.

Pour le construire, on remarque que le rayon vecteur du point considéré a pour expression

$$FM = \frac{p}{2\cos^2\alpha},$$

de sorte que

$$R = \frac{2FM}{\cos\alpha}.$$

Cette expression montre que la perpendiculaire au rayon FM *(fig. 32)* menée par le foyer rencontre la normale en M en un point C' tel que

$$C'M = \frac{R}{2}.$$

Pour avoir la valeur de R en un point donné, la normale étant menée, on élèvera la perpendiculaire FC' à FM, on prendra CC' = C'M; CM sera le point cherché et C le centre du cercle osculateur en M.

LXXIII. **Théorème.** — *La portion d'une normale en un point d'une parabole, comprise entre la courbe et la directrice, est égale à la moitié du rayon du cercle osculateur en ce point.*

Soit *(fig. 32)* M un point d'une parabole, MN la portion de la normale en M comprise entre la courbe et la directrice; on sait comment a été construit le triangle MFC'. Les deux triangles NMP et MFC' sont égaux comme ayant un côté égal MP = MF et comme étant semblables, FMC' = PMN,

donc $$MN = MC' = \frac{R}{2}.$$

Cette propriété permet de construire plus simplement le rayon du cercle osculateur en un point d'une parabole, puisqu'il suffit, la normale étant menée, de porter, à partir du point considéré et dans le sens voulu, une longueur égale au double de la portion de la normale comprise entre la courbe et la directrice.

LXXIV. **Théorème.** — *En un point d'une parabole la corde du cercle osculateur qui est menée parallèlement à l'axe de la courbe est égal à quatre fois le rayon vecteur du point.*

Soit *(fig. 32)* M le point considéré, C le centre du cercle osculateur en ce point, PM parallèle à l'axe, Q' et Q les projections des points C et C' sur PM; C' étant le milieu de MC, Q' sera le milieu de MQ, et comme les triangles C'FM et C'MQ' sont égaux, on en conclut que MQ' = MF et partant MQ = 2MF; or MQ n'est que la demi-corde du cercle osculateur: la corde entière vaudra donc 4MF.

LXXV. **Théorème.** — *Le lieu du point symétrique du foyer par rapport aux normales à une parabole est une parabole.*

En remarquant que *(fig. 32)* un point Q' du lieu a même ordonnée que le point M et que son abscisse SA a pour expression

$$SA = PQ' - DS = 2MF - \frac{p}{2} = \frac{p}{\cos^2 \alpha} - \frac{p}{2},$$

on en déduit

$$SA - \frac{p}{2} = \frac{p}{\cos^2 \alpha} - p = p \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

donc $$\overline{QA}^2 = p\left(SA - \frac{p}{2}\right);$$

donc, en vertu du théorème V, le lieu cherché est une para-

bole de même axe que la première et dont la tangente au sommet passe au foyer de la première.

Corollaire. — *La projection du foyer sur les normales se trouve également sur une parabole.*

VII

PROPRIÉTÉS DES CORDES FOCALES

LXXVI. **Théorème.** — *Le produit des ordonnées des extrémités d'une corde focale est constant et égal à* — p^2.

Les tangentes aux extrémités d'une corde focale étant rectangulaires (LIII), il en est de même des normales, de sorte que si α est l'angle que fait l'une d'elles avec le rayon vecteur correspondant, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sera l'angle que fait l'autre avec son rayon vecteur. Si l'on désigne par y_1 et y_2 les ordonnées des extrémités de la corde, on a, en remarquant que ces ordonnées sont toujours de signes contraires,

$$y_1 = p \operatorname{tg} \alpha$$
$$y_2 = -p \operatorname{cotg} \alpha$$

et par suite
$$y_1 y_2 = -p^2.$$

Corollaire. — *Le produit des abscisses des extrémités d'une corde focale est constant et égal à* $\frac{p^2}{4}$.

LXXVII. **Théorème.** — *Par le point où se coupent les normales aux extrémités d'une corde focale, on peut mener une troisième normale; l'ordonnée du pied de cette normale est double de celle du point de concours des deux premières; mais les signes sont différents.*

On a vu (LXIII) qu'en désignant par y_1, y_2, y_3 les ordonnées de trois normales menées à une parabole d'un point distant de l'axe d'une longueur d, on a

$$y_1 y_2 y_3 = 2p^2 d;$$

or, on a obtenu dans le théorème précédent

$$y_1 y_2 = p^2:$$

on en conclut
$$y_3 = 2d,$$

ce qu'il fallait démontrer. On a ainsi un moyen assez simple de construire cette troisième normale, la courbe étant tracée

LXXVIII. **Théorème.** — *La normale à une extrémité d'une corde focale rencontre la courbe en un point d'où part une seconde normale; l'ordonnée du pied de cette dernière est double de l'ordonnée de l'autre extrémité de la corde.*

On a obtenu en effet (LXIII), en désignant par y_1 et y'_2 les ordonnées des pieds des deux normales qui se coupent sur la courbe. $y_1 y'_2 = 2p^2$.

Mais on vient d'obtenir (LXXVI) pour les extrémités d'une corde focale dont l'une coïncide avec l'un de ces points

$$y_1 y_2 = -p^2;$$

il en résulte que $y_2 = -\frac{y'_2}{2}$,

ce qu'il fallait démontrer. Les deux points considérés sont évidemment situés de part et d'autre de l'axe.

LXXIX. **Théorème.** — *La somme des inverses des segments déterminés par le foyer sur une corde focale est constante.*

En effet, les angles que font les normales aux extrémités d'une corde focale étant complémentaires, les rayons vecteurs qui forment cette corde ont pour expression (XXIII)

$$\frac{p}{2\cos^2\alpha} \text{ et } \frac{p}{2\sin^2\alpha};$$

d'où en prenant les inverses

$$\frac{2\cos^2\alpha}{p} + \frac{2\sin^2\alpha}{p} = \frac{2}{p}.$$

Remarque. — La longueur d'une corde focale est alors

$$\frac{p}{2\cos^2\alpha} + \frac{p}{2\sin^2\alpha} = \frac{p}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{2p}{\sin^2 2\alpha}.$$

Elle aura sa valeur minimum lorsque sin 2α aura sa plus grande valeur, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$; alors $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et la longueur de la corde est $2p$. Il est facile de voir que cette corde est perpendiculaire à l'axe.

Une corde focale perpendiculaire à la première aurait pour expression $\frac{2p}{\cos^2 2\alpha}$

et comme $$\frac{\cos^2 2\alpha}{2p} + \frac{\sin^2 2\alpha}{2p} = \frac{1}{2p},$$
on en conclut que *la somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante.*

LXXX. **Théorème.** — *Si l'on prolonge les normales aux extrémités d'une corde focale, la corde qui joint leurs points d'intersection avec la courbe est parallèle à la première et égale à trois fois cette première.*

Soit (*fig. 33*) P le point de concours des normales menées

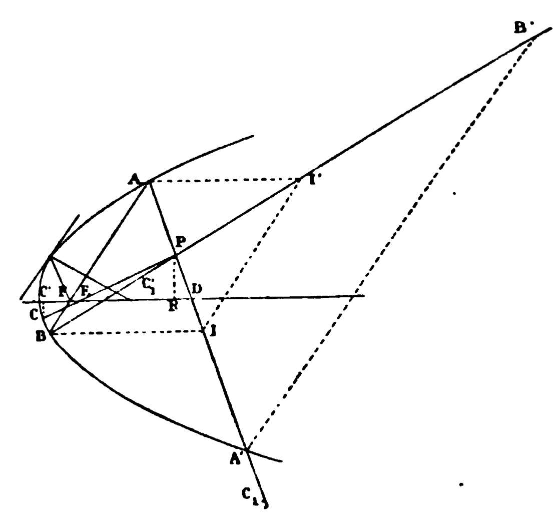


Fig. 33.

aux extrémités de la corde focale AB; α étant l'angle BAP, le triangle rectangle BAP donne
$$AP = AB \cos\alpha = \frac{p}{2\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$
Si l'on se reporte au problème LXIX, on trouve pour la longueur d'une corde normale à la parabole
$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$
On en conclut immédiatement
$$AA' = 4AP.$$

Il est évident que pareillement on a

$$BB' = 4BP,$$

de sorte que les deux triangles APB et A'PB' qui ont un angle égal et les côtés qui le comprennent proportionnels, sont semblables ; il en résulte évidemment l'égalité des angles $\widehat{PAB}$ et $\widehat{PA'B'}$, $\widehat{PBA}$ et $\widehat{PB'A'}$, c'est-à-dire le parallélisme des cordes AB et A'B' et en outre la relation annoncée

$$A'B' = 3AB.$$

Corollaire I. — *La parallèle à l'axe menée par l'une des extrémités d'une corde focale coupe la corde formée par la normale à l'autre en son milieu.*

Soit I le point où la parallèle à l'axe menée par le point B rencontre AA', le triangle ABI est isoscèle et PI = AP; donc $AI = \frac{AA'}{2}$. Soit T le point où la tangente en A rencontre BI ou son prolongement, il est évident que les trois points I, A, T sont sur un cercle dont le centre est B.

Corollaire II. — *Le triangle qui a pour sommets les points* A *et* I *et le pied de la troisième normale issue du point* P *a son centre de gravité sur l'axe.*

On a vu, en effet (LXXVII), que, PR étant l'ordonnée du point P et CC' celle du pied C de la troisième normale issue du point P, CC' = 2PR, et alors le point E où PC coupe l'axe est tel que 2PE = CE; la ligne CP étant médiane du triangle CAI, le point E est le centre de gravité de ce triangle. Il est également le centre de gravité du triangle I'CB, I' étant le milieu de BB'.

LXXXI. **Théorème.** — *La corde focale passant par le foyer et parallèle à une tangente est égale à quatre fois le rayon vecteur du point de contact.*

Soit (*fig. 33*) M le point de contact d'une tangente parallèle à la corde focale AB ; la normale en ce point est perpendiculaire à AB, et il est facile de voir que l'angle qu'ell fait avec le rayon vecteur FM est égal à $2\alpha - \frac{\pi}{2}$; d sorte que la valeur de ce rayon est

$$FM = \frac{p}{2\cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{p}{2\sin^2 2\alpha}.$$

En comparant cette valeur à celle que l'on a obtenue (LXIXX, Remarque) pour la corde focale AB, on trouve

$$AB = 4FM.$$

Remarque. — Une solution purement géométrique de cette propriété a été donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1877.

LXXXII. **Théorème.** — *Une corde normale en un point d'une parabole se projette sur la corde focale de ce point ou sur l'axe suivant une longueur égale à quatre fois le rayon vecteur de l'autre extrémité de la corde.*

Soit (*fig. 33*) AA′ une corde normale en A; sa longueur a pour expression (XLIV)

$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha \cos\alpha}$$

et l'angle FAA′ étant α, la projection de AA′ sur FA a pour valeur

$$\frac{2p}{\sin^2\alpha},$$

or la valeur de FB est $\frac{p}{2\sin^2\alpha}$, dont la projection de AA′ sur AB vaut 4FB.

LXXXIII. **Problème.** — *Déterminer le paramètre d'une parabole connaissant les longueurs de deux tangentes rectangulaires.*

Soient a et b les longueurs des tangentes données; AB (*fig. 33*) étant la polaire de leur point de concours, on a

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2.$$

Si M est le pôle de la corde AB, on a, à cause du triangle rectangle MAB, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\overline{MF}^2}$;

or

$$\overline{MF}^2 = BF \times AF$$

et, en vertu du théorème XLIV,

$$BF \times AF = \frac{p}{2} \times AB = \frac{p}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{MF}^2.$$

On en déduit facilement, en vertu de la seconde relation,

$$p = \frac{2a^2\ b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

LXXXIV. **Théorème.** — R *et* R′ *étant les rayons des cercles osculateurs aux extrémités d'une corde focale*, on a

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}}.$$

Les angles que font les normales aux extrémités d'une corde focale avec cette corde étant complémentaires, R et R′ ont pour expressions (LXXII)

$$R = \frac{p}{\cos^3 \alpha}, \quad R' = \frac{p}{\sin^3 \alpha},$$

Il est facile d'en déduire

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \sin^2 \alpha = \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

et par addition

$$1 = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

expression qui conduit à celle de l'énoncé.

LXXXV. **Théorème.** — *Les extrémités* A, B *d'une corde focale et les milieux des cordes normales en* A *et* B *sont les sommets d'un losange dont la surface est égale à celle du quadrilatère dont les sommets sont* A *et* B *et les centres des cercles osculateurs en ces extrémités.*

Soient (*fig.* 33) I et I′ les milieux des cordes normales en A et B, on a vu (LXXX) que

$$AP = PI, \quad BP = PI', \quad AB = BI$$

et par suite la figure ABII′ est un losange dont la surface S est évidemment égale à quatre fois celle du triangle APB, c'est-à-dire $S = 4\frac{AP \times BP}{2} = 2AP \times BP$,

et en vertu des expressions trouvées pour AP et BP

$$S = \frac{p^2}{2\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha};$$

soient C_1 et C'_1 les centres des cercles osculateurs en A et B,

le quadrilatère ABc_1c_1', dont les diagonales sont rectangulaires, a pour surface

$$S' = \frac{Ac_1 \times Bc_1'}{2} = \frac{R \times R'}{2} = \frac{p^2}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha};$$

donc $S = S'$.

QUESTION 185.

Solution par M. SIGWARTH, Pensionnat Saint-Joseph, à Thonon.

On considère l'égalité

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

et on propose d'étudier les variations de y *quand* x *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$. *En supposant* a — b, *on propose de démontrer*

1° *Que* a *est le maximum de* y;

2° *Que* b *est le minimum de* y;

3° *Que si l'on donne à* y *une valeur comprise entre* a *et* b, *l'équation bicarrée qui donne* x *a ses quatre racines réelles, et que si l'on désigne par* x_1 *l'une des racines, les trois autres sont données par les égalités*

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1x_3 + 1 = 0$$
$$x_1x_4 - 1 = 0$$

(De Longchamps.)

De l'expression donnée on tire

$$x^4(y^2 - b^2) + x^2(2y^2 + 2b^2 - 4a^2) + y^2 - b^2 = 0$$

d'où

$$x^2 = \frac{2a^2 - b^2 - y^2 \pm \sqrt{4b^2y^2 - 4a^2y^2 - 4a^2b^2 + 4a^4}}{y^2 - b^2} \quad (1)$$

x^2 doit être réel; il faut donc que l'on ait

$$4b^2y^2 - 4a^2y^2 - 4a^2b^2 + 4a^4 \geq 0$$

ou $\qquad y^2(a^2 - b^2) - a^2(a^2 - b^2) \leq 0.$

divisant par $\qquad a^2 - b^2; \quad y^2 \leq a^2 \quad$ et $y \leq a$.

On voit que a est le maximum de y et par suite que pour $y = a, \quad x = 1$.

Cette manière de procéder ne fait pas voir clairement les variations de la fonction.

x variant de $-\infty$ à $+\infty$, cherchons les valeurs de la fonction pour un certain nombre de valeurs de la variable x.

1° Le dénominateur n'est jamais nul; donc y ne passe pas par l'infini;

2° Le numérateur n'est jamais nul, donc y ne passe pas par o;

3° Pour $x = 0$, $y = b$;

4° Pour $x = \pm\infty$, on a, en divisant préalablement tous les termes de la fraction proposée par x^4,

$$y^2 = \frac{b^2 + \frac{4a^2 - 2b^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^4}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}$$

et pour $x = \infty$, $y = b$.

On peut, en outre, remarquer que cette fonction prend les mêmes valeurs pour $x = \pm 2$ et $\pm \frac{1}{2}$; $x = \pm 3$ et $\pm \frac{1}{3}$...

Ce résultat est facile à comprendre pour les valeurs égales et de signes contraires; car l'expression donnée, ne renfermant que des puissances paires de x, reste la même quand on change x en $-x$. Pour les inverses de ces mêmes valeurs, on remarque que le coefficient de x^4 et le terme connu sont égaux; on sait que dans ce cas les racines se présentent sous cette forme.

En faisant successivement dans l'expression donnée $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ ou $\pm \frac{1}{2}$, $x \pm 3$ ou $\pm \frac{1}{3}$ ... $x = \pm\infty$ ou $\pm \frac{1}{\infty}$, on a

$$y = a, \quad y = \frac{\sqrt{16a^2 + 9b^2}}{5}, \quad y = \frac{\sqrt{36a^2 + 64b^2}}{10}, \quad y = b.$$

On peut vérifier facilement que les expressions irrationnelles de y sont plus petites que a et plus grandes que b et qu'elles vont en diminuant d'une manière continue de a à b.

Donc, si x varie de 1 à $+\infty$, y varie de a à b en passant par toutes les valeurs intermédiaires;

Donc 1° a est le maximum de y;

2° b est le minimum de y.

La courbe construite pour $a = 10$ et $b = 2$, fait voir les variations de la fonction. On voit que cette fonction atteint deux fois le maximum pour $x = \pm 1$; trois fois le minimum pour $x = 0$ et $x = \pm \infty$.

Tirons de l'équation (1) la valeur de x, on a

$$x = \pm \sqrt{\frac{2a^2 - b^2 - y^2 \pm \sqrt{4b^2y^2 - 4a^2y^2 - 4a^2b^2 + 4a^4}}{y^2 - b^2}},$$

on sait que $\frac{\sqrt{16a^2 + 9b^2}}{5}$ trouvée ci-dessus pour y est compris entre a et b.

Si on remplace y par cette valeur dans la relation (2), il vient

$$x = \pm \sqrt{\frac{\frac{34}{25}(a^2 - b^2) \pm \frac{6}{5}(a^2 - b^2)}{\frac{16}{25}(a^2 - b^2)}}.$$

Simplifiant et séparant les racines, il vient $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, valeurs qui vérifient les égalités proposées.

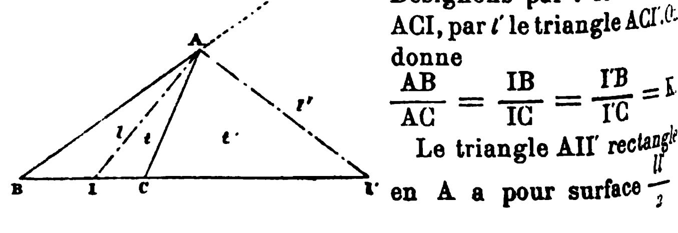
QUESTION 203.

Solution par M. Reymondier, Pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne.

Démontrer que la surface d'un triangle en fonction des bissectrices l, l' *intérieure et extérieure d'un angle et du rapport* K *des côtés formant cet angle est donnée par la formule*

$$S = \frac{ll'}{4}\left(\frac{K^2 - 1}{K}\right).$$

Soient le triangle ABC ; AI, AI' les bissectrices données. Désignons par t le triangle ACI, par t' le triangle ACI'. On a donne



$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC} = \frac{I'B}{I'C} = K.$$

Le triangle AII' rectangle en A a pour surface $\frac{ll'}{2}$

$= t + t'$. Les triangles ABC, ACI ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Donc

$$\frac{S}{t} = \frac{BC}{IC} = \frac{IB + IC}{IC};$$

or $\frac{IB}{IC} = K$, d'où $\frac{IB + IC}{IC} = K + 1$;

par suite $$t = S \cdot \frac{1}{K + 1}:$$

De même les triangles ABC, ACI' donnent

$$\frac{S}{t'} = \frac{BC}{I'C} = \frac{I'B - I'C}{I'C} = K - 1$$

et $$t' = S \cdot \frac{1}{K - 1};$$

dès lors $$t + t' = \frac{ll'}{2} = S\,\frac{2K}{K^2 - 1};$$

d'où enfin $$S = \frac{ll'}{4}\left(\frac{K^2 - 1}{K}\right).$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Deslais, au Mans; Gino Laria, à Mantoue; Huet, à Orléans; Daguillon, lycée Henri IV; Nou, à Perpignan; Abry, à Thonon; Legrain, Gossieaux, Boulogne, à Saint-Quentin; Bousquet, à Nice; Dupuy, à Grenoble; Blessel, à Paris.

QUESTION 204.

Solution par M. Renaud, élève du Lycée de Bordeaux.

Du pied A' *d'une des hauteurs* AA' *d'un triangle* ABC *on mène les perpendiculaires* A'D, A'E, A'K, A'L *respectivement sur les côtés* AB, AC *et des deux autres hauteurs* BB', CC' *du triangle* ABC.

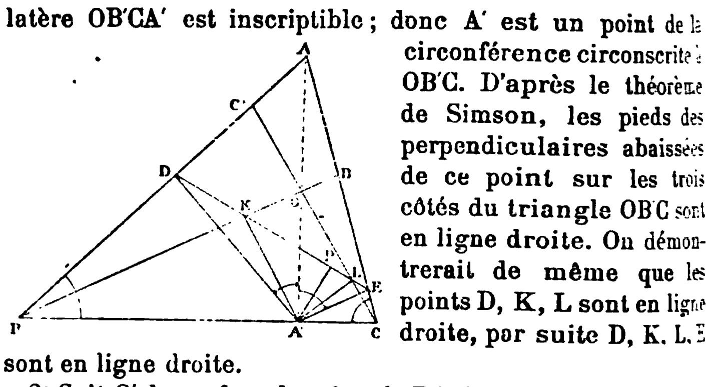
1° *Démontrer que les quatre points* D, K, L, E *sont en ligne droite ;*

2° *Qu'en appelant* S *la surface du triangle* ABC, *la surface du triangle* A'DE *a pour expression* S sin B sin C cos B cos C;

3° *Que la hauteur* A'P *du triangle* A'DE *a pour expression* 2R sin B sin C cos B cos C, R *étant le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC. (Perrin.)

1° O étant le point de concours des hauteurs, le quadri-

latère OB′CA′ est inscriptible; donc A′ est un point de la circonférence circonscrite à OB′C. D'après le théorème de Simson, les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés du triangle OB′C sont en ligne droite. On démontrerait de même que les points D, K, L sont en ligne droite, par suite D, K, L, E sont en ligne droite.



2° Soit S′ la surface du triangle DA′E, on a,

$$S' = \frac{A'D \cdot A'E}{2} \sin A. \qquad [DAE = 180 - A],$$

or $$A'D = C \sin B \cos B$$
$$A'E = b \sin C \cos c,$$

donc (1) $$S' = \frac{bc \sin A}{2} \sin B \sin C \cos B \cos C,$$

mais $$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

donc $$S' = S \sin B \sin C \cos B \cos C.$$

3° L'égalité (1) peut s'écrire

$$DE \cdot A'P = bc \sin A \sin B \sin C \cos B \cos C,$$

mais $$DE = c \sin A \sin B,$$
donc $$A'P = b \sin C \cos B \cos C,$$
or $$2R \sin B = b,$$
donc $$A'P = 2R \sin B \sin C \cos B \cos C.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Nou, à Perpignan ; Dupuy, à Grenoble.

QUESTION 205.

Solution par M. Deslais, élève au Lycée du Mans.

Trouver 2n + 1 *nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des* n + 1 *premiers de ces nombres soit égale à la somme des carrés des* n *nombres suivants.*

Soit x le nombre moyen, on doit avoir

$$(x-n)^2+(x-n+1)^2+\ldots+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2$$
$$=(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots(x+n)^2.$$

Développant et simplifiant, il vient

$$x^2-2nx-2(n-1)x-4x-2x=2x+4x+\ldots+2nx$$

ou $$x^2-2x(2+4+6+\ldots+2(n-1)+2n)=0,$$

or $$2+4+6+\ldots+2n=\frac{(2+2n)n}{2}=(n+1)n,$$

par suite $$x^2-2n(n+1)x=0$$

ou $$x[x-2n(n+1)]=0,$$

équation satisfaite pour $x=0$ et $x=2n(n+1$.

Les nombres cherchés sont donc

$$-n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,$$
$$+\ldots,+(x-1),+n$$

ou

$$[2n(n+1)-n],\ [2n(n+1)-(n-1)],\ \ldots,[2n(n+1)-2].$$
$$[2n(n+1)-1],\quad 2n(n+1),\quad [2n(n+1)+1],\quad \ldots,$$
$$[2n(n+1)+n].$$

Comme vérification, faisons $n=2$, on a $x=0$ et $x=12$. Les cinq nombres consécutifs seront

$$-2,\quad -1,\quad 0,\quad +1,\quad +2$$

ou $$10\quad 11\quad 12\quad 13\quad 14.$$

On a en effet

$$\overline{10}^2+\overline{11}^2+\overline{12}^2=\overline{13}^2+\overline{14}^2.$$

C'est le cas particulier examiné tome II, page 30.

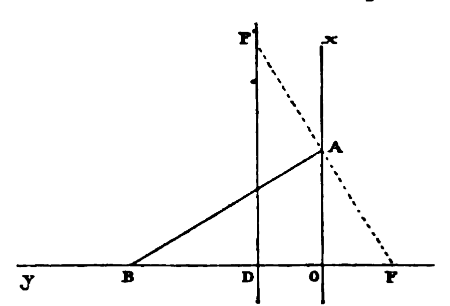
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gino Loria, de Mantou; Malcou, à La Seyne; Huet, à Orléans; Combier; Reymondier, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

QUESTION 206.

Solution par M. LEGAY, élève du Lycée Saint-Louis.

Deux mobiles partent d'un point O *sans mouvement initial; l'un* A *parcourt la droite* OX *d'un mouvement uniforme; l'autre* B *parcourt la droite* OY, *perpendiculaire à* OX, *d'un mouvement uniformément accéléré; démontrer que la droite qui les joint à chaque instant est constamment tangente à une parabole.*

Soient a, b deux constantes, t un instant quelconque compté



à partir du moment où les mobiles sont partis du point O, on a $OA = at$, $OB = bt^2$.

Élevons en A une perpendiculaire sur AB qui rencontre en F la droite OY prolongée ; on a

$$OF = \frac{\overline{OA}^2}{OB} = \frac{a^2}{b}.$$

La longueur OF est constante; par suite, si l'on prolonge FA d'une longueur égale à AF', le point F' se trouve constamment sur une parallèle F'D à OX menée à une distance de celle-ci OD = OF.

Il en résulte que la droite BA est constamment tangente à la parabole qui a le point F pour foyer et la droite F'D pour directrice.

Nota. — Ont résolu la même question MM. Heurteaux, de Nantes; d'Ocagne, du lycée Fontanes, qui a généralisé la question.

QUESTION 207.

Solution par M. Legrain, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Sur une demi-circonférence de diamètre AB *on prend deux points* P *et* Q *tels que les droites* AQ *et* BP *se coupant en* M, *on ait* AM . BM = 2AP . BQ.

Trouver le lieu géométrique de M.

On a d'abord $AM . MB = 2AP . BQ$ (1)

Les triangles semblables APM et BQM sont semblables et

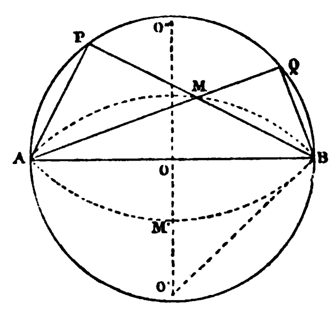
donnent $$\frac{AP}{BQ} = \frac{AM}{BM},$$

d'où l'on tire $AP \cdot BM = AM \cdot BQ;$ (2)

divisant (1) et (2) membre à membre et faisant le produit en croix, on a

$$\overline{MB}^2 = 2\overline{BQ}^2;$$

relation qui indique que MQB est isoscèle.



L'angle en M, supplément d'un angle de 45°, vaut 135° et est par suite constant. Donc, de M on voit AB sous un angle constant. Le lieu géométrique de M se compose alors des deux segments capables de 135°, AMB et AM'B symétriques par rapport à AB.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Fabry, collège Chaptal; Boucheaux, d'Angers; Dupuy, de Grenoble; Pruget, Bénard, de Châteauroux; Lesieur, Daguillon, du lycée Henri IV; Coignard, Rouché, Legay, du lycée Saint-Louis; Heurteaux, de Nantes; Sicard, de Lyon; Reymondier, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne; Potier, de Rennes; Courtal, à Blaye; Alery, à Thonon; Joly, de Tarbes; Boulogne, Gossiaux, de Saint-Quentin; Cavrais, de Toulouse; Payeux, de Verdun; Etchats, de Mont-de-Marsan; Chretien, du Havre.

QUESTION 217.

Solution par M. Louis Godard, élève du Lycée de Saint-Étienne, classe des Mineurs.

Étant données deux circonférences C et C′ tangentes entre elles et une de leurs tangentes extérieures AB, on mène une circonférence C″ tangente aux deux circonférences proposées et à AB; puis une circonférence C‴ tangente à C, à C″ et à AB, et ainsi de suite. On propose d'étudier les séries formées par les rayons de ces circonférences successives et par les surfaces des mêmes cercles. On donne AB — 2a, AC = R.

Soit R′ le rayon de C′ on a

$$(R + R')^2 = (R - R')^2 + 4a^2,$$

d'où $$R' = \frac{a^2}{R}.$$

Soient r_1, r_2, r_3 .... r_n les rayons des circonférences successives, on a $\sqrt{Rr_1} + \sqrt{R'r_1} = a = \sqrt{RR'}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}; \text{ d'où}$$

$$r_1 = \frac{RR'}{(\sqrt{R}+\sqrt{R'})^2} = \frac{a^2}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2}$$

De même

$$\frac{1}{\sqrt{r^2}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{2}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}}$$

d'où $$r_2 = \frac{RR'}{\sqrt{R} + 2\sqrt{R'}} = \frac{a^2}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{2a}{R}\right)^2}$$

En continuant de la sorte on trouverait successivement

$$r_4 = \frac{a^2}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{3a}{R}\right)^2}$$

$$\vdots$$

$$r_n = \frac{a^2}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{na}{R}\right)^2}$$

on a donc

$$S_n = \frac{a^2}{R} \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2a}{R}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{na}{R}\right)^2} \right\}$$

Or, on sait que la série

$$\frac{1}{\left(1+\frac{a}{R}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2a}{R}\right)^2} + \dots \frac{1}{\left(1+\frac{xa}{R}\right)^2}$$

qui est formée par la suite des carrés des inverses des termes d'une progression arithmétique est convergente.

Pour la suite formée par les surfaces de ces cercles, on aurait

$$S_n = \frac{\pi a^4}{R^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{a}{R}\right)^4}+\frac{1}{\left(1+\frac{2a}{R}\right)^4}+\dots\right]$$

et la série entre parenthèses sera, à plus forte raison, convergente.

QUESTION 218.

Solution par M. HAURE, élève du Lycée Louis-le-Grand.

Étudier la série

$$1+\frac{x}{x+p+1}+\dots\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{(x+p+1)\dots(x+p+n+1)}+\dots$$

Formons le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{x+n+1}{x+p+n+2}$ qui tend vers 1 pour n infini et appliquons le théorème de Gauss

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+x+1}{n+x+p+2}.$$

Pour que la série soit convergente il faut et il suffit que

$$(x+p+2)-(x+1) > 1$$

c.-à-d. $\quad p+1 > 1$ ou $p > 0$.

Si $p = 0$, la série devient

$$1+\frac{x}{x+1}+\dots+\frac{x}{x+n+1}$$

On sait que dans toute série convergente le produit nU_n tend vers 0 quand n devient infini.

Or $$nU_n = \frac{nx}{x+n}.$$

Donc $$\lim nU_n = x$$

donc si $x \gtrless 0$ la série est divergente.

On peut déduire le théorème de Gauss de celui de Duhamel; mais Gauss l'a démontré directement; nous pouvons donc essayer de déduire le théorème de Duhamel de la condition de convergence de cette série.

Soit $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{1+\alpha}$ le rapport d'un terme au précédent, dans une série, α étant un nombre positif tendant vers 0.

Je dis que si $n\alpha$ tend vers un nombre K plus grand que l'unité, la série V est convergente.

Or, pour démontrer que la série est convergente, il suffit de démontrer que l'on a constamment, à partir d'un certain rang,

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} < \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

U_n désignant le terme général de la série étudiée plus haut, série dans laquelle p est quelconque, pour le moment, mais positif, et qui par conséquent est convergente.

Il s'agit donc de démontrer que

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{x+n+1}{x+n+p+2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{1+\frac{p+1}{x+n+1}}$$

ou que l'on a

$$1+\alpha > \frac{p+1}{x+n+1}+1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha > \frac{p+1}{x+n+1}$$

ou

$$n\alpha > \frac{n(p+1)}{n+x+1}.$$

Or, cette inégalité peut toujours être satisfaite à partir d'un certain rang : car on a $\text{Lim}\, n\alpha = K$

et

$$\text{Lim}\, \frac{n(p+1)}{x+n+1} = p+1.$$

Prenons $p+1 < K$, c'est-à-dire $p < K-1$, ce qui est toujours possible, puisque l'on a $K > 1$. On aura, de quelque manière que $n\alpha$ tende vers K, à partir d'un certain rang,

$$n\alpha > p+1$$

et à fortiori

$$n\alpha > \frac{n(p+1)}{n+x+1},$$

c'est-à-dire $$n\alpha > \frac{p+1}{1+\frac{x+1}{n}}$$

en supposant $x+1>0$, ce qui peut toujours être réalisé.

Donc les inégalités $$n\alpha > \frac{n(p+1)}{n+x+1}$$

et en remontant $$\frac{V_{n+1}}{V_n} < \frac{U_{n+1}}{U_n},$$

sont vérifiées, et si $\lim n\alpha > 1$, la série V est convergente, c. q. f. d.

Note de la Rédaction. — M. Jaubert, maître répétiteur au lycée de Tarbes, nous a adressé une autre solution qui a sur la précédente l'avantage de fournir la sommation même de la suite considérée; malheureusement, il n'en a pas déduit la démonstration que nous demandions du théorème de Duhamel, et, de plus, son raisonnement n'est pas complet, pour un motif qu'il est important de mettre en lumière.

M. Jaubert part des identités suivantes:

$$1 = 1$$

$$\frac{x}{x+p+1} = 1 - \frac{p+1}{x+p+1}$$

$$\frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)} = \frac{x}{x+p+1} - \frac{x(p+1)}{(x+p+1)(x+p+2)}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+p+1)(x+p+2)(x+p+3)} = \frac{x(x+1)}{(x+p+1)(x+p+2)} - \frac{x(x+1)(p+1)}{(x+p+1)(x+p+2)(x+p+3)}$$

et généralement

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots(x+p+n+1)} = \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{(x+p+1)(x+p+2)\ldots(x+p+n)}$$

$$FM = \frac{p}{2\cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{p}{2\sin^2 2\alpha}.$$

En comparant cette valeur à celle que l'on a obtenue (LXIXX, Remarque) pour la corde focale AB, on trouve

$$AB = 4FM.$$

Remarque. — Une solution purement géométrique de cette propriété a été donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1877.

LXXXII. **Théorème.** — *Une corde normale en un point d'une parabole se projette sur la corde focale de ce point ou sur l'axe suivant une longueur égale à quatre fois le rayon vecteur de l'autre extrémité de la corde.*

Soit (*fig. 33*) AA′ une corde normale en A; sa longueur a pour expression (XLIV)

$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha \cos\alpha}$$

et l'angle FAA′ étant α, la projection de AA′ sur FA a pour valeur

$$\frac{2p}{\sin^2\alpha},$$

or la valeur de FB est $\frac{p}{2\sin^2\alpha}$, dont la projection de AA′ sur AB vaut 4FB.

LXXXIII. **Problème.** — *Déterminer le paramètre d'une parabole connaissant les longueurs de deux tangentes rectangulaires.*

Soient a et b les longueurs des tangentes données; AB (*fig. 33*) étant la polaire de leur point de concours, on a

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2.$$

Si M est le pôle de la corde AB, on a, à cause du triangle rectangle MAB, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\overline{MF}^2}$;

or $\overline{MF}^2 = BF \times AF$

et, en vertu du théorème XLIV,

$$BF \times AF = \frac{p}{2} \times AB = \frac{p}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{MF}^2.$$

On en déduit facilement, en vertu de la seconde relation,

$$p = \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

LXXXIV. **Théorème.** — R *et* R′ *étant les rayons des cercles osculateurs aux extrémités d'une corde focale*, on a

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}}.$$

Les angles que font les normales aux extrémités d'une corde focale avec cette corde étant complémentaires, R et R′ ont pour expressions (LXXII)

$$R = \frac{p}{\cos^3 \alpha}, \quad R' = \frac{p}{\sin^3 \alpha},$$

Il est facile d'en déduire

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \sin^2 \alpha = \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

et par addition

$$1 = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

expression qui conduit à celle de l'énoncé.

LXXXV. **Théorème.** — *Les extrémités* A, B *d'une corde focale et les milieux des cordes normales en* A *et* B *sont les sommets d'un losange dont la surface est égale à celle du quadrilatère dont les sommets sont* A *et* B *et les centres des cercles osculateurs en ces extrémités.*

Soient (*fig.* 33) I et I′ les milieux des cordes normales en A et B, on a vu (LXXX) que

$$AP = PI, \quad BP = PI', \quad AB = BI$$

et par suite la figure ABII′ est un losange dont la surface S est évidemment égale à quatre fois celle du triangle APB, c'est-à-dire $S = 4\frac{AP \times BP}{2} = 2AP \times BP,$

et en vertu des expressions trouvées pour AP et BP

$$S = \frac{p^2}{2\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha};$$

soient C_1 et C'_1 les centres des cercles osculateurs en A et B,

et comme $$\frac{\cos^2 2\alpha}{2p} + \frac{\sin^2 2\alpha}{2p} = \frac{1}{2p},$$
on en conclut que *la somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante.*

LXXX. **Théorème.** — *Si l'on prolonge les normales aux extrémités d'une corde focale, la corde qui joint leurs points d'intersection avec la courbe est parallèle à la première et égale à trois fois cette première.*

Soit (*fig. 33*) P le point de concours des normales menées

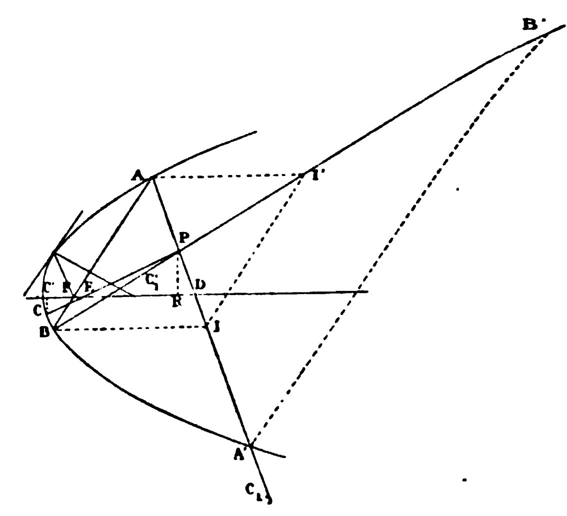


Fig. 33.

aux extrémités de la corde focale AB; α étant l'angle BAP, le triangle rectangle BAP donne
$$AP = AB \cos\alpha = \frac{p}{2\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$
Si l'on se reporte au problème LXIX, on trouve pour la longueur d'une corde normale à la parabole
$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$
On en conclut immédiatement
$$AA' = 4AP.$$

Il est évident que pareillement on a

$$BB' = 4BP,$$

de sorte que les deux triangles APB et A'PB' qui ont un angle égal et les côtés qui le comprennent proportionnels, sont semblables ; il en résulte évidemment l'égalité des angles $\widehat{PAB}$ et PA'B', $\widehat{PBA}$ et $\widehat{PB'A'}$, c'est-à-dire le parallélisme des cordes AB et A'B' et en outre la relation annoncée

$$A'B' = 3AB.$$

Corollaire I. — *La parallèle à l'axe menée par l'une des extrémités d'une corde focale coupe la corde formée par la normale à l'autre en son milieu.*

Soit I le point où la parallèle à l'axe menée par le point B rencontre AA', le triangle ABI est isoscèle et PI = AP; donc $AI = \frac{AA'}{2}$. Soit T le point où la tangente en A rencontre BI ou son prolongement, il est évident que les trois points I, A, T sont sur un cercle dont le centre est B.

Corollaire II. — *Le triangle qui a pour sommets les points* A *et* I *et le pied de la troisième normale issue du point* P *a son centre de gravité sur l'axe.*

On a vu, en effet (LXXVII), que, PR étant l'ordonnée du point P et CC' celle du pied C de la troisième normale issue du point P, CC' = 2PR, et alors le point E où PC coupe l'axe est tel que 2PE = CE; la ligne CP étant médiane du triangle CAI, le point E est le centre de gravité de ce triangle. Il est également le centre de gravité du triangle I'CB, I' étant le milieu de BB'.

LXXXI. **Théorème.** — *La corde focale passant par le foyer et parallèle à une tangente est égale à quatre fois le rayon vecteur du point de contact.*

Soit (*fig.* 33) M le point de contact d'une tangente parallèle à la corde focale AB ; la normale en ce point est perpendiculaire à AB, et il est facile de voir que l'angle qu'ell fait avec le rayon vecteur FM est égal à $2\alpha - \frac{\pi}{2}$; d sorte que la valeur de ce rayon est

et comme $$\frac{\cos^2 2\alpha}{2p} + \frac{\sin^2 2\alpha}{2p} = \frac{1}{2p},$$
on en conclut que *la somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante.*

LXXX. **Théorème.** — *Si l'on prolonge les normales aux extrémités d'une corde focale, la corde qui joint leurs points d'intersection avec la courbe est parallèle à la première et égale à trois fois cette première.*

Soit (*fig. 33*) P le point de concours des normales menées

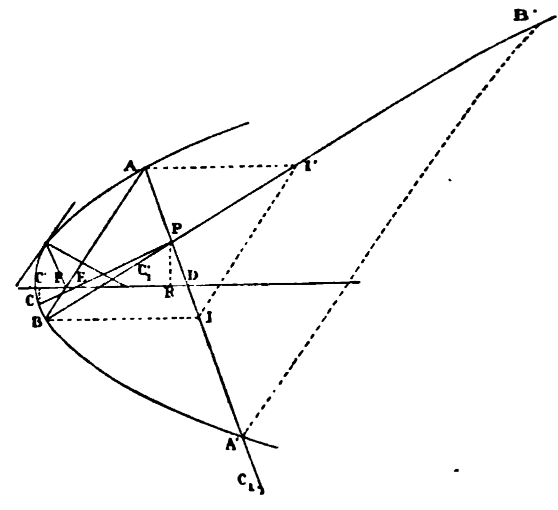


Fig. 33.

aux extrémités de la corde focale AB; α étant l'angle BAP, le triangle rectangle BAP donne

$$AP = AB \cos\alpha = \frac{p}{2 \sin^2\alpha \cos\alpha}.$$

Si l'on se reporte au problème LXIX, on trouve pour la longueur d'une corde normale à la parabole

$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha \cos\alpha}.$$

On en conclut immédiatement

$$AA' = 4AP.$$

Il est évident que pareillement on a

$$BB' = 4BP,$$

de sorte que les deux triangles APB et A'PB' qui ont un angle égal et les côtés qui le comprennent proportionnels, sont semblables ; il en résulte évidemment l'égalité des angles $\widehat{PAB}$ et PA'B', $\widehat{PBA}$ et $\widehat{PB'A'}$, c'est-à-dire le parallélisme des cordes AB et A'B' et en outre la relation annoncée

$$A'B' = 3AB.$$

Corollaire I. — *La parallèle à l'axe menée par l'une des extrémités d'une corde focale coupe la corde formée par la normale à l'autre en son milieu.*

Soit I le point où la parallèle à l'axe menée par le point B rencontre AA', le triangle ABI est isoscèle et PI = AP; donc $AI = \frac{AA'}{2}$. Soit T le point où la tangente en A rencontre BI ou son prolongement, il est évident que les trois points I, A, T sont sur un cercle dont le centre est B.

Corollaire II. — *Le triangle qui a pour sommets les points* A *et* I *et le pied de la troisième normale issue du point* P *a son centre de gravité sur l'axe.*

On a vu, en effet (LXXVII), que, PR étant l'ordonnée du point P et CC' celle du pied C de la troisième normale issue du point P, CC' = 2PR, et alors le point E où PC coupe l'axe est tel que 2PE = CE; la ligne CP étant médiane du triangle CAI, le point E est le centre de gravité de ce triangle. Il est également le centre de gravité du triangle I'CB, I' étant le milieu de BB'.

LXXXI. **Théorème.** — *La corde focale passant par le foyer et parallèle à une tangente est égale à quatre fois le rayon vecteur du point de contact.*

Soit (*fig. 33*) M le point de contact d'une tangente parallèle à la corde focale AB ; la normale en ce point est perpendiculaire à AB, et il est facile de voir que l'angle qu'ell fait avec le rayon vecteur FM est égal à $2\alpha - \frac{\pi}{2}$; d sorte que la valeur de ce rayon est

$$FM = \frac{p}{2\cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{p}{2\sin^2 2\alpha}.$$

En comparant cette valeur à celle que l'on a obtenue (LXIXX, Remarque) pour la corde focale AB, on trouve

$$AB = 4FM.$$

Remarque. — Une solution purement géométrique de cette propriété a été donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1877.

LXXXII. **Théorème.** — *Une corde normale en un point d'une parabole se projette sur la corde focale de ce point ou sur l'axe suivant une longueur égale à quatre fois le rayon vecteur de l'autre extrémité de la corde.*

Soit (*fig. 33*) AA' une corde normale en A; sa longueur a pour expression (XLIV)

$$AA' = \frac{2p}{\sin^2\alpha \cos\alpha}$$

et l'angle FAA' étant α, la projection de AA' sur FA a pour valeur

$$\frac{2p}{\sin^2\alpha},$$

or la valeur de FB est $\frac{p}{2\sin^2\alpha}$, dont la projection de AA' sur AB vaut 4FB.

LXXXIII. **Problème.** — *Déterminer le paramètre d'une parabole connaissant les longueurs de deux tangentes rectangulaires.*

Soient a et b les longueurs des tangentes données; AB (*fig. 33*) étant la polaire de leur point de coucours, on a

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2.$$

Si M est le pôle de la corde AB, on a, à cause du triangle rectangle MAB, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\overline{MF}^2}$;

or $$\overline{MF}^2 = BF \times AF$$

et, en vertu du théorème XLIV,

$$BF \times AF = \frac{p}{2} \times AB = \frac{p}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{MF}^2.$$

On en déduit facilement, en vertu de la seconde relation,

$$p = \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

LXXXIV. **Théorème.** — R *et* R′ *étant les rayons des cercles osculateurs aux extrémités d'une corde focale*, on a

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}}.$$

Les angles que font les normales aux extrémités d'une corde focale avec cette corde étant complémentaires, R et R′ ont pour expressions (LXXII)

$$R = \frac{p}{\cos^3 \alpha}, \quad R' = \frac{p}{\sin^3 \alpha},$$

Il est facile d'en déduire

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \sin^2 \alpha = \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

et par addition

$$1 = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{p}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

expression qui conduit à celle de l'énoncé.

LXXXV. **Théorème.** — *Les extrémités* A, B *d'une corde focale et les milieux des cordes normales en* A *et* B *sont les sommets d'un losange dont la surface est égale à celle du quadrilatère dont les sommets sont* A *et* B *et les centres des cercles osculateurs en ces extrémités.*

Soient (*fig.* 33) I et I′ les milieux des cordes normales en A et B, on a vu (LXXX) que

$$AP = PI, \quad BP = PI', \quad AB = BI$$

et par suite la figure ABII′ est un losange dont la surface S est évidemment égale à quatre fois celle du triangle APB, c'est-à-dire $S = 4\frac{AP \times BP}{2} = 2AP \times BP$,

et en vertu des expressions trouvées pour AP et BP

$$S = \frac{p^2}{2\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha};$$

soient C_1 et C'_1 les centres des cercles osculateurs en A et B,

$$\begin{vmatrix} U & b & c & d \\ U' & b' & c' & d' \\ U'' & b'' & c'' & d'' \\ U''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

Il se réduit à

$$N = \begin{vmatrix} k & b & c & d \\ k' & b' & c' & d' \\ k'' & b'' & c'' & d'' \\ k''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = o,$$

quelles que soient les valeurs x, y, z, t. Mais pour les valeurs de x, y, z, t, qui satisfont aux trois équations $U' = o$ $U'' = o$ $U''' = o$ (et il y en a une infinité puisque, δ étant différent de zéro, on peut tirer y, z, t en x), ce même déterminant devient

$$\begin{vmatrix} U & b & c & d \\ o & b' & c' & d' \\ o & b'' & c'' & d'' \\ o & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \text{ ou } U\delta;$$

donc $U\delta = o$, donc $U = o$. Donc toutes les valeurs des inconnues qui satisfont aux trois équations $U' = o$, $U'' = o$, $U''' = o$ satisfont aussi à l'équation $U = o$. Donc le système se réduit aux équations $U' = o$, $U'' = o$, $U''' = o$ qui fournissent y, z, t en fonctions linéaires de x.

Cela posé, formons les déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & U & c & d \\ a' & U' & c' & d' \\ a'' & U'' & c'' & d'' \\ a''' & U''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & U & d \\ a' & b' & U' & d' \\ a'' & b'' & U'' & d'' \\ a''' & b''' & U''' & d''' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & U \\ a' & b' & c' & U' \\ a'' & b'' & c'' & U'' \\ a''' & b''' & c''' & U''' \end{vmatrix}$$

Ces déterminants se réduisent respectivement, quelles que soient les valeurs de x, y, z, t, à

$$N' \qquad N'' \qquad N'''$$

puisque $D = o$. D'ailleurs ces mêmes déterminants prennent une colonne nulle pour toutes les valeurs de x, y, z, t qui satisfont aux équations $U' = o$, $U'' = o$, $U''' = o$, puisqu'alors $U = o$. Donc enfin :

$$N' = N'' = N''' = o; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Les démonstrations que nous venons de donner nous paraissent simples et plus directes peut-être que celle de M. Boquel (p. 213 du *Journal*). On voit qu'elles résultent du

mode ingénieux de discussion que M. Rouché a indiqué pour la discussion d'un système de n équations à n inconnues.

(V. mon *Traité d'Algèbre élémentaire*. Delagrave, 1880, p. 222.)

CONCOURS D'AGRÉGATION 1879

Solution par M. Henry, professeur au Lycée d'Angers.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. *On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan* P *de la courbe de contact passe par le point* A. *Soit* M *le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par le point* A; *soit* Q *le point de rencontre du plan* P *avec la droite qui joint le point* M *au pôle du plan* P, *par rapport à l'hyperboloïde.*

Le plan P *tournant autour du point* A, *on demande :*

1° *Le lieu du point* M;

2° *Le lieu du point* Q; *ce second lieu est une surface du second degré* S *que l'on discutera en faisant varier la position du point* A *dans l'espace;*

3° *Le lieu des positions que doit occuper le point* A *pour que la surface* S *soit de révolution.*

Première partie. — Rapportons l'hyperboloïde à ses plans principaux, et soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A, x_1, y_1, z_1 celles du pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde. L'équation de l'hyperboloïde sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

celle du plan P

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}-1=0.$$

Le plan P passant par le point A (x_0, y_0, z_0), on aura la relation de condition

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}-\frac{z_0z_1}{c^2}-1=0,$$

et l'équation du plan P pourra s'écrire

$$\frac{(x - x_0)x_1}{a^2} + \frac{(y - y_0)y_1}{b^2} - \frac{(z - z_0)z_1}{c^2} = 0.$$

L'équation générale des surfaces circonscrites à l'hyperboloïde donné le long de son intersection avec le plan P est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$$

$$+\lambda\left[\frac{(x - x_0)x_1}{a^2} + \frac{(y - y_0)y_1}{b^2} - \frac{(z - z_0)z_1}{c^2}\right]^2 = 0.$$

Pour que cette équation représente un paraboloïde, nous allons déterminer λ de telle sorte que le diamètre conjugué du plan P, qui passe par le pôle (x_1, y_1, z_1) de ce plan, coupe la surface en un point rejeté à l'infini. Or ce diamètre, étant aussi diamètre de l'hyperboloïde, passe par l'origine, qui est le centre de l'hyperboloïde, et a par suite pour équations $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$.

Or, en posant $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \rho$,

l'équation qui donne les ρ du point de rencontre de la surface et de son diamètre est :

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2}\right)\rho^2 - 1 + \lambda\left[\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} - \frac{z_1z_0}{c^2}\right)\right]^2 = 0.$$

Le coefficient du terme en ρ^2 doit être nul. Or, il a pour valeur

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} + \lambda\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2}\right]^2$$

et $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{c^2} - \frac{z_1^2}{c^2}$ n'est pas nul; car, dans l'équation précédente, les deux valeurs de ρ seraient infinies. Donc on a

$$\lambda = -\frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2}}.$$

L'équation des paraboloïdes considérés est donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1-\frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}}\left[\frac{(x-x_0)x_1}{a^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(y-y_0)y_1}{b^2}-\frac{(z-z_0)z_1}{c^2}\right]^2=0. \qquad (1)$$

Le diamètre passant par le point A (x_0, y_0, z_0) a pour équations $\frac{x-x_0}{x_1}=\frac{y-y_0}{y_1}=\frac{z-z_0}{y_1}$ (2)

Le lieu du point M s'obtiendra par l'élimination des rapports $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ entre les équations (1) et (2), élimination qui se fera en remplaçant dans l'équation (1), homogène par rapport aux quantités x_1, y_1, z_1, ces quantités par les quantités proportionnelles $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $z-z_0$). On a ainsi pour équation du premier lieu demandé

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1-\left[\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right.$$

$$\left.-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right]=0;$$

ou bien en simplifiant

$$2\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}\right)-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)-1=0. \qquad (3)$$

Le lieu du point M est donc un plan parallèle au plan polaire du point donné par rapport à l'hyperboloïde.

Deuxième partie. — Les coordonnées d'un point M sont déterminées par les trois équations

$$2\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}\right)-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)-1=0, \qquad (3)$$

et $$\frac{x-x_0}{x_1}=\frac{y-y_0}{y_1}=\frac{z-z_0}{z_1}, \qquad (2)$$

et les coordonnées X, Y, Z du point Q sont déterminées par les trois équations

$$\frac{X-x}{x-x_1}=\frac{Y-y}{y-y_1}=\frac{Z-z}{z-z_1} \qquad (4)$$

$$\frac{Xx_1}{a^2}+\frac{Yy_1}{b^2}-\frac{Zz_1}{c^2}-1=0. \qquad (5)$$

Le lieu demandé s'obtiendra en éliminant x, y, z, x_1, y_1, z_1,

entre les équations (2), (3), (4), (5), et l'équation de condition

$$\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} - \frac{z_0z_1}{c^2} - 1 = 0. \qquad (6)$$

Pour faire cette élimination, posons

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1} = \rho$$

$$\frac{X - x}{x - x_1} = \frac{Y - y}{y - y_1} = \frac{Z - z_1}{z - z_1} = \mu.$$

On tire de là

$$x = x_0 + \rho x_1 \qquad X - x = \mu(x - x_1)$$
$$y - y_0 + \rho y_1 \qquad Y - y = \mu(y - y_1)$$
$$z = z_0 + \rho z_1 \qquad Z - z = \mu(Z - z).$$

Portant dans les trois dernières les valeurs de x, y, z tirées des trois premières, on a :

$$X - x_0 - \rho x_1 = \mu x_0 + \rho\mu x_1 - \mu x_1$$

. . . .

. . . .

d'où

$$x_1 = \frac{X - x_0 - \mu x_0}{\rho\mu - \mu + \rho} \qquad y_1 = \frac{Y - y_0 - \mu y_0}{\rho\mu - \mu + \rho}$$

$$z_1 = \frac{Z - z_0 - \mu z_0}{\rho\mu - \mu + \rho}.$$

Si maintenant dans l'équation (3) on remplace x, y, z par leurs valeurs $x_0 + \rho x_1$, $y_0 + \rho y_1$, $z_0 + \rho z_1$, on a

$$2\left[\frac{(x_0 + \rho x_1)x_0}{a^2} + \frac{(y_0 + \rho y_1)y_0}{b^2} - \frac{(z_0 + \rho z_1)z_0}{c^2}\right]$$
$$-\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2}\right) - 1 = 0.$$

ou bien

$$\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1 + 2\rho\left(\frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} - \frac{z_1z_0}{c^2}\right)$$
$$= 0.$$

D'où l'on tire, en tenant compte de l'équation de condition (6) :

$$\rho = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right]$$

Posons maintenant les valeurs de x_1, y_1, z_1, dans l'équation (6). Il viendra :

$$\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0 - \mu x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0 - \mu y_0\right)$$
$$- \frac{z_0}{c^2}\left(Z - z_0 - \mu z_0\right) - \rho\mu + \mu - \rho = 0.$$

ou bien

$$\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0\right) - \frac{z_0}{c^2}\left(Z - z_0\right)$$
$$- \mu\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2}\right) - \rho\mu + \mu - \rho = 0.$$

Ou bien, en remplaçant ρ par sa valeur,

$$\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0\right) - \frac{z_0}{c^2}\left(x - z_0\right)$$
$$-\mu\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right)$$
$$+ \mu + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Ou enfin :

$$2\left[\frac{x_0}{a^2}\left(X - x_0\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(Y - y_0\right) - \frac{z_0}{c^2}\left(Z - z_0\right)\right]$$
$$+\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right)$$
$$- \mu\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2} - 1\right) = 0 \qquad (7)$$

Retranchons maintenant les équations (5) et (6) membre à membre, et remplaçons dans le résultat x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs ... $x_1 = \dfrac{X - x_0 - \mu x_0}{\rho\mu - \mu + \rho}$, ...

Il viendra :

$$\frac{X - x_0}{a^2}\left(X - x_0 - \mu x_0\right) + \frac{Y - y_0}{b^2}\left(Y - y_0 - \mu y_0\right) - \frac{Z - z_0}{c^2}\left(Z - z_0 - \mu z_0\right) = 0\,;$$

ou bien

$$\frac{(X - x_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(Z - z_0)^2}{c^2} - \mu\left[\frac{(X - x_0)x_0}{a^2} + \frac{(Y - y_0)y_0}{b^2} - \frac{(Z - z_0)z_0}{c^2}\right] = 0. \qquad (8)$$

On aura la surface S en éliminant μ entre les équations (7) et (8), ce qui donne

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{(X-x_0)^2}{a^2}+\frac{(Y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(Z-z_0)^2}{c^2}\right)$$

$$-2\left[\frac{(X-x_0)x_0}{a^2}+\frac{(Y-y_0)y_0}{b^2}-\frac{(Z-z_0)z_0}{c^2}\right]^2$$

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left[\frac{(X-x_0)x_0}{a^2}+\frac{(Y-y_0)y_0}{c^2}\right.$$

$$\left.-\frac{(Z-z_0)z_0}{c^2}\right]=0.$$

Ou bien, en transportant l'origine au point (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{(S)}\quad \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)-2$$

$$2\left[\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}\right]^2-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

$$\times\left[\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}\right]=0.$$

Si le point A est donné sur l'hyperboloïde, le lieu demandé se réduit à deux plans confondus avec le plan $\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{c^2}-\frac{Zz_0}{c^2}=0$. Sinon, le cône asymptote de la surface a pour équation

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{z^2}\right)-2\left(\frac{Xr_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}\right)^2=0.$$

C'est un cône tangent au cône asymptote de l'hyperboloïde donné le long de ses génératrices d'intersection avec $\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}=0$, intérieur à ce cône asymptote si le point A (x_0, y_0, z_0) est intérieur à l'hyperboloïde donné; extérieur dans le cas contraire. Ce cône est évidemment toujours réel. Il ne se réduit pas à deux plans. En effet, si on le coupe par le plan $Z = c$, l'intersection se projette sur le plan des xy suivant la courbe

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1\right)-2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{z_0}{c}\right)^2=0. \quad (9)$$

Les équations du centre sont

$$(10)$$

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}=\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)X-2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{z_0}{c}\right)x_0=$$

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)Y-2\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{z_0}{c}\right)y_0=0$$

Multipliant la première par y_0, la seconde par x_0 et retranchant membre à membre, on en tire

$$y_0X-x_0Y=0.$$

D'où $Y=\frac{y_0X}{x_0}$. Portant cette valeur de Y dans la première des équations (10), on a

$$\frac{X}{a}=\frac{\frac{2x_0z_0}{ac}}{\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^4_0}{c^2}+1}$$

et par suite $\frac{Y}{b}=\frac{\frac{2y_0z_0}{bc}}{\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}+1}$.

Substituant ensuite ces valeurs dans le premier membre de l'équation (9), il vient, en multipliant par

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}+1\right):$$

$$\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\left[\frac{2z^2_0}{c^2}\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}\right)-\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}\right)^2-\left(\frac{z^2_0}{c^2}+1\right)^2\right]$$

$$-2\frac{z^2_0}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]^2$$

Or en divisant par $\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1$, qui n'est pas nul

$$-\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}\right)^2-\left(\frac{z^2_0}{c^2}+1\right)^2+\frac{2z^2_0}{c^2}\left(\frac{z^2_0}{c^2}+1\right)$$

c'est-à-dire $-\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)$.

Cette quantité n'est pas nulle. L'équation (9) n'est pas satisfaite par les coordonnées du centre. Donc la courbe qu'elle représente ne se réduit pas à deux droites.

Le cône asymptote ne se réduisant jamais à deux plans, la surface S est l'un des deux hyperboloïdes ou un cône. Le plan tangent à l'origine le coupe suivant deux droites représentées par les deux équations

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy^0}{b^2}-\frac{Zz_0}{b^2}=0.$$

De la seconde on tire

$$\frac{Z}{c}=\frac{c}{z_0}\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}\right).$$

Portant dans la première et réduisant, il vient :

$$\frac{X^2}{a^2}\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}\right)+\frac{Y^2}{b^2}\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{y^2_0}{b^2}\right)-\frac{2XY}{ab}\frac{x_0y_0}{ab}=0.$$

Du signe de la quantité

$$\frac{x^2_0y^2_0}{a^2b^2}-\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}\right)\left(\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{y^2_0}{b^2}\right)$$

dépend la réalité des droites d'intersection de la surface et de son plan tangent.

Si l'on développe la parenthèse et que, après réductions, on divise par $\frac{z^2_0}{c^2}$ qui est positif, cette quantité devient

$$\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{b^2}.$$

Si le point A est intérieur au cône asymptote de l'hyperboloïde donné, cette quantité est négative. Les deux droites sont imaginaires : S est un hyperboloïde à deux nappes.

Si au contraire le point A est extérieur au cône asymptote de l'hyperboloïde, cette quantité est positive, les deux droites sont réelles et distinctes, et la surface est un hyperboloïde à une nappe. Si A est sur le cône, la surface S est un cône, son intersection avec le plan tangent se composant de deux

droites confondues. Si le point A est dans le plan des xy, c'est-à-dire si z_0 est nul, la surface est encore un hyperboloïde à deux nappes. Car les deux droites d'intersection du cône

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \text{et du plan} \quad \frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}=0$$

sont évidemment réelles.

Résumé de la discussion :

A est intérieur au cône asymptote de l'hyperboloïde donné.
S est un hyperboloïde à deux nappes.

A est sur ce cône asymptote.
S est un cône.

A est extérieur à ce cône asymptote.
S est un hyperboloïde à une nappe.

A est sur l'hyperboloïde donné.
S se compose de deux plans confondus.

Troisième partie. — Conditions de révolution. L'équation de la surface S développée est

$$\frac{X^2}{a^2}\left[\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}-1\right]+\frac{Y^2}{b^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}-\frac{y^{20}}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]$$
$$-\frac{Z^2}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]+\frac{2y_0z_0}{bc}\frac{YZ}{bc}$$
$$+\frac{2x_0z_0}{ac}\frac{XZ}{ac}-2\frac{x_0y_0}{ab}\frac{XY}{ab}+\ldots=0.$$

Supposons d'abord qu'aucun rectangle n'ait un coefficient nul. On devra avoir :

$$\frac{1}{a^2}\left[\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-\frac{x^2_0}{a^2}-1\right]+\frac{x^2}{a^4}=\frac{1}{b^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}-\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}\right]+\frac{y^2}{b^4}$$
$$=-\frac{1}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]+\frac{z^2}{c^4}$$

Ou bien :

$$\frac{1}{a^2}\left[\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]=\frac{1}{b^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right]$$
$$=-\frac{1}{c^2}\left[\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-1\right]$$

Ou enfin, en égalant successivement les deux premières quantités à la troisième :

$$\frac{x^2_0}{a^2c^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{a^2c^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2c^2}-\frac{z^2_0}{b^2c^2}-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0$$

Le lieu demandé est l'intersection des deux hyperboloïdes à une nappe représentés par les deux équations précédentes. Leur intersection se projette sur le plan des xy suivant la courbe ayant pour équation

$$\frac{x^2_0}{a^2}\left[\frac{1}{b^2c^2}-\frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{a^2c^2}\right]+\frac{y^2_0}{b^2}\left[\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}-\frac{1}{a^2c^2}\right]$$
$$-\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}=0$$

laquelle ne se réduit pas à deux droites, à moins que l'hyperboloïde donné ne soit de révolution. Le lieu est donc en général une courbe gauche du quatrième ordre, qui se décompose en deux hyperboles égales et également inclinées sur les plans Z_0x, Z_0y, quand l'hyperboloïde donné est de révolution.

Admettons maintenant que le coefficient de l'un des termes rectangles soit nul. Supposons par exemple $x_0 = 0$. Le point A est dans l'un des plans principaux de l'hyperboloïde donné. Deux rectangles sont alors nuls, et l'on doit avoir :

$$\left\{\frac{-1}{b^2}\left(\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}+1\right)-\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\right\}$$
$$\times\left\{-\frac{1}{c^2}\left(\frac{y^2_0}{b^2}+\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)-\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{z^2_0}{c^2}-1\right)\right\}$$
$$-\frac{y^2_0z^2_0}{b^4c^4}=0.$$

Ce lieu est facile à discuter. Dans le cas où l'hyperboloïde donné serait de révolution, c'est-à-dire si $a = b$, ce lieu se décompose en deux droites confondues avec oz et une courbe du second degré.

La condition $y_0 = 0$ donnerait un résultat analogue.

Supposons maintenant $z_0 = 0$. On devra avoir en outre :

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2_0}{b^2}-\frac{x^2_0}{a^2}-1\right)+\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^2_0}{a^2}+\frac{y^2_0}{b^2}-1\right)\Big\}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} - \frac{y^2_0}{b^2} - 1\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - 1\right)\right\}$$
$$- \frac{x^2_0 y^2_0}{a^4 b^4} = 0.$$

Cette équation se discuterait facilement aussi. Elle ne donne pas deux droites et une courbe du second degré, comme les deux précédentes, quand l'hyperboloïde est de révolution.

THÉORÈME CONCERNANT UNE COURBE ALGÉBRIQUE

Par M. **Kœnigs**, élève de l'Ecole normale supérieure.

Soient $2p$ points A_1, A_1 ... A_{2p} dans un plan et A leur centre de gravité.

Désignons par Δ une droite telle que le produit des distances des $2p$ points à cette droite soit constant.

Cette condition imposée à la droite Δ fait qu'elle enveloppe une certaine courbe S, c'est-à-dire qu'elle est constamment tangente à cette courbe.

Prenons des axes rectangulaires quelconques, et soit $y = mx + n$ l'équation de la droite Δ ; soient aussi (x_1, y_1), (x_2, y_2) ... (x_{2p}, y_{2p}) les coordonnées des points A_1, A_2 ... A_{2p} ; la distance du point A_1 à la droite Δ est représentée par la quantité
$$\frac{y_1 - mx_1 - n}{\pm\sqrt{1+m^2}},$$
de sorte qu'en faisant le produit des $2p$ expressions qui représentent les distances des $2p$ points à la droite Δ, et désignant par C une constante, nous aurons la condition :
$$\frac{(y_1 - mx_1 - n)(y_2 - mx_2 - n)\ldots(y_{2p} - mx_{2p} - n)}{(1+m^2)^p} = C.$$

Si nous nous donnons la quantité n (ce qui revient à chercher les tangentes à la courbe S qui passent par un point B de l'axe oy), nous avons une équation du degré $2p$ pour déterminer la direction des tangentes. Comme les axes sont quelconques, le point B est quelconque, ce qui montre que par un point du plan on peut toujours mener à la

courbe S, $2p$ tangentes. On dira donc que la courbe S est de la *classe* $2p$. Au contraire nous donner m, c'est chercher les tangentes à la courbe S parallèles à la droite $y = mx$, or ces tangentes sont complètement déterminées par l'ordonnée à l'origine n, et l'équation est du degré $2p$ en n : ce qui montre que l'on peut mener $2p$ tangentes à la courbe S parallèlement à une direction donnée.

En rapprochant ce résultat du précédent, on pourrait facilement prévoir que la courbe S n'admet jamais de branche parabolique. Mais, sans insister sur ce point, j'arrive au théorème qui fait l'objet de cette note :

Considérons les tangentes parallèles à l'axe ox ; la direction de cet axe étant quelconque, je le répète, par rapport à la courbe S, nous ferons $m = o$ dans l'équation (1) pour obtenir les valeurs des ordonnées à l'origine de ces tangentes : nous trouvons ainsi l'équation de degré $2p$

$$(y_1 - n)(y_2 - n)\ldots(y_{2p} - n) = C \qquad (2)$$

Appelons n_1, $n_2 \ldots n_{2p}$ les racines de cette équation, les $2p$ tangentes parallèles à ox auront pour équation $y - n_1 = o$, $y - n_2 = o \ldots, y - n_{2p} = o$. Cela posé, étant données $2p$ droites Δ_1, Δ_2, Δ_{2p} parallèles, on sait que si on mène une sécante quelconque D les coupant aux points P_1, $P_2 \ldots P_{2p}$, le centre de gravité P de ces $2p$ points se meut, lorsque D varie arbitrairement, sur une droite Δ' parallèle aux droites Δ_1, Δ_2, $\ldots \Delta_{2p}$. Cette droite Δ' aura ici pour équation

$$y - \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_{2p}}{2p} = o;$$

mais la somme des racines de l'équation (2) est visiblement $(y_1 + y_2 \ldots + y_{2p})$;
l'équation de la droite Δ' s'écrit donc :

$$y - \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{2p}}{2p} = o.$$

Ceci montre qu'elle passe par le centre de gravité A des points $A_1 \ldots A_{2p}$.

De là ce théorème :

Toutes les tangentes à la courbe S *parallèles à une direction déterminent sur une sécante quelconque menée par le point fixe* A, $2p$ *points dont le point* A *est précisément le centre de gravité.*

On démontre du reste que toutes les tangentes à une courbe parallèles à une direction touchent la courbe en des points dont le centre de gravité C est fixe. Il est bien évident que ce centre de gravité doit se trouver sur la droite Δ', laquelle passe aussi par le point fixe A ; or deux points déterminent une droite et la droite Δ' peut avoir une direction quelconque : les points A et C coïncident donc. De là le théorème auquel je voulais arriver :

Ayant mené à la courbe S *les* 2p *tangentes parallèles à une direction arbitraire, le centre de gravité des* 2p *points de contact est le même que celui des points fixes* $A_1, A_2 \ldots A_{2p}$.

Ajoutons que les points $A_1, A_2 \ldots A_{2p}$ jouent dans la courbe S un rôle analogue aux foyers dans les coniques : et de fait dans le cas de $p = 1$, on a pour la courbe S une conique dont A_1 et A_2 sont les foyers réels, et chacun sait que le centre de la conique est tout à la fois centre de gravité des points A_1 et A_2, et centre de gravité des points de contact de deux tangentes parallèles à une direction donnée.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
D'UNE FORMULE D'ABEL

Par M. **Arnaud**, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Nice.

La formule qu'il s'agit de démontrer est la suivante :

$$(1)\quad (x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a(x+b)^{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a(a-2b)(x+2b)^{m-2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} a(a-nb)^{n-1}(x+nb) + \ldots$$
$$+ ma[a-(m-1)b]^{m-2}[x+(m-b)b] + a(a-mb)^{m-1}$$

Cette formule est facile à vérifier pour les premières valeurs de m, 1, 2, 3,... Pour en démontrer la généralité, il suffit de prouver que si elle est vraie pour la valeur m de l'exposant, elle est aussi vraie pour la valeur $m+1$).

Écrivons donc :

$$(2) \qquad (x+a)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1} a (x+b)^m$$
$$+ \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a (a-2b) (x+2b^{m-1} + \dots$$
$$+ \frac{(m+1)m \dots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \dots n} a (a-nb)^{n-1} (x+nb)^{m-n-1}$$
$$+ (m+1) a [a-mb]^{m-1} (x+mb) + a [a-(m+1) b]^{\cdot}$$

Prenons les dérivées des deux membres, il vient

$$(m+1)(x+a)^m = (m+1)x^m + \frac{(m+1)m}{1} a(x+b)^{m-1}$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2} a(a-2b) (x+2b)^{m-2}$$
$$+ \dots \frac{(m+1)m \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} a(a-nb)^{n-1} (x+nb)^{m-\cdot}$$
$$+ \dots + (m+1) a (a-mb)^{m-1}.$$

Si l'on met en évidence le facteur $(m+1)$, on voit que le second membre n'est, d'après l'hypothèse de l'exactitude pour la valeur m de l'exposant, autre chose que $(m+1)$ $(x+a)^m$.

Les deux membres de l'égalité (2) ayant même dérivée ne peuvent différer que par une constante C.

Donc (3) $(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1) a(x+b)^{\cdot}$
$$+ \frac{(m+1) m}{1 \cdot 2} a(a-2b) (x+2b)^{m-1}$$
$$+ \dots + (m+1) a (a-mb)^{m-1} (x+mb)$$
$$+ a [a-(m+1)b]^m + C.$$

Il faut montrer que cette quantité constante C est nulle.

Or la formule (3) étant vraie, quel que soit x, est vraie pour $x = -(m+1)b$. Alors les équations (1) et 3 deviennent

$$\Big[a-(m+1) b\Big]^m = (-1)^m \Big[(m+1)^m b^m - \frac{m^m}{1} ab^{m-1}$$
$$+ \frac{m}{1 \cdot 2} (m-1)^{m-1} a (a-2b) b^{m-\cdot}$$
$$- \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-2)^{m-2} a (a-3b)^2 b^{m-3} + \dots\Big]$$
$$\big[a-(m+1) b\big]^{m+1} = (-1)^{m+1}\big[(m+1)^{m+1} b^{m-1}$$

$$-\frac{m+1}{1} m^m ab_m + \frac{(m+1)^m}{1 \cdot 2}(m-1)^{m-1} a(a-2b) b^{m+1}$$
$$\ldots + (m+1)a(a-mb)^{m-1} b + a[a-(m+1)b]_m + C$$

multiplions la première équation par $(m+1)\,b$ et ajoutons le résultat à la deuxième; comme $(-1)^m$ et $(-1)^{m+1}$ sont de signes différents, tous les termes des deuxièmes membres se détruisent, sauf $a\big(a-(m+1)\,b\big)^m$ et C; il vient donc

$$(m+1)\,b\,[a-(m+1)\,b]^m + [a-(m+1)\,b]^{m+1}$$
$$= a\,[a-(m+1)\,b]^m + C;$$

d'où $a[a-(m+1)\,b]^m = a\,\big(a-(m+1)\,b\big)^m + C$;

ou bien $C = 0$.

Donc la formule est générale.

Si dans cette formule on fait $b = 0$, on retombe sur la formule du binôme.

VARIÉTÉS

UNIVERSITÉ DE TOKIO (JAPON)

Les lecteurs du *Journal de mathématiques* ne liront pas sans intérêt les questions d'examen et les sujets de composition proposés aux étudiants de l'Université de Tokio. Les renseignements suivants ont été pris dans l'Annuaire de cette Université pour l'année classique 2539-40 (1879-80).

L'Université de Tokio se divise en trois départements: celui du droit, celui des sciences, celui de la littérature.

Le département des sciences renferme 14 professeurs:

Robert-William ATKINSON, *Chimie analytique et appliquée;*
Gustave-Félix BERSON, agrégé des sciences physiques, *Physique et mécanique;*
Frank JEWETT, *Chimie générale et analytique;*
Winfield CHAPLIN, *Science de l'ingénieur civil;*
DAIROKU KIKUCHI, *Mathématiques pures et appliquées;*
RIOKICHI YATABE, *Botanique;*
CURT NETTO, *Mines et métallurgie;*
Alexandre DYBOWSKI, agrégé des sciences physiques, *Physique, mécanique, mathématiques;*
James-Alfred EWING, *Mécanique appliquée;*
Thomas MENDENHALD, *Physique expérimentale;*
IWAWO IMAI, *Métallurgie;*
KENJIRO YAMAGAWA, *Physique;*
Charles WHITMAN, *Zoologie et physiologie;*
David BRAUNS, *Géologie, minéralogie, paléontologie;*

Un professeur extraordinaire:
KEISUKE ITO, *Botanique ;*
Un lecteur:
John SMEDLEY, *Architecture ;*
Trois professeurs assistants:
MONITARO KOGA, *Physique ;*
GIRO YAMAOKA, *Chimie ;*
AYATO TAGA, *Machines.*

Le nombre des élèves qui fréquentent les divers cours est donné par le tableau suivant :

Chimie	18
Mathématiques, physique et astronomie	4
Biologie	4
Science de l'ingénieur	20
Géologie, mines	27
Première année de sciences	42
Physique (cours en français)	9

Questions d'examens données à l'Université de Tokio (Japon), pendant l'année classique 2539-40 (1879-1880).

Calcul infinitésimal.

— Trouver les conditions pour qu'une fonction d'une seule variable soit maxima ou minima. Trouver le maximum ou le minimum de la fonction

$$u = m \sin (x - a) \cos x.$$

— Déterminer les dimensions du cylindre de moindre surface et de volume donné.

Prouver que si $y^3 + x^3 - 3axy = 0$, la fonction y est maxima lorsque $x = a\sqrt[3]{2}$ et minima quand $x = 0$.

— Trouver la valeur maximum de

$$u = al + bm + cn,$$

l, m, n étant liés par l'équation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

— Une courbe a pour équation $y^m = a^{m-1}x$. Trouver l'équation de la tangente au point (x, y), la longueur de la sous-tangente, de la sous-normale et celle de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente.

— Donner une méthode pour trouver les asymptotes à une courbe donnée. Trouver les asymptotes rectilignes de la courbe

$$y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0.$$

— Comment trouve-t-on les points doubles d'une courbe et les tangentes aux points doubles. Distinguer les divers genres de points doubles.

— Trouver les points singuliers de la courbe

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y - 2a^2x^2 + a^4 = 0.$$

— Trouver le centre et le rayon de courbure pour un point (x, y) de la courbe $y = f(x)$.

— Définir un point d'inflexion et dire comment on trouve le point d'inflexion d'une courbe donnée en coordonnées polaires.

Composition en calcul intégral.

— Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$x^3dy - x^2ydx + y^3dx - xy^2dy = 0.$$

— Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{y}\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y^2}.$$

— Étant donnés deux points fixes dans un plan, trouver dans ce plan une courbe telle que le produit des distances de ces deux points à chacune des tangentes à la courbe ait une valeur constante.

Composition en calcul différentiel.

— Décomposer en fractions simples la fraction suivante

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}.$$

— Trouver la somme des quatrièmes puissances des racines de l'équation du troisième degré $x^3 - 3x + 1 = 0$.

— Trouver l'équation différentielle des projections des lignes de courbure d'une surface sur le plan des xy.

Géométrie analytique.

— Équation d'une ligne droite passant par deux points. Coordonnées du point de rencontre de la droite qui joint les points (a, o), (o, b) avec la droite qui joint les points (b, o), (o, a).

— Trouver l'angle de deux droites

$$Ax + By + C = 0 \qquad A'x + B'y + C' = 0.$$

— Prouver que les diagonales d'un losange se coupent à angle droit.

— Trouver l'aire d'un triangle connaissant les sommets par leurs coordonnées; en déduire la condition pour que trois points donnés soient en ligne droite.

— Quelle est la condition pour que l'équation générale du second degré représente deux lignes droites? Examiner si l'equation

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

remplit cette condition.

— Trouver l'équation du cercle rapporté à un système d'axes rectangulaires.

— Prouver analytiquement que si deux cercles se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire à la corde commune.

— Etant donné le cercle $x^2 + y^2 = r^2$, discuter la nature de la ligne $xx' + yy' = r^2$, les coordonnées $x'y'$ étant celles d'un point du cercle.

— Prouver analytiquement que si par un point extérieur on mène à un cercle une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

— Trouver l'équation de la tangente et de la normale à une ellipse au point $(x'.y')$.

— Prouver analytiquement que la tangente est également inclinée sur les rayons vecteurs focaux.

— Prouver que la directrice est la polaire du foyer et aussi que toute corde focale est perpendiculaire à la ligne qui joint son pôle au foyer.

— Prouver qu'il y a un rapport constant entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer et à la directrice.

— Trouver l'équation d'une conique à centre en coordonnées polaires, en prenant le foyer comme pôle. Les demi-axes d'une ellipse sont 5 et 3, trouver son équation polaire.

— L'équation d'une conique est

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Prouver que les deux lignes droites

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

sont parallèles aux asymptotes.

— Trouver les conditions pour que l'équation générale du second degré représente une ellipse, une hyperbole, une parabole.

— Prouver que l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$$

représente une parabole tangente aux axes.

— L'extrémité d'un diamètre est (x',y'), trouver les coordonnées (x'',y'') des extrémités du diamètre conjugué.

— On mène les normales à une ellipse par les extrémités de deux diamètres conjugués. Prouver que le lieu des points d'intersection est la courbe

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^2x^2 - b^2y^2)^2.$$

— Trouver l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes comme axes.

— Prouver que le rectangle des distances focales d'un point est égal au carré du demi-diamètre conjugué de celui qui correspond à ce point.

— Prouver que le lieu des points d'intersection de deux tangentes à une parabole perpendiculaires l'une sur l'autre est la podaire du foyer.

— Trouver la podaire du foyer.

— Lieu des milieux d'un système de cordes parallèles dans une parabole.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 17010-0.

PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne**

Nous nous proposons dans cet article de présenter des démonstrations élémentaires de quelques théorèmes donnés par M. Mannheim, dans son cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique.

Conventions. — Nous emploierons les notations suivantes adoptées par M. Mannheim.

Un point sera représenté par une lettre minuscule.

Une courbe par une majuscule.

La trajectoire d'un point, c'est-à-dire la courbe que décrit ce point dans son déplacement, sera représentée par la lettre qui désigne ce point mise entre parenthèses; le point a se meut sur la courbe (a).

Enfin nous représenterons par $d(a)$ un déplacement infiniment petit du point a sur sa trajectoire (a).

Ces conventions une fois faites, passons aux principes.

Principe I. — *Une droite mobile se déplace dans un plan en restant parallèle à une direction fixe donnée. Dans une de ses positions elle rencontre en* a *et* b *deux courbes fixes* (a) *et* (b). *Les tangentes à ces courbes respectivement en* a *et* b *se coupent en* t. *On a, pour un déplacement infiniment petit de la droite mobile,*

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at}{bt} \text{ (fig. 1).}$$

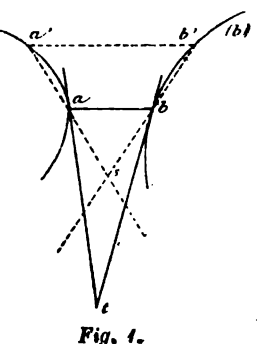


Fig. 1.

Considérons une position $a'b'$ de la droite mobile, infiniment voisine de ab. Les droites aa' et bb' se coupent en s, ab et $a'b'$ étant parallèles, on a

$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{sa}{sb}.$$

Cette relation, toujours vraie à mesure que $a'b'$ se rapproche de ab, a encore lieu à la limite; mais, à la limite, les cordes aa' et bb' se confondent avec les arcs correspondants; de plus le point s vient coïncider avec le point t et on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at}{bt}.$$

Principe II. — *Une droite mobile se déplace dans un plan en enveloppant une courbe donnée* E. *Dans une de ses positions, elle touche son enveloppe en* e *et rencontre en* a *et* b *deux courbes fixes* (a) *et* (b). *Les tangentes à ces courbes respectivement en* a *et* b *se coupent en* t. *On a, pour un déplacement infiniment petit de la droite mobile,* $\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ac \cdot at}{be \cdot bt}$ *(fig. 2).*

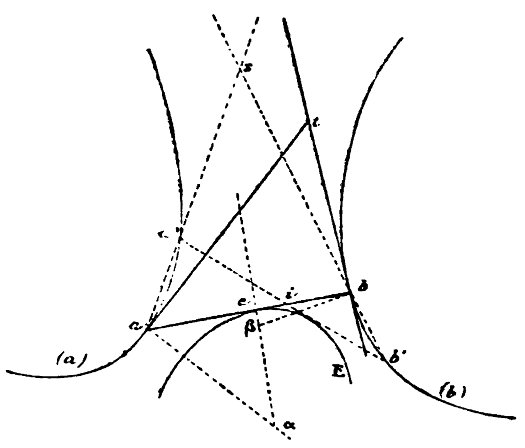


Fig. 2.

Considérons une position $a'b'$ de la droite mobile, infiniment voisine de ab. Les droites aa' et bb' se coupent en s, ab et $a'b'$ en i. On a

$$\frac{\text{surf. } sa'b'}{\text{surf. } b'ib} = \frac{sb' \cdot a'b'}{bb' \cdot ib'}$$

$$\frac{\text{surf. } sab}{\text{surf. } aia'} = \frac{sa \cdot ab}{aa' \cdot ia}$$

Divisant ces deux égalités membre à membre,

$$\frac{\text{surf. } sa'b' \times \text{surf. } aia'}{\text{surf. } b'ib \times \text{surf. } sab} = \frac{sb' \,.\, a'b' \,.\, aa' \,.\, ia}{bb' \,.\, ib \,.\, sa \,.\, ab}.$$

Mais
$$\frac{\text{surf. } sa'b'}{\text{surf. } sab} = \frac{sa' \,.\, sb'}{sa \,.\, sb}$$
$$\frac{\text{surf. } aia'}{\text{surf. } bib'} = \frac{ia \,.\, ia'}{ib \,.\, ib'}$$

L'égalité précédente se transforme donc en celle-ci :

$$\frac{sa' \,.\, sb' \,.\, ia \,.\, ia'}{sa \,.\, sb \,.\, ib \,.\, ib'} = \frac{sb' \,.\, a'b' \,.\, aa' \,.\, ia}{bb' \,.\, ib' \,.\, sa \,.\, db},$$

d'où
$$\frac{aa'}{bb'} = \frac{a'i \,.\, a's \,.\, ab}{bi \,.\, bs \,.\, a'b'}.$$

A la limite, lorsque les points a' et b' viennent coïncider avec les points a et b, les cordes aa' et bb' se confondent avec les arcs correspondants ; de plus, les points i et s viennent respectivement coïncider avec les points e et t ; on a donc

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae \,.\, at}{be \,.\, bt},$$

puisque $ab = a'b'$, à la limite.

Principe III. (Transformation du théorème précédent). — Les mêmes hypothèses étant faites que pour le principe II, *si la normale à la courbe* E *au point* e *coupe respectivement en* α *et en* β *les normales aux courbes* (a) *et* (b) *aux points* a *et* b, *on a* $\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}$ *(fig. 2).*

On a, en effet, $ae = a\alpha \,.\, \sin a\alpha e$, $be = b\beta \,.\, \sin b\beta e$;

Donc
$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha \,.\, \sin a\alpha e}{b\beta \,.\, \sin b\beta e}$$

Mais les angles $a\alpha e$ et eat sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; de même pour les angles $b\beta e$ et ebt.

Par suite
$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha \,.\, \sin eat}{b\beta \,.\, \sin ebt}$$

ou, comme
$$\frac{\sin eat}{\sin ebt} = \frac{bt}{at},$$
$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha \,.\, bt}{b\beta \,.\, at}.$$

c'est-à-dire $$\frac{a\alpha}{b\beta} = \frac{ae \cdot at}{be \cdot bt} = \frac{d(a)}{d(b)}.$$

REMARQUE. — Ce qui vient d'être dit s'applique au déplacement d'une droite pivotant autour d'un point fixe, en remarquant que la normale à la courbe enveloppe est la perpendiculaire à la droite mobile au point où elle touche son enveloppe, c'est-à-dire, dans ce cas, au point fixe.

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE DE FORME VARIABLE DANS UN PLAN

Les deux problèmes généraux du déplacement d'une figure de forme variable dans un plan, sont les suivants :

1° m *points* a_1, a_2, ... a_{m-1}, a_m *sont astreints à se mouvoir respectivement sur* m *courbes* (a_1), (a_2), ... (a_{m-1}), (a_m) *données dans un plan.* m — 1 *des droites qui joignent chacun de ces points au suivant doivent envelopper des courbes* E_1, E_2, ..., E_{m-1} *données dans ce plan. Trouver l'enveloppe* E_m *de la* m[e] *de ces droites.*

2° m *droites sont astreintes à envelopper respectivement* m *courbes* E_1, E_2, ... E_m *données dans un plan.* m — 1 *des points de rencontre de ces droites prises deux à deux doivent décrire des courbes* (a_1), (a_2), ... (a_{m-1}) *données dans ce plan. Trouver la trajectoire* (a_m) *du* m[e] *de ces points.*

Le premier de ces problèmes consiste à trouver, pour une position quelconque de la figure mobile, le point où la *m*[e] droite touche son enveloppe, et le second à trouver la tangente, ou ce qui revient au même la normale à la courbe que décrit le *m*[e] point.

La solution de ces deux problèmes nous sera fournie par la relation que nous allons établir entre les divers éléments de la figure mobile.

Considérons une position quelconque de la figure mobile (*fig. 3*). La normale à la courbe E_1, enveloppe de a_1a_2, au point e_1 coupe en α_1 la normale à la courbe (a_1) au point a_1 et en β_2 la normale à la courbe (a_2) au point a_2 ; la normale à la courbe E_2, enveloppe de a_2a_3, au point e_2 coupe en α_2 la normale à la courbe (a_2) au point a_2 et en β_3 la normale à la courbe (a_3) au point a_3 ; et ainsi de suite.

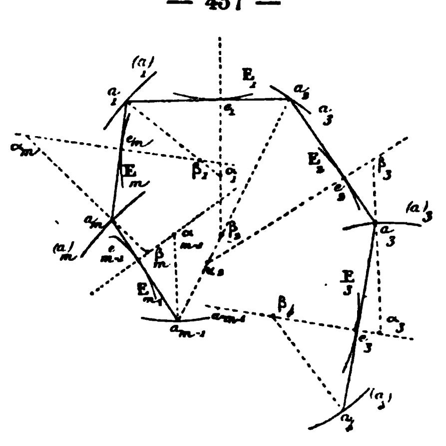


Fig. 3.

En vertu du principe III, et, conformément aux conventions faites, nous avons

$$\frac{d(a_1)}{d(a_2)} = \frac{a_1\alpha_1}{a_2\beta_2}$$

$$\frac{d(a_2)}{d(a_3)} = \frac{a_2\alpha_2}{a_3\beta_3}$$

$$\frac{d(a_3)}{d(a_4)} = \frac{a_3\alpha_3}{a_4\beta_4}$$

. . . .

$$\frac{d(a_{m-1})}{d(a_m)} = \frac{a_{m-1}\alpha_{m-1}}{a^m\beta_m}$$

$$\frac{d(a_m)}{d(a_1)} = \frac{a_m\alpha_m}{a_1\beta_1}$$

Faisons le produit de toutes ces égalités, membre à membre; il vient

$$1 = \frac{a_1\alpha_1 \,.\, a_2\alpha_2 \,.\, a_3\alpha_3 \ldots a_{m-1}\alpha_{m-1} \,.\, a_m\alpha_m}{a_2\beta_2 \,.\, a^3\beta_3 \,.\, a_4\beta_4 \ldots a_m\beta_m \,.\, a_1\beta_1}.$$

Dans le premier des problèmes énoncés plus haut, l'inconnue est le point e_m. De la relation générale qui vient d'être établie, on tire la valeur de $\frac{a_m\alpha_m}{a_1\beta_1}$ en fonction de quantités données immédiatement par la figure. Soit $\frac{p}{q}$ la valeur de ce rapport. D'après ce que nous avons vu aux prin-

cipes, si t est le point de rencontre des tangentes aux courbes (a_1) et (a_m) aux points a_1 et a_m, on a

$$\frac{a_m e_m \, . \, a_m t}{a_1 e_m \, . \, a_1 t} = \frac{a_m \alpha_m}{a_1 \beta_1} = \frac{p}{q},$$

ou

$$\frac{a_m e_m}{a_1 e_m} = \frac{p \, . \, a_1 t}{q \, . \, a_m t},$$

d'où la détermination du point e.

Dans le second problème, l'inconnue est la normale $\alpha_m a_m \beta_m$. De la relation générale qui vient d'être établie, on tire la valeur du rapport $\frac{a_m \alpha_m}{a_m \beta_m}$ en fonction de quantités obtenues immédiatement sur la figure. On n'a plus alors qu'à mener par le point a_m une droite dont le segment terminé aux normales $e_{m-1}\alpha_{m-1}$ et $e_m \alpha_m$ soit divisé au point a_m dans le rapport déterminé, problème bien simple et bien connu.

Voilà donc la solution des deux cas du problème général du déplacement plan d'une figure de forme variable.

Dans les applications que l'on a à faire de cette question fondamentale, la solution se simplifie par suite des conditions particulières où l'on se trouve placé. D'ailleurs on ne considère, en général, que des déplacements de triangle variable.

Remarque. — Considérons les droites ab et ac qui se coupent au point a (*); soient (a), (b) et (c) les trajectoires des points a, b et c. Supposons que *les normales* $e\alpha$ *et* $h\alpha$ *aux enveloppes de* ab *et* ac *aux points* e *et* h *où ces droites touchent leurs enveloppes se coupent en* α *sur la normale* $a\alpha$ *à la courbe* (a) *au point* a. Soient de plus β le point de rencontre de $e\alpha$ et de la normale $b\beta$ à la courbe (b) au point b, γ le point de rencontre de $h\alpha$ et de la normale $c\gamma$ à la courbe (c) au point c.

Nous avons $\quad \frac{d(b)}{d(a)} = \frac{b\beta}{a\alpha}$ et $\frac{d(a)}{d(c)} = \frac{a\alpha}{c\gamma}$.

Multiplions ces deux égalités membre à membre ; il vient

$$\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{b\beta}{c\gamma}$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

ANGLE PIVOTANT AUTOUR DE SON SOMMET

Un angle bac *pivote autour de son sommet* a. *Les côtés* ab *et* ac *coupent respectivement en* b *et en* c *les courbes fixes* (b) *et* (c). *Déterminer la relation qui lie les déplacements des points* b *et* c (*).

Quoiqu'on connaisse les trajectoires (*b*) et (*c*) des points *b* et *c*, la trajectoire du point *a*, puisque ce point est fixe, et les enveloppes de *ab* et de *ac*, puisque ces droites pivotent autour du point *a*, il faut une condition de plus (supposer par exemple, comme nous le faisons, que l'angle *bac* a une grandeur constante) : car, sans cela, la figure, dans chacune de ses positions, serait indéterminée.

Cela posé, les normales aux enveloppes de *ab* et de *ac* sont les perpendiculaires $a\beta$ et $a\gamma$ menées de *a* respectivement à *ab* et *ac*. On se trouve donc dans le cas de la remarque précédente et on a, d'après cette remarque,

$$\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{b\beta}{c\gamma}.$$

Un exemple très simple va faire comprendre comment on applique cette règle.

Un triangle rectangle variable abc *se déplace dans un plan. Le sommet* a *de l'angle droit est fixe ; le sommet* b *se meut sur une circonférence et l'hypoténuse* bc *tourne autour du centre* o *de*

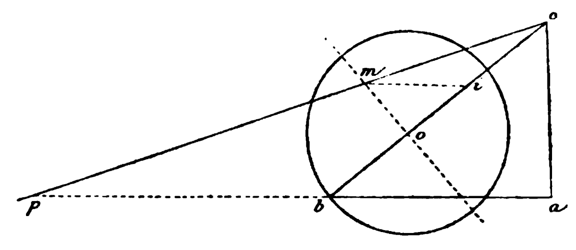


Fig. 4.

cette circonférence. Construire la normale à la trajectoire du point c *(fig. 4).*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit p le point où la normale cherchée rencontre le côté ab. Le sommet a étant fixe et l'angle bac constant, appliquons la relation précédente.

Comme, dans ce cas, les perpendiculaires à ab et à ac au point a se confondent avec ac et ab, cette relation donne

$$\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{bc}{cp}.$$

La normale à la trajectoire de b étant bo, si nous élevons à bc la perpendiculaire om qui coupe cp en m, nous avons, d'après le principe III,

$$\frac{d(b)}{d(c)} = \frac{bo}{cm};$$

donc

$$\frac{bc}{cp} = \frac{bo}{cm};$$

d'où la construction :

Je porte la longueur ci = ob ; *par le point* i *je mène parallèlement à* ab im *qui coupe en* m *la perpendiculaire* om *à* bc; cm *est la normale cherchée.*

En effet,

$$\frac{bc}{cp} = \frac{ci}{cm} = \frac{bo}{cm}.$$

SUR LES APPLICATIONS DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS

En se basant sur les principes que nous venons d'étudier, on voit que si l'on connaît les enveloppes des côtés d'un polygone variable et les trajectoires de tous ses sommets moins un, on pourra déterminer la normale et, par suite, la tangente à la trajectoire de ce dernier sommet.

Or, pour un très grand nombre de courbes, on connaît des modes de génération géométrique simples, par le déplacement d'un point d'une figure variable; il en résultera, par application des principes en question, des procédés de construction des tangentes à ces courbes.

On sait aussi que le centre de courbure relatif à un point d'une courbe quelconque, est le point où la normale à cette courbe au point considéré touche son enveloppe. Si donc on a reconnu qu'une certaine droite d'une figure variable se déplace en restant normale à une courbe quelconque, on en déduit un procédé de construction du centre de courbure à cette courbe.

Pour plus de détails sur ce sujet je renverrai à mon article: *Applications de géométrie cinématique plane*, publié dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, où je fais précisément usage des principes auxquels se rapporte le présent travail.

Je me contenterai, pour terminer, de donner une démonstration nouvelle d'un théorème que j'ai fait connaître dans mon *Etude sur l'antibissectrice* (*):

Si une droite aa′ *se déplace en détachant sur une courbe quelconque* (a) *un arc de grandeur constante, le point où cette droite touche son enveloppe est le pied de l'antibissectrice relative à* aa′ *du triangle fermé par cette droite et par les tangentes à la courbe* (a) *aux points* a *et* a′.

Si ces tangentes se coupent en t et si e est le point où aa' touche son enveloppe, on a, d'après le principe II,

$$\frac{d(a)}{d(a')} = \frac{ae \,.\, at}{a'e \,.\, a't}.$$

Mais, d'après l'hypothèse faite,

$$d(a) = d(a').$$

Donc,

$$\frac{ae \,.\, at}{a'e \,.\, a't} = 1$$

ou

$$ae \,.\, at = a'e \,.\, a't,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

INÉGALITÉ DES JOURS ET DES NUITS

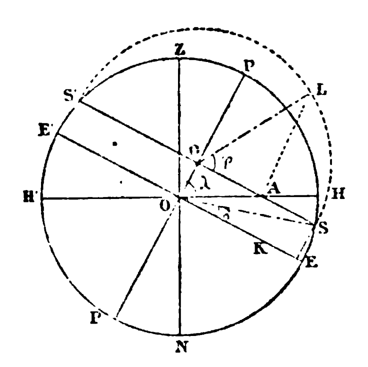
Le soleil possède un mouvement propre sur l'écliptique; en outre, il participe au mouvement diurne apparent de la sphère céleste. On peut donc admettre que dans une journée il décrit un des parallèles de cette sphère.

Ceci posé, nous dirons qu'il fait jour quand le soleil est au-dessus de l'horizon, qu'il fait nuit quand il est au-dessous. Nous nous proposons ici de chercher les conditions qui font varier la durée du jour et celle de la nuit. On sait

(*) *Journ. de Math. spéc. et élém.* t. IV (Mars 1880).

que la somme de ces deux périodes est constante et égale à vingt-quatre heures : il suffira donc de déterminer l'une d'entre elles.

Prenons pour plan du tableau le plan du méridien du lieu considéré. Soient HH' l'horizon, PP' la ligne des pôles. SS' le parallèle décrit par le soleil le jour considéré. Ce cercle rencontre le plan de l'horizon suivant une droite qui se projette tout entière en A.



Cette droite partage la circonférence du parallèle décrit par le soleil SS' en deux arcs qui se projettent l'un suivant AS, l'autre suivant AS'; le premier est au-dessous de l'horizon et correspond à la nuit ; le second est au-dessus de l'horizon et correspond au jour.

Le mouvement étant uniforme, la durée de la nuit est proportionnelle à l'arc AS, celle du jour proportionnelle à l'arc AS' ; nous allons chercher à déterminer la valeur de l'arc qui se projette suivant AS au moyen de ses lignes trigonométriques.

Remarquons d'abord que tant que le point A n'est pas au centre du cercle SS', les deux arcs sont inégaux. Pour un point situé dans l'hémisphère boréal le jour est donc plus grand que la nuit, tant que la déclinaison du soleil est boréale, c'est-à-dire dans l'intervalle qui s'écoule entre le 21 mars et le 21 septembre.

Cela posé, rabattons le cercle SS' autour de son diamètre, la perpendiculaire au diamètre se rabat alors suivant AL. Si on joint le point D au point L, l'angle LDS a pour mesure le demi-arc nocturne ; il nous suffira donc de connaître cet angle pour en déduire la durée de la nuit.

Le triangle rectangle LDA donne $DA = DL \cos \varphi$.

D'autre part l'angle POH = l'angle λ qui mesure la latitude du lieu ; du triangle rectangle DOA on tire $DA = DO \operatorname{tg} \lambda$.

On en tire DL $\cos \varphi =$ DO $\operatorname{tg} \lambda$.

Si K est le pied de la perpendiculaire menée de S sur le diamètre EE', on a DL = DS = OK.

Mais l'arc SE = déclinaison du soleil = δ, d'où en supposant le rayon de la sphère céleste égal à l'unité, OK = $\cos \delta$.

DO = SK = $\sin \delta$.

En remplaçant DL et DO par leurs valeurs respectives, on a

$$\cos \delta \cos \varphi = \sin \delta \operatorname{tg} \lambda$$

$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \lambda$$

Ce qui nous montre que la valeur de φ dépend exclusivement de la latitude du lieu et de la déclinaison du soleil.

Discussion de la formule

$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \lambda.$$

Pour que l'angle φ existe, il faut que son cosinus soit moindre que l'unité, ce qui exige $\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \lambda < 1$, et comme les angles δ et λ sont essentiellement aigus, il faut que l'on ait $$\delta + \lambda < 90°.$$

Or δ est inférieur à 23°30', son complément est supérieur à 66°30'.

Si donc on prend d'abord un lieu dont la latitude est inférieure à 66°30', c'est-à-dire un lieu de la zone tempérée, on a $$\delta + \lambda < 90°.$$

Donc l'angle φ existe toujours, c'est-à-dire que dans une période de vingt-quatre heures on est assuré que le soleil descendra au-dessous de l'horizon.

Si au contraire on prend un point de la zone glaciale dont la latitude est supérieure à 66°30', il arrivera un moment où le soleil viendra toucher l'horizon lorsque $\delta + \lambda = 90°$.

Si à partir de ce moment la déclinaison du soleil augmente encore, l'astre ne redescendra pas au-dessous de l'horizon.

Dès lors depuis le moment où il a rasé l'horizon, jusqu'à ce qu'en redescendant vers l'équateur il reprenne la même déclinaison, il se passera un nombre de jours plus ou moins considérable, pendant lequel le soleil ne disparaît pas au-dessous de l'horizon. En particulier pour le pôle, le soleil restera six mois au-dessus de l'horizon.

Considérons ce qui se passe en un même lieu de la terre,

à Paris par exemple. Lorsque la déclinaison varie, l'angle [illegible] varie, et puisque d'une part un angle aigu et sa tangente varient dans le même sens, que d'autre part un angle aigu et son cosinus varient en sens contraire, on voit que l'angle [illegible] est d'autant plus petit que δ est plus grand.

Par conséquent la durée de la nuit décroît, et par suite la durée du jour croît de l'équinoxe de printemps au solstice d'été, dans nos climats du 21 mars au 21 juin.

Il est à remarquer que si l'on prenait un point de l'hémisphère austral, ce que nous avons dit de la nuit, s'appliquerait au jour, c'est-à-dire que lorsqu'il fait nuit à Paris, il fait jour dans l'autre hémisphère et inversement. On verrait en faisant un raisonnement analogue lorsque la déclinaison devient australe, que si cette déclinaison croît, le jour diminue; c'est pourquoi le jour, devenant inférieur à la nuit depuis le 21 septembre, décroît jusqu'au 21 décembre pour recroître ensuite jusqu'au 21 mars.

A. M.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR EN 1880

Lorsqu'un nombre est terminé par 5, son carré est terminé par 25. Ce carré peut-il être terminé par 125?

— Dans un cercle on mène une corde égale au rayon; on joint les extrémités de cette corde au milieu du plus grand arc qu'elle détermine sur la circonférence. Calculer les cordes ainsi obtenues.

— On donne un triangle ABC. Trouver sur le côté AB un point M tel que en menant MN parallèle à BC, et MP perpendiculaire à BC, la surface du trapèze rectangle MNCP soit une fraction donnée de la surface du triangle ABC. Pour la discussion on prendra le cas particulier où le triangle ABC est isoscèle.

— On donne un angle A égal à 45 degrés. On demande de mener deux perpendiculaires BC et DE au côté AE de façon que le trapèze BCED ait une surface donnée et un périmètre aussi donné.

— On prend un demi-cercle AB, on mène le rayon OD perpendiculaire au diamètre AB; mener une sécante AC telle que le quadrilatère OHCB, formé par le rayon OB, la corde BC, la sécante AC et le rayon OD soit circonscriptible.

— On a un triangle isoscèle ABC, et la hauteur AH. Au point O, situé au tiers de AH à partir du sommet, passe un axe horizontal, situé dans le plan du triangle. On demande quelle force il faudra appliquer au point A pour que le triangle, sollicité par cette force et par son poids P, reste horizontal.

— Etant donné un angle BAC de 60 degrés, mener deux perpendiculaires

la bissectrice, de façon que le trapèze formé par ces deux perpendiculaires et les côtés de l'angle ait une surface et un périmètre donnés.

— Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles donnant lieu à une fraction périodique mixte ayant un chiffre à la partie irrégulière et un chiffre à la période.

— Soit la projection géométrique à n termes

$$a\ b\ c\ d\ \ldots\ f\ g\ h\ l$$

on multiplie chaque terme par le suivant. Trouver la somme des résultats ainsi obtenus.

— Dans un triangle, on connait A, et on a la relation

$$\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2;$$

calculer les angles B et C.

— Dans un triangle, on connait A, et l'on a la relation $\sin B \sin C = m$; calculer les deux angles B et C.

— Inscrire dans un demi-cercle un rectangle de périmètre donné.

— On donne un demi-cercle de diamètre AB et un point P sur ce diamètre AB; par ce point, on mène une droite PD faisant un angle α avec le diamètre et rencontrant la circonférence en D; on mène la tangente en D à la circonférence jusqu'à sa rencontre en E avec le diamètre AB; calculer DE en fonction des données.

— Étant donnée la fraction $\frac{8}{21}$, on demande de la réduire en fractions ayant pour dénominateur des puissances successives de 12; chercher quelles particularités présentera la transformation.

— On donne un secteur AOB, d'angle α, et sa corde AB; mener une parallèle à OA de telle sorte qu'elle soit partagée en deux parties égales par le rayon OB, la corde AB et l'arc.

— On donne un demi-cercle AB; trouver sur le cercle un point C tel que, si l'on mène CA et CB et la perpendiculaire CP sur le diamètre, on ait

$$AC + BC = n\ .\ CP.$$

— Dans une circonférence on prend deux rayons rectangulaires OA et OB en A se trouve une lumière d'intensité 2; en B, une lumière d'intensité 1 trouver les points également éclairés : 1° sur la circonférence; 2° sur chacun des deux diamètres A et B.

— On donne un cercle O, de rayon R, et le diamètre AOB; on mène par A un rayon lumineux faisant avec AB un angle α; ce rayon se réfléchit en C et vient rencontrer le diamètre AOB au point D; calculer OD et discuter lorsque α varie.

— Trouver le nombre de deux chiffres qui admet le plus grand nombre de diviseurs.

— On a un cercle et le carré circonscrit; on construit un cercle tangent à deux côtés et à la circonférence; calculer à un millième près le rapport de a surface de ce cercle à celle du cercle donné.

— Dans un triangle on connait l'angle A, et l'on sait que l'on a $b^2 - c^2 = S$; calculer les angles B et C.

— Maximum ou minimum de $3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} x$.

— Dans la recherche du p. g. c. d. de deux nombres, peut-il arriver que, en multipliant l'un des nombres seulement par m, le p. g. c. d. soit multiplié par m.

— Maximum ou minimum de $3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{cotg}^2 x$.

— Dans un triangle rectangle on connait le périmètre et la surface; calculer les angles.

— On donne un cercle, un point A sur ce cercle et un point B extérieur dans le plan; trouver le rayon d'un cercle tangent en A au cercle donné et passant par le point B. Discuter.

— On donne un angle AOC $= \alpha$; sur l'un des côtés, on prend OA $= a$, AB $= 2a$; trouver sur OC un point M tel que de ce point on voie les deux segments OA et AB sous des angles égaux. Discuter.

— On donne un angle, et un point P dans son intérieur; déterminer sur le côté OB un point M tel que, si l'on abaisse la perpendiculaire MI sur OA, et que l'on mène MP, on ait MP $=$ 2MI.

— On donne une demi-circonférence, et le rayon OE, perpendiculaire au diamètre; mener par le point A une sécante coupant en E le rayon, et en D la circonférence, de façon que ED ait une longueur donnée m.

— Résoudre l'équation

$$x^2 - 2ax \cos \alpha + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0.$$

— On donne une demi-circonférence; trouver sur la courbe un point M tel que si l'on abaisse de ce point la perpendiculaire MI sur le diamètre AB, on ait MI $=$ AI $-$ BI.

— Un cercle est tangent à deux droites rectangulaires fixes; trouver sur la circonférence un point tel que la somme des distances aux droites données ait une valeur déterminée.

— On donne un angle α, un point P sur un de ses côtés; déterminer sur l'autre côté un point M tel que, si on abaisse la perpendiculaire MQ sur le premier côté, on ait $MQ^2 + PQ^2 = K^2$.

— Etant donnés les nombres 12, 20 et 35, peuvent-ils faire partie d'une même progression arithmétique ou géométrique?

— On a un triangle dont les angles sont en progression arithmétique. Trouver une relation entre les deux côtés?

— Dans une ellipse, on demande de calculer le rayon vecteur en fonction de l'angle α qu'il fait avec le grand axe. Si l'on mène deux rayons vecteurs rectangulaires par un même foyer, déterminer l'angle α que fait l'un d'eux avec le grand axe de façon que le triangle rectangle intercepté ait une surface maxima.

— Conditions pour que le polynôme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ soit décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré.

SOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS

POSÉES AUX EXAMENS DE SAINT-CYR.

Nous donnons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les questions les plus intéressantes que nous avons entendu poser aux examens oraux de Saint-Cyr; mais, en outre, nous croyons utile d'indiquer la solution de quelques-unes de ces questions, qui nous ont paru présenter un certain degré de difficulté. Nous espérons rendre ainsi service à ceux de nos lecteurs qui se préparent à l'École militaire.

1. — *On prend un demi-cercle* AB; *on mène le rayon* OD *perpendiculaire au diamètre* AB; *mener une sécante* AC *rencontrant en* H *le rayon* OD *de telle sorte que si l'on joint le point* C *au point* B, *le quadrilatère* OHCB *soit circonscriptible.*

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Nous prendrons pour inconnue l'angle CAB que fait la corde AC avec le diamètre AB; nous l'appellerons x. On a facilement

$$OH = R \operatorname{tg} x$$
$$BC = 2R \sin x$$
$$HC = AC - AH = 2R \cos x - \frac{B}{\cos x}.$$

Par suite, la condition donnée se traduit par l'équation

$$\operatorname{tg} x + 2 \sin x = 1 + 2 \cos a - \frac{1}{\cos x}$$

ou bien, en chassant le dénominateur,

$$\sin x + 2 \sin x \cos x = \cos x + 2 \cos^2 x - 1.$$

Cette équation se met facilement sous la forme

$$\sin x - \cos x = \cos 2x - \sin 2x.$$

Pour la résoudre nous élèverons les deux membres au carré; nous aurons, après réduction

$$\sin 2x = \sin 4x$$

ou, puisque l'angle x est aigu, et même inférieur à 45°, d'après l'énoncé, on aura

$$6x = 180°, \text{ d'où } x = 30°.$$

On peut vérifier *à posteriori* que, si l'angle x vaut 30°, le quadrilatère OHCB est circonscriptible. En effet, on a d'abord

$$CB = BO = R.$$

D'autre part, d'après une propriété connue du triangle rectangle dans lequel un angle vaut 30°, on a

$$AH = 2OH;$$

enfin, si on mène CK perpendiculaire au diamètre AB, on aura

$$\frac{HC}{AH} = \frac{OK}{OA} = \frac{1}{2}.$$

Donc, OH = HC; par suite CB + OH = HC + OB; c'est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit circonscriptible.

2. — *Trouver les dénominateurs des fractions irréductibles*

qui donnent lieu à une fraction périodique mixte ayant un chiffre à la partie irrégulière et un chiffre à la période.

On sait que, si l'on cherche la fraction génératrice d'une fraction périodique mixte remplissant les conditions requises par l'énoncé, on trouvera une fraction dont le dénominateur est 90. Toute fraction irréductible équivalente à la précédente aura pour dénominateur un diviseur de 90, et devra, pour donner naissance à une fraction périodique mixte, contenir les facteurs 2 ou 5, avec d'autres facteurs; donc pour trouver *tous* les dénominateurs, on décomposera 90 en facteurs premiers, et on prendra les diviseurs de 90 qui contiennent *au moins* un des facteurs 2 ou 5, avec d'autres facteurs.

On trouvera les diviseurs 6, 15, 18, 30, 45, et 90 répondant à la question.

Remarque. — Si l'on avait dû avoir plus d'un chiffre à la partie irrégulière, on sait qu'il aurait fallu que *l'un au moins* des facteurs 2 ou 5 eût un exposant égal au nombre des chiffres de la partie irrégulière.

3. — *On donne un secteur* AOB, *d'angle* α, *et sa corde* AB; *mener une parallèle à* OA *de telle sorte qu'elle soit partagée en deux parties égales par le rayon* OB, *la corde et l'arc.*

(Le lecteur est prié de faire la figurè).

Nous prendrons pour inconnues l'angle BON formé par le rayon OB et le rayon qui passe au point de rencontre de la parallèle demandée et de l'arc de cercle, et aussi la portion du rayon BO comprise entre le point B et la ligne CN demandée ; le triangle OCN nous donne, puisque CN = 2CB,

$$\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{R - y}{\sin(\alpha - x)} = \frac{2y}{\sin x}.$$

En retranchant terme à terme les deux premiers rapports, on trouve, en supprimant la solution $y = 0$, l'équation

$$\frac{2}{\sin x} = \frac{1}{\sin\alpha - \sin(\alpha + x)}.$$

Ce qui donne, après réduction, la solution $\frac{x}{2} = 0$ étant une solution étrangère,

$$2\cos\left(\alpha - \frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}.$$

Pour résoudre cette équation, nous développerons le premier membre et nous obtiendrons

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1 - 2\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ soit positif, et par suite que le cosinus de α soit inférieur à $\frac{1}{2}$; donc il faut que l'angle α soit supérieur à 60°; c'est ce que montrera facilement la solution géométrique de la question. Pour trouver graphiquement la position de la corde, il suffira en effet de prolonger le rayon OA d'une longueur AK égale au rayon, et de joindre le point B au point K; la ligne BK rencontre l'arc de cercle au point N, qui appartient à la parallèle demandée. Or, puisque le triangle BON est isoscèle, il faut que les angles égaux soient aigus; donc l'angle OBK doit être aigu. On sait que, lorsqu'un angle est aigu, dans un triangle, la distance de son sommet au milieu du côté opposé est plus grande que la moitié de ce côté; donc BA doit être supérieur au rayon, ce qui exige que l'angle α soit supérieur à 60°.

4. — *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres peut-il arriver que, si l'on multiplie seulement l'un des nombres par* m, *le plus grand commun diviseur soit multiplié par* m?

On sait que, si l'on appelle A et B deux nombres entiers, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier D soit le plus grand commun diviseur de A et de B, est qu'il existe deux nombres entiers Q et Q', *premiers entre eux,* satisfaisant aux deux égalités

$$A = DQ$$
$$B = DQ'.$$

Cela posé, multiplions l'un des nombres donnés, A par exemple, par m; on aura

$$mA = DmQ.$$

Pour que le plus grand commun diviseur entre B et mA puisse être Dm, il faut que, dans la valeur de B, on puisse

mettre en évidence le facteur Dm; donc il faut que m soit un diviseur de Q'. Il est du reste évident que si l'on multiplie A par un des diviseurs, m, de Q', on multipliera le plus grand commun diviseur par m; car si l'on a

$$Q' = mQ'',$$

on aura

$$B = mDQ''$$

et les facteurs Q et Q'' seront premiers entre eux, sans quoi Q et Q' ne seraient pas premiers entre eux; donc mA et B auront bien pour plus grand commun diviseur mD. — La condition indiquée pour m est donc nécessaire et suffisante.

5. — *Dans un triangle rectangle on connaît le périmètre et la surface; calculer les angles.*

Nous prendrons comme inconnue auxiliaire le rayon du cercle inscrit au triangle; soient A l'angle droit, B et C les deux autres angles; on a, x, y et z étant les deux côtés de l'angle droit et l'hypoténuse :

$$x = r\left(1 + \cot g\frac{B}{2}\right),$$

$$y = r\left(1 + \cot g\frac{C}{2}\right),$$

$$z = r\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right);$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre, et appelant $2p$ le périmètre $\quad p = r\left(1 + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right);$

d'autre part en appelant m^2 la surface du triangle

$$pr = m^2;$$

d'où en multipliant membre à membre, et simplifiant

$$p^2 = m^2\left(1 + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right).$$

Mais, on a, puisque $A = 90°$, $1 = \cot g\frac{A}{2}$; par suite, en tenant compte de la formule connue

$$\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2},$$

on en tire $\quad \cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} = \frac{p^2}{m^2},$

d'où l'on tire très facilement en remplaçant les cotangentes par leurs valeurs, et appliquant les formules données par la théorie des proportions,

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{p^2+m^2}{p^2-m^2}.$$

Or, l'angle $\frac{B+C}{2}$ est égal à 45°; donc on aura facilement $\frac{B-C}{2}$, et par suite les angles B et C sont connus.

Remarque. — Il est bien évident que la différence $\frac{B-C}{2}$ est moindre que 45°; donc le numérateur du premier membre est supérieur à son dénominateur; de plus le rapport devant être positif, il faut que m^2 soit inférieur à p^2, ce qui se voit du reste immédiatement, puisque r est inférieur à p, d'après la relation connue $2p = 2z + 2r$.

6. — *On donne un cercle* C, *un point* A *sur ce cercle et un point* B *dans le plan du cercle; trouver le rayon d'un cercle tangent en* A *au cercle donné et passant par le point* B.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Nous supposerons d'abord que le point B est extérieur au cercle donné, et que le cercle cherché est tangent extérieurement au cercle donné; alors la distance des centres est égale à $R+x$, en appelant x le rayon du cercle cherché; si d est la distance du centre C du cercle donné au point B, α l'angle ACB, on a la relation

$$x^2 = (R+x)^2 + d^2 - 2d(R+x)\cos\alpha.$$

En simplifiant on trouve

$$x = \frac{R^2+d^2-2dR\cos\alpha}{2(d\cos\alpha - R)}.$$

Cherchons une interprétation géométrique de cette valeur de x.

Si l'on joint le point A au point B, on a facilement, par le triangle ACB,

$$AB^2 = R^2 + d^2 - 2dR\cos\alpha;$$

d'autre part, si nous cherchons à projeter la longueur CB sur CA, nous aurons, en appelant CH cette projection,

$$CH = d \cos \alpha$$

et par suite $$AH = d \cos \alpha - R.$$

On retrouve ainsi la propriété connue d'un cercle, savoir qu'une corde (la corde AB) est moyenne proportionnelle entre le diamètre ($2x$) et la projection (AH) de la corde sur un diamètre passant par son extrémité.

Cela posé, considérons les différents cas que peut présenter la figure. Si la quantité $d \cos \alpha - R$ est positive, x est positif; en effet, dans ce cas le point H est extérieur à la circonférence C; l'angle BAC est obtus, car on aura cet angle par la formule $\cos BAC = \frac{R - d \cos \alpha}{R \times AB}$; dans ce cas les deux circonférences sont tangentes extérieurement.

Si le dénominateur est nul, le point B se projette au point A; d'où il résulte que la droite AB est perpendiculaire au rayon CA et par suite tangente au cercle C. Donc la circonférence cherchée aura deux points, les points A et B. communs avec une de ses tangentes, la tangente en A, et par suite elle se réduira à la tangente AB; en d'autr es termes elle deviendra un cercle de rayon infini.

Si le dénominateur est négatif, x sera négatif, c'est-à-dire compté dans la direction AC. Nous allons subdiviser ce cas en deux :

1° Le point B est extérieur à la circonférence C. Dans ce cas, on a $$d > R.$$

On en déduit facilement que l'on a

$$AB^2 > 2R(R - d \cos \alpha).$$

Donc, en valeur absolue, x est plus grand que R. En effet, dans ce cas, le cercle cherché devant passer par un point extérieur au cercle C, l'enveloppe, et par suite a un rayon plus grand que celui du cercle C.

2° Au contraire, lorsque le point B est intérieur au cercle C, on a $$d < R,$$

on en déduit $$AB^2 < 2R(R - d \cos \alpha);$$

x est encore négatif, mais plus petit que R en valeur

absolue, et, en effet, le cercle cherché devra être intérieur au cercle B.

Dans le cas très particulier où B serait sur la circonférence C, on trouverait facilement $x = R$; et en effet, dans ce cas, le cercle cherché se confondrait avec le cercle donné, car ils auraient un point commun et seraient, en outre, tangents à la même droite au même point de cette droite.

7. — *On a un triangle dont les angles sont en progression arithmétique. Trouver une relation simple entre les côtés.*

Soient A, B, C les angles du triangle rangés par ordre de grandeur; il résulte de la condition indiquée que l'angle B est égal à 60° et que par suite son cosinus est égal à $\frac{1}{2}$; donc on a, en portant cette hypothèse dans la valeur de b^2,

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie entre les trois côtés, les angles sont en progression arithmétique, car on en tire facilement $B = 60$; et par suite $A + C = 120 = 2B$; donc l'angle B est la demi-somme des deux autres; par suite les angles A, B, C sont bien en progression arithmétique.

8. — *On donne une ellipse et on demande de calculer l'un des rayons vecteurs en fonction de l'angle qu'il fait avec le grand axe. On considère ensuite un angle droit qui tourne autour de l'un des foyers; déterminer l'angle α que l'un de ses côtés fait avec le grand axe, de façon que, si l'on mène la corde qui joint les points où les côtés rencontrent l'ellipse, le triangle ainsi formé soit maximum.*

Considérons le triangle FMF', formé par la distance focale $2c$ et les deux rayons vecteurs r et r'; on a d'abord

$$r + r' = 2a$$

et

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \alpha.$$

En éliminant r', et réduisant, on trouve

$$r = \frac{b^2}{a - c \cos \alpha}.$$

Si l'on change α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$, on sait que le cosinus se

change en sinus, et change de signe ; donc on aura pour le second rayon $r_1 = \dfrac{b^2}{a + c \cos \alpha}$.

Donc, pour résoudre la seconde partie de la question, on doit chercher le maximum du produit de rr_1, ou, ce qui revient au même, le minimum du produit

$$(a - c \cos \alpha)(a + c \sin \alpha).$$

Cette expression devient, lorsqu'on la développe,

$$a^2 + ac(\sin \alpha - \cos \alpha) - c^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Comme il y a une partie constante, il suffit de s'occuper du minimum de la partie variable, on a donc à chercher le minimum de

$$a(\sin \alpha - \cos \alpha) - c \sin \alpha \cos \alpha.$$

Posons $a(\sin \alpha - \cos \alpha) - c \sin \alpha \cos \alpha = m$.

Faisons passer le dernier terme dans le second membre, et élevons au carré ; il vient, après réduction,

$$a^2 - 2a^2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 + c^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2mc \sin \alpha \cos \alpha$$

ou, en ordonnant, après avoir multiplié par 4, pour avoir $\sin 2\alpha$:

$$c^2 \sin^2 2\alpha + 4(mc + a^2) \sin 2\alpha + 4(m^2 - a^2) = 0$$

Il faut, pour que les valeurs ainsi trouvées pour $\sin 2\alpha$ conviennent, qu'elles soient d'abord réelles, puis comprises entre $+1$ et -1. On trouvera facilement que ces valeurs sont toujours réelles ; on peut reconnaître aussi que la plus grande racine, celle qui a le signe $+$ devant le radical, est toujours inférieure à 1, car la condition à remplir dans ce cas est $(c^2 + 2m)^2 > 0$,

condition toujours satisfaite.

Pour que l'autre racine soit supérieure à 1, on trouve, après réduction, la condition

$$c^2 - 2m < 2a\sqrt{2}$$

ou $$2m \geqq c^2 - 2a\sqrt{2}.$$

On trouve donc pour minimum de m, la valeur $c^2 - 2a\sqrt{2}$. Dans ce cas, on a $\sin 2\alpha = -1$; en supposant que l'on ne prenne pour α que des angles aigus, positifs ou négatifs, on trouve $\alpha = -45°$;

c'est-à-dire que les deux rayons sont symétriques par rapport au grand axe.

9. — *Trouver la condition pour que l'on puisse décomposer en deux facteurs du premier degré à deux variables le polynôme complet* $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.

Nous prendrons deux facteurs du premier degré de la forme

$$x + my + p$$
$$x + ny + q,$$

et nous allons chercher à déterminer m, n, p et q de façon qu l'on ait identiquement

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$
$$= a(x + my + p)(x + ny + q).$$

Il suffira pour cela que les coefficients des mêmes puissances des variables soient égaux, ce qui donnera entre m, n, p, q et les coefficients du polynôme donné les relations suivantes

$$a(m + n) = b$$
$$amn = c$$
$$a(p + q) = d$$
$$apq = f$$
$$a(mq + np) = e.$$

En éliminant m, n, p, q entre ces cinq équations, on aura la relation cherchée.

Or, les deux premières nous permettent de déterminer m et n; ce sont les racines de l'équation du second degré

$$aZ^2 - bZ + c = 0;$$

de même p et q sont racines de l'équation

$$aT^2 - dT + f = 0.$$

On sait que l'on peut prendre, pour représenter l'une des variables, l'une quelconque des racines de l'équation correspondante. Si donc nous désignons, pour abréger, par R le radical correspondant à la première, par S le radical correspondant à la seconde, nous aurons les deux systèmes :

$$m = \frac{-b + R}{2a}, \qquad p = \frac{-d + S}{2a}$$
$$n = \frac{-b - R}{2a}, \qquad q = \frac{-d - S}{2a}$$

ou bien $m = \frac{-b+R}{2a}$, $p = \frac{-d-S}{2a}$

$n = \frac{-b-R}{2a}$, $q = \frac{-d+S}{2a}$;

car il est bien évident que les deux autres systèmes retomberaient dans les précédents.

En portant ces valeurs dans la dernière équation, nous trouvons après réduction par le premier système

$$\frac{bd - RS}{2a} = e$$

et par le second, $\frac{bd + RS}{2a} = e$.

Comme il faut élever au carré, nous trouverons dans tous les cas $R^2S^2 = (bd - 2ae)^2$.

Remplaçons R^2 par sa valeur $b^2 - 4ac$, S^2 par sa valeur $d^2 - 4af$; effectuons, nous trouverons facilement après simplification, pour la condition cherchée.

$$ae^2 + cd^2 - bde + f(b^2 - 4ac) = 0.$$

A. M.

QUESTION 189

Solution par M. Boulogne. élève du Lycée de Saint-Quentin.

Montrer que si, par un même point de l'arête d'un dièdre, on mène dans chaque face une droite formant un même angle α avec l'arête, l'angle de ces deux droites ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

Si α est droit, l'angle des deux droites est le rectiligne du dièdre, et on sait que le dièdre est mesuré par son rectiligne, c'est-à-dire qu'ils varient proportionnellement. Dans la démonstration suivante nous considérerons le rectiligne du dièdre au lieu du dièdre lui-même.

Soit le dièdre SO. Coupons-le par un plan perpendiculaire à l'arête. L'angle COE = ω sera le rectiligne du dièdre.

Par un point A de l'arête, menons des droites AC, AE

faisant chacune avec l'arête un angle α, et soit φ l'angle CAE de ces deux droites. Soit de plus l la longueur constante CA.

Le triangle rectangle CAO donne $\mathrm{CO} = l \sin \alpha$ et le triangle COD donne aussi $\mathrm{CD} = \mathrm{CO} \sin \frac{}{2}$; donc

$$\mathrm{CD} = l \sin \alpha \sin \frac{\omega}{2}.$$

Si l'on joint A à D, le triangle ACD donne $\mathrm{CD} = l \sin \frac{\varphi}{2}$.

Égalant les deux valeurs de CD, on a après simplification

$$\sin \alpha \sin \frac{\omega}{2} = \sin \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = \sin \alpha = \text{constante}.$$

Or les angles ne variant pas proportionnellement à leurs sinus, il en résulte que $\frac{\varphi}{2}$ ne varie pas proportionnellement à $\frac{\omega}{2}$, ou φ proportionnellement à ω; et comme ω mesure le dièdre, φ ne varie pas proportionnellement au dièdre.

QUESTION 194

Solution par M. La Chesnais, élève du Lycée de Versailles.

On donne une circonférence O *et un diamètre* AB. *Trouver le lieu des points* M *tels que le carré construit sur la tangente* MT *soit équivalent à quatre fois le triangle* MOP, P *étant le pied de la perpendiculaire abaissée de* M *sur* AB.

Soit R le rayon du cercle, on doit avoir

$$MT^2 = 2MP \cdot OP.$$

Or $$MO^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2$$

donc $$MT^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 - R^2 = 2MP \cdot OP$$

Par suite $(MP - OP)^2 = R^2$.

Le lieu est le même que celui des points tels que la différence de leur distance à des droites soit constante.

Or on sait que *pour un point pris sur le prolongement de la base d'un triangle isoscèle, la différence des distances aux deux autres côtés est constante et égale à l'une des hauteurs égales du triangle.*

Donc le lieu géométrique cherché est le prolongement des côtés du carré inscrit.

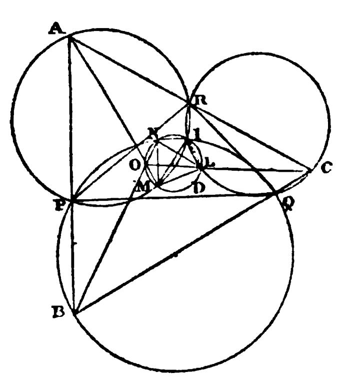
NOTA : Ont résolu la même question : MM. Bernard, Prunget, de Châteaudun ; Latappy, à Saint-Paul-lès-Dax ; Vazou, collège Rollin à Paris.

QUESTION 228

Solution par M. MONTÉROU du Lycée de Pau.

Lieu du centre d'un triangle équilatéral dont les côtés passent par trois points donnés.

Soit ABC un des triangles équilatéraux dont les côtés passent par trois points donnés P, Q, R. Les sommets A, B, C de ce triangle se trouvent évidemment sur les segments capables de 60° décrits sur les droites PR, PQ, QR.



Les bissectrices des angles A et B se coupent en O, centre du triangle équilatéral ABC, et passent par les points M, N, milieux des arcs opposés. Ces deux points M et N sont donc fixes. Joignons MN. L'angle MON est égal à l'angle AOB, qui lui-même est égal

à 120°. Le lieu est donc le segment du cercle décrit sur MN et capable de 120°. Si l'on considérait les deux autres groupes de bissectrices, on prouverait de même que ce lieu n'est autre chose que les segments de cercle passant par M et L, L et N, capables de 120°.

Le lieu cherché est donc le cercle passant par les milieux des arcs capables de 120° décrits sur PR, PR, QR.

Remarque. — Le problème précédent n'est qu'un cas particulier du problème suivant.

On donne un triangle ABC *et un point* O *dans son plan. Le triangle se meut en restant constamment semblable à lui-même et de telle sorte que chacun de ses côtés passe par un point fixe. A chaque position du triangle correspond un point homologue à* O. *Lieu de ce point.*

Les sommets A et B ont pour lieu les segments capables de A et B décrits sur PR et PQ. Il résulte en outre de la construction du point O que les triangles AOB et CAO restent constamment semblables à eux-mêmes ; les angles BAO et OBC sont par suite constants. Les points M et N sont donc fixes et l'angle MON étant constant, le lieu est le segment capable de MON décrit sur MN.

NOTA. — M. BERRUT, élève de mathématiques élémentaires au lycée de Marseille, a résolu la même question. En outre, il fait remarquer :

1° Que les arcs NOM, NDL, LIN étant, chacun, capables de 120°, le triangle MLN est équilatéral. D'où le théorème :

Les milieux des segments de cercle capables de 120° *décrits sur les côtés d'un triangle sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

2° Le cercle lieu du point O passe par le point I commun aux trois segments de cercle.

En effet, joignons IM, IL, IR.

L'angle RIM a pour mesure la moitié de l'arc RAM, c'est-à-dire 150°. L'angle RIL vaut aussi 150° ; leur somme égale 300°. Donc MIL = 60°. Donc le point I commun aux trois segments de cercle bien sur la circonférence est lieu du point O.

NOTA. — M. Comandré, du lycée Saint-Louis, a résolu la même question.

NOTE SUR UNE APPLICATION
DU CALCUL DES DÉTERMINANTS
A CERTAINES QUESTIONS DE MAXIMA ET DE MINIMA

Par M. E. J. Boquel.

1° Soit une fonction $F(x)$ d'une seule variable indépendante, et telle qu'on puisse la mettre sous la forme de la somme de deux carrés de deux fonctions linéaires de la variable x, comme il suit:

$$F(x) = (ax + b)^2 + (a'x + b')^2$$

en supposant les deux fonctions linéaires $ax + b$ et $a'x + b'$ distinctes, c'est-à-dire $ab' - ba' \lessgtr 0$.

Proposons-nous de trouver le minimum d'une pareille fonction. Considérons le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ formé avec les coefficients des deux fonctions linéaires qui entrent dans la composition de $F(x)$; déterminant que nous supposons différent de zéro

a et a' étant des constantes, le minimum de $F(x)$ a évidemment lieu pour la même valeur de x que le minimum de $(a^2 + a'^2)F(x)$. Mais on a identiquement, en représentant par A et A' les deux fonctions linéaires $ax + b$ et $a'x + b'$:

$$(a^2 + a'^2)(A^2 + A'^2) - (A'a - Aa')^2 = a^2A^2 + a'^2A'^2 + 2aa'AA'$$
$$= (aA + a'A')^2.$$

Donc $(a^2 + a'^2)\,F(x) = (A'a - Aa')^2 + (aA + a'A')^2$.

Mais $A'a - Aa'$ est précisément le déterminant Δ ; car on a:

$$a(a'x + b') - a'(ax + b) = ab' - ba'.$$

Donc $(a^2 + a'^2)F(x) = \Delta^2 + (aA + a'A')^2$.

L'expression dont il s'agit de trouver le minimum est donc égale à la somme de deux carrés dont le premier est une constante; son minimum aura donc lieu quand le second carré sera nul, c'est-à-dire pour la valeur de x satisfaisant à l'équation $Aa + A'a' = 0$, ou $\frac{A}{a'} = -\frac{A'}{a}$, qui,

développée, devient :

$$(ax + b)a + (a'x + b')a' = o$$

et qui conduit à la solution

$$x = -\frac{ab + b'a'}{a^2 + a'^2}.$$

Pour cette valeur de x, l'expression se réduit à Δ^2 qui est sa valeur minimum, et par conséquent le minimum de $F(x)$ est $\frac{\Delta^2}{a^2 + a'^2} = \frac{(ab' - ba')^2}{a^2 + a'^2}$, qui a lieu quand on donne à x la valeur $-\frac{ab + a'b'}{a^2 + a'^2}$. Ce sont d'ailleurs les résultats qu'on obtient par les procédés élémentaires connus.

Pour bien faire sentir l'avantage de la formule précédente, où le minimum de $F(x)$ est exprimé en fonction de Δ, prenons une application très simple, par exemple la distance d'un point $(x'' y'')$, à une droite $Ax + By + C = o$ (coordonnées rectangulaires).

La distance cherchée est le minimum de l'expression

$$\delta^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2$$

où x', y' désignent les coordonnées d'un point de la droite considérée, c'est-à-dire des quantités telles que l'on ait identiquement $Ax' + By' + C = o$. Remplaçons y' par $-\frac{Ax'}{B} - \frac{C}{B}$, dans δ^2 ; il vient :

$$\delta^2 = \left(\frac{Ax'}{B} + \frac{C}{B} + y''\right)^2 + (x' - x'')^2.$$

C'est là une fonction $F(x')$ de la variable x', présentant précisément la forme étudiée plus haut, et l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{A}{B} & \frac{C}{B} + y'' \\ 1 & -x'' \end{vmatrix} = -\left(\frac{Ax''}{B} + \frac{C}{B} + y''\right).$$

Le minimum de $F(x')$ est donc immédiatement, en vertu de la formule établie,

$$\delta^2 = \frac{\left(\frac{A}{B}x'' + \frac{C}{B} + y''\right)^2}{\frac{A^2}{B^2} + 1} = \frac{(Ax'' + By'' + C)^2}{A^2 + B^2}.$$

On reconnaît bien la formule usitée en géométrie analytique, quand la droite est sous la forme $Ax + By + C = 0$.

2° Soit maintenant une fonction $F(x, y)$ de deux variables indépendantes et telle qu'on puisse la mettre sous la forme de la somme de trois carrés de trois fonctions linéaires des deux variables x et y, comme il suit :

$$F(x, y) = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2 + (a''x + b''y + c'')^2.$$

Considérons le déterminant formé avec les coefficients des trois fonctions linéaires qui entrent dans la composition de $F(x, y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

et supposons ce déterminant différent de zéro.

Ordonnons-le par rapport aux éléments de la dernière colonne ; il prendra la forme $\Delta = Cc + C'c' + C''c''$. C, C', C'' étant des constantes, le minimum de $F(x, y)$ a évidemment lieu pour les mêmes valeurs de x et de y que le minimum de l'expression $(C^2 + C'^2 + C''^2)F(x, y)$.

Désignons par A, A', A'' les trois fonctions linéaires

$$ax + by + c, \quad a'x + b'y + c', \quad a''x + b''y + c'';$$

on a identiquement :

$$(C^2 + C'^2 + C''^2)(A^2 + A'^2 + A''^2) - (AC + A'C' + A''C'')^2$$
$$= (C'A'' - C''A')^2 + (C''A - CA'')^2 + (CA' - C'A)^2.$$

Observons que $AC + A'C' + A''C''$ est précisément le déterminant Δ ; car si, dans ce déterminant, on multiplie les éléments de la première colonne par x, ceux de la seconde par y, et qu'on ajoute ces éléments ainsi multipliés aux éléments correspondants de la troisième colonne, le déterminant nouveau est égal au premier, et l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & ax + by + c \\ a' & b' & a'x + b'y + c' \\ a'' & b'' & a''x + b''y + c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & A \\ a' & b' & A' \\ a'' & b'' & A'' \end{vmatrix}$$

Or, en ordonnant ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on a précisément

$$\Delta = AC + A'C' + A''C'',$$

puisqu'il ne diffère du proposé que par le changement en A, A', A'', des éléments c, c', c'' de la colonne par rapport à laquelle on avait primitivement ordonné.

On a donc enfin :

$$(C^2 + C'^2 + C''^2)F(x, y) = \Delta^2 + (C'A'' - C''A')^2$$
$$+ (C''A - CA'')^2 + (CA' - C'A)^2.$$

Cette expression est la somme de quatre carrés dont l'un est une constante; son minimum aura donc lieu quand les trois derniers carrés seront nuls (si cela est possible), c'est-à-dire pour les valeurs de x et de y satisfaisant aux équations
$C'A'' - C''A' = 0$, $C''A - CA'' = 0$, $CA' - C'A = 0$.

Ces trois équations n'en forment réellement que deux distinctes ; car elles ne sont autre chose que l'égalité des rapports suivants : $\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'} = \frac{A''}{C''}$;
on pourra donc généralement trouver des valeurs de x et de y annulant les trois derniers carrés et pour ces valeurs l'expression $(C^2 + C'^2 + C''^2)F(x, y)$ atteint son minimum dont la valeur est Δ^2. Le minimum de $F(x, y)$ est donc

$$\frac{\Delta^2}{C^2 + C'^2 + C''^2}.$$

Appliquons ce résultat à une question simple, la recherche de la plus courte distance de deux droites de l'espace.

Soient
$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$
et
$$\begin{cases} x = a'z + p' \\ y = b'z + q' \end{cases}$$
les équations des deux droites dont il s'agit (axes rectangulaires).

En appelant $(x'\ y'\ z')$ et $(x''\ y''\ z'')$ les coordonnées de deux points respectivement situés sur ces droites, le carré de la plus courte distance cherchée est le minimum de l'expression

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$
ou $$\delta^2 = (az' - a'z'' + p - p')^2 + (bz' - b'z'' + q - q')^2 + (z' - z'')^2$$

C'est là une fonction F (z', z'') des deux variables indépendantes z' et z'', présentant précisément la forme étudiée plus haut, et l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -a' & p - p' \\ b & -b' & q - q' \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

mettre en évidence le facteur Dm; donc il faut que m soit un diviseur de Q'. Il est du reste évident que si l'on multiplie A par un des diviseurs, m, de Q', on multipliera le plus grand commun diviseur par m; car si l'on a

$$Q' = mQ'',$$

on aura

$$B = mDQ''$$

et les facteurs Q et Q'' seront premiers entre eux, sans quoi Q et Q' ne seraient pas premiers entre eux; donc mA et B auront bien pour plus grand commun diviseur mD. — La condition indiquée pour m est donc nécessaire et suffisante.

5. — *Dans un triangle rectangle on connaît le périmètre et la surface; calculer les angles.*

Nous prendrons comme inconnue auxiliaire le rayon du cercle inscrit au triangle; soient A l'angle droit, B et C les deux autres angles; on a, x, y et z étant les deux côtés de l'angle droit et l'hypoténuse :

$$x = r\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right),$$

$$y = r\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right),$$

$$z = r\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right);$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre, et appelant $2p$ le périmètre

$$p = r\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right);$$

d'autre part en appelant m^2 la surface du triangle

$$pr = m^2;$$

d'où en multipliant membre à membre, et simplifiant

$$p^2 = m^2\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right).$$

Mais, on a, puisque $A = 90°$, $1 = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$; par suite, en tenant compte de la formule connue

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

on en tire

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p^2}{m^2},$$

d'où l'on tire très facilement en remplaçant les cotangentes par leurs valeurs, et appliquant les formules données par la théorie des proportions,

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{p^2+m^2}{p^2-m^2}.$$

Or, l'angle $\frac{B+C}{2}$ est égal à 45°; donc on aura facilement $\frac{B-C}{2}$, et par suite les angles B et C sont connus.

Remarque. — Il est bien évident que la différence $\frac{B-C}{2}$ est moindre que 45°; donc le numérateur du premier membre est supérieur à son dénominateur; de plus le rapport devant être positif, il faut que m^2 soit inférieur à p^2, ce qui se voit du reste immédiatement, puisque r est inférieur à p, d'après la relation connue $2p = 2z + 2r$.

6. — *On donne un cercle* C, *un point* A *sur ce cercle et un point* B *dans le plan du cercle; trouver le rayon d'un cercle tangent en* A *au cercle donné et passant par le point* B.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Nous supposerons d'abord que le point B est extérieur au cercle donné, et que le cercle cherché est tangent extérieurement au cercle donné; alors la distance des centres est égale à $R+x$, en appelant x le rayon du cercle cherché; si d est la distance du centre C du cercle donné au point B, α l'angle ACB, on a la relation

$$x^2=(R+x)^2+d^2-2d(R+x)\cos\alpha.$$

En simplifiant on trouve

$$x=\frac{R^2+d^2-2dR\cos\alpha}{2(d\cos\alpha-R)}.$$

Cherchons une interprétation géométrique de cette valeur de x.

Si l'on joint le point A au point B, on a facilement, par le triangle ACB,

$$AB^2=R^2+d^2-2dR\cos\alpha;$$

mettre en évidence le facteur Dm; donc il faut que m soit un diviseur de Q'. Il est du reste évident que si l'on multiplie A par un des diviseurs, m, de Q', on multipliera le plus grand commun diviseur par m; car si l'on a

$$Q' = mQ'',$$

on aura

$$B = mDQ''$$

et les facteurs Q et Q'' seront premiers entre eux, sans quoi Q et Q' ne seraient pas premiers entre eux; donc mA et B auront bien pour plus grand commun diviseur mD. — La condition indiquée pour m est donc nécessaire et suffisante.

5. — *Dans un triangle rectangle on connaît le périmètre et la surface; calculer les angles.*

Nous prendrons comme inconnue auxiliaire le rayon du cercle inscrit au triangle; soient A l'angle droit, B et C les deux autres angles; on a, x, y et z étant les deux côtés de l'angle droit et l'hypoténuse :

$$x = r\left(1 + \cot\frac{B}{2}\right),$$

$$y = r\left(1 + \cot\frac{C}{2}\right),$$

$$z = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right);$$

d'où l'on tire, en ajoutant membre à membre, et appelant $2p$ le périmètre $\quad p = r\left(1 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$;

d'autre part en appelant m^2 la surface du triangle

$$pr = m^2;$$

d'où en multipliant membre à membre, et simplifiant

$$p^2 = m^2\left(1 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right).$$

Mais, on a, puisque $A = 90°$, $1 = \cot\frac{A}{2}$; par suite, en tenant compte de la formule connue

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

on en tire $\quad \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{p^2}{m^2},$

d'où l'on tire très facilement en remplaçant les cotangentes par leurs valeurs, et appliquant les formules données par la théorie des proportions,

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{p^2+m^2}{p^2-m^2}.$$

Or, l'angle $\frac{B+C}{2}$ est égal à 45°; donc on aura facilement $\frac{B-C}{2}$, et par suite les angles B et C sont connus.

Remarque. — Il est bien évident que la différence $\frac{B-C}{2}$ est moindre que 45°; donc le numérateur du premier membre est supérieur à son dénominateur; de plus le rapport devant être positif, il faut que m^2 soit inférieur à p^2, ce qui se voit du reste immédiatement, puisque r est inférieur à p, d'après la relation connue $2p = 2z + 2r$.

6. — *On donne un cercle* C, *un point* A *sur ce cercle et un point* B *dans le plan du cercle; trouver le rayon d'un cercle tangent en* A *au cercle donné et passant par le point* B.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Nous supposerons d'abord que le point B est extérieur au cercle donné, et que le cercle cherché est tangent extérieurement au cercle donné; alors la distance des centres est égale à $R+x$, en appelant x le rayon du cercle cherché; si d est la distance du centre C du cercle donné au point B, α l'angle ACB, on a la relation

$$x^2=(R+x)^2+d^2-2d(R+x)\cos\alpha.$$

En simplifiant on trouve

$$x=\frac{R^2+d^2-2dR\cos\alpha}{2(d\cos\alpha-R)}.$$

Cherchons une interprétation géométrique de cette valeur de x.

Si l'on joint le point A au point B, on a facilement, par le triangle ACB,

$$AB^2=R^2+d^2-2dR\cos\alpha;$$

tions des droites A_1 et B_1

$$\lambda ax = y$$
$$\mu ax = y$$

avec $a^2\lambda\mu + 1 = 0$, ce qui donne comme lieu de ab l'équation

$$x^2 + y^2 = 0,$$

qui représente deux plans imaginaires passant par l'axe des z. Il était bien évident, *a priori*, que l'axe des z ferait partie du lieu, puisque toutes les droites A s'appuient sur l'axe des z et lui sont perpendiculaires.

Lieu des points a′ *et* b′.

Les équations des droites A′ et B′ sont :

$$A' \qquad (ax + bz) = \mu_1 \qquad \mu_1 z = y$$
$$B' \qquad (ax + bz) = \lambda_1 \qquad \lambda_1 z = y.$$

Les droites A′ et B sont dans un même plan vertical; elles se projettent horizontalement suivant la même droite. Les équations de ces projections sont :

$$A'_1 \qquad \mu_1 ax + by = \mu_1^2,$$
$$B_1 \qquad \mu ax + b\mu^2 = y.$$

Pour que ces équations représentent une même droite il faut que l'on ait :

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{-\mu_1^2}{b\mu^2} = \frac{b}{-1}.$$

Toutes ces relations sont vérifiées pour la même valeur de μ_1; ce qui était évident, d'après la discussion géométrique ci-dessus. Il faut donc prendre

$$\mu_1 = -b\mu,$$
$$\lambda_1 = -b\lambda.$$

Les équations des droites A′ et B′ deviennent :

$$A' \qquad ax + bz = -b\mu \qquad -b\mu z = y,$$
$$B' \qquad ax + bz = -b\lambda \qquad -b\lambda z = y.$$

La droite $a'b'$ reste perpendiculaire au deuxième plan directeur $ax + bz = 0$. Pour avoir la section droite de ce cylindre, je fais tourner les axes de coordonnées dans le plan des zx en prenant pour nouvel axe des x la droite ON et pour nouvel axe des z la droite ON′ perpendiculaire.

Dans ce système d'axes la droite Ox aura pour équation $ax + bz = 0$, la droite Oz, $-bx + az = 0$.

Pour passer de l'ancien système au nouveau il suffira de remplacer

$$x \text{ par } \frac{-bx + az}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad z \text{ par } \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On voit d'après ces formules que

$$ax + bz \text{ devient } z\sqrt{a^2 + b^2}.$$

L'équation du paraboloïde restera la même, ce qui était évident d'ailleurs, puisque les deux plans directeurs doivent jouer le même rôle dans la surface.

Les équations des droites A′ et B′ deviennent dans ce système en posant $\delta = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{A}' \qquad \delta z = -b\mu \qquad -b\mu\,(ax + bz) = \delta y,$$

$$\text{B}' \qquad \delta z = -b\lambda \qquad -b\lambda\,(ax + bz) = \delta y.$$

Les projections de A′ et B′ sur le deuxième plan directeur ont pour équation :

$$b\mu\,(\delta ax - b^2\mu) = -\delta^2 y, \tag{5}$$

$$b\lambda\,(\delta ax - b^2\lambda) = -\delta^2 y. \tag{6}$$

Avec (1) $\qquad \lambda\mu a^2 + 1 = 0.$

En éliminant λ et μ entre ces trois équations on aura l'équation du cylindre que décrit $a'b'$.

En retranchant (5) et (6) membre à membre et en supposant a et $b \gtrless 0 \qquad (\lambda - \mu)\,[\delta ax - b^2(\lambda + \mu)] = 0.$

En laissant de côté la solution $\lambda - \mu = 0$

$$\lambda + \mu = \frac{\delta ax}{b^2}$$

$$\lambda\mu = -\frac{1}{a^2}$$

d'où

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{\delta^2 a^2 x^2}{b^4} + \frac{2}{a^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$b\delta ax(\lambda + \mu) - b^2(\lambda^2 + \mu^2) = -2\delta^2 y$$

obtenue en ajoutant (5) et (6), membre à membre, on a :

$$\delta^2 y = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dans le plan des xy cette équation représente une droite parallèle à la directrice de la parabole de contour apparent. Dans l'espace elle représente un plan perpendiculaire à l'axe de la surface ; ce plan coupe la surface suivant une

hyperbole qui se projette en vraie grandeur sur le plan des zx. L'équation de cette projection est

$$z(ax + bz) = \frac{b^2}{a^2\delta^2}$$

L'équation ne changera pas d'ailleurs si l'on revient aux axes primitifs.

La solution $\lambda - \mu = 0$ donne encore deux plans imaginaires.

2° Lieu des points de rencontre des droites A *et* B′, *ou* A′ *et* B.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Au point d'intersection de A et B′ le plan tangent à la surface, qui contient les droites A et B′, est vertical ; le point d'intersection se trouve donc sur la courbe de contact du cylindre vertical, circonscrit à la surface. Cette courbe de contact n'est autre chose que la parabole du contour apparent.

SOLUTION ANALYTIQUE

Les droites A et B′ ont pour équation :

A	$z = \lambda$	$\lambda(ax + bz) = y,$
B′	$ax + bz = -b\lambda$	$-b\lambda z = y.$

Le z du point d'intersection sera égal à λ. Pour avoir une relation entre l'x et l'y du point d'intersection, c'est-à-dire pour avoir le cylindre projetant verticalement la courbe d'intersection, il suffira d'éliminer λ entre

$$ax + b\lambda = -b\lambda \qquad \text{et} \qquad \lambda(ax + b\lambda) = y.$$

Ce qui donne $\quad -\frac{ax}{2b}\left(ax - \frac{ax}{2}\right) = y$

$$a^2x^2 + 4by = 0;$$

la trace de ce cylindre sur le plan des xy est la parabole de contour apparent.

3° Calculer le rapport des longueurs a′b′ *et* ab *et étudier les variations de ces longueurs.*

La plus courte distance des horizontales A et B est la distance des plans horizontaux menés par A et B, c'est-à-dire en valeur absolue $\lambda - \mu$.

De même la distance des droites A′ et B′ est la distance des plans menés par ces droites, parallèlement au deuxième

plan directeur; plans qui ont pour équation dans le deuxième système de coordonnées :

$$z = -\frac{b}{\delta}\cdot\lambda \qquad z = -\frac{b}{\delta}\cdot\mu.$$

La plus courte distance $a'b'$ est en valeur absolue

$$\frac{b}{\delta}\cdot(\lambda-\mu).$$

On a, par conséquent, $\dfrac{a'b'}{ab} = \dfrac{b}{\delta}$,

rapport qui reste constant.

Pour étudier les variations de ab, $a'b'$, il suffit d'étudier les variations de $\lambda - \mu$; λ et μ étant reliés par la relation

$$\lambda\mu = -\frac{1}{a^2},$$

λ et μ sont de signes contraires, leur produit est constant, la somme $\lambda + \mu$ peut prendre toutes les valeurs. Je prends $\lambda + \mu$ comme variable indépendante.

$$(\lambda-\mu)^2 = (\lambda+\mu)^2 + \frac{4}{a^2}.$$

$\lambda - \mu$ croît en même temps que $\lambda + \mu$ croît en valeur absolue et peut prendre toutes les valeurs plus grandes que $\dfrac{2}{a}$; $\dfrac{2}{a}$ est donc le minimum de la plus courte distance des droites A et B. $\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{b}{\delta}$ sera le minimum de la plus courte distance des droites A′ et B′.

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Algèbre.

Chercher pour quelles valeurs de x la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots \text{ est convergente.}$$

Trouver en même temps la limite vers laquelle tend $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ quand n croît indéfiniment, sans employer la règle de L'Hospital.

— En cherchant la plus grande commune mesure entre deux longueurs A et B, on a les égalités successives

$$A = Bq + R$$
$$B = Rq_1 + R_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$R_{n-2} = R_{n-1}q_n + R_n$$

En supposant $R_n = 0$, le rapport $\frac{A}{B}$ s'exprime par une fraction continue terminée. On propose de déduire de cette considération que les réduites successives d'une fraction continue sont des fractions irréductibles.

— Sachant qu'entre trois racines x', x'', x''' de l'équation $f(x) = 0$ on a une relation $\varphi(x', x'', x''') = 0$, on demande la marche à suivre pour abaisser le degré de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire pour ramener sa résolution à celle d'une équation du degré moindre.

— On demande, à propos de la dérivation de a^x, si le rappport $\frac{a^h - 1}{h}$ tend vers sa limite en croissant ou en décroissant.

Distinguer entre $a > 1$ et $a < 1$.

— a étant un nombre entier, réduire $\sqrt{a(a+1)}$ en une fraction continue.

— Soit l'expression $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; on demande à quelles *conditions* doit satisfaire une valeur de x comprise entre les deux nombres a et b pour que la fonction considérée soit croissante pour cette valeur de x, a et b ne comprenant entre eux aucune racine de la dérivée.

— Soit la fraction $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$; on demande de *former* l'équation du deuxième degré qui admet pour racines les valeurs de x qui répondent au maximum et au minimum de la fraction donnée.

— Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{x^p + x^{q-1}}{(x-1)^3(x^2+1)}$, p et q désignant deux nombres entiers quelconques.

— $f(x) = 0$ étant une équation à coefficients imaginaires, qui admet pour racine une imaginaire de la forme $a + b\sqrt{-1}$, établir que l'équation conjuguée de la proposée (c'est-à-dire celle que l'on en déduit en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$) admet pour racine l'imaginaire $a - b\sqrt{-1}$ conjuguée de $a + b\sqrt{-1}$.

— Etudier les variations de la fonction

$$y = x + \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Démontrer : 1° que quand on multiplie deux polynômes par *un troisième*, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce troisième polynôme ; 2° que si un polynôme divise un produit de deux polynômes et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

— Réduire $2 + \sqrt{5}$ en fraction continue.

— Etablir que les logarithmes de deux nombres, pris chacun dans le système dont l'autre est la base, sont inverses l'un de l'autre, c'est-à-dire que

$$\log_b a \times \log_a b = 1.$$

— **Former l'équation du deuxième degré dont l'une des racines est la valeur de la fraction continue**

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{8 + \ldots}}}}}}$$

— Etant donnée l'équation $f(x) = 0$, on demande de former une équation telle que chacune de ses racines y soit liée à deux quelconques des racines de la proposée par une relation telle que $y = \varphi(x', x'')$.

— Expliquer comment on peut faire la séparation des racines de l'équation du quatrième degré au moyen du théorème de Rolle.

— Décomposer en fractions simples la fraction

$$\frac{1 . 2 . 3 . \ldots n}{(x + 1)(x + 2)(x + 3) \ldots (x + n)}.$$

— De la formule $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, déduire la formule qui donne $\sin(a + b)$, par la dérivation.

— Réduire $\sqrt{a^2 - 1}$ en fraction continue.

— Etudier les variations de la fonction implicite définie par l'équation $x^3 + y^4 - 1 = 0$, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Les conditions que l'on trouve en exprimant, au moyen du théorème de Sturm, qu'une équation du degré m a toutes ses racines réelles, sont-elles toutes distinctes? — Pourquoi y en a-t-il qui rentrent dans les autres? — Si l'une des fonctions de Sturm, X_p, a des racines imaginaires, l'équation proposée peut-elle avoir toutes ses racines réelles? — Combien en a-t-elle au moins d'imaginaires? — Que peut-on dire de l'équation proposée quand $X_p = 0$ a une racine double?

— Le nombre $1 + \sqrt[p]{N}$ rend-il aussi positif le premier membre de la dérivée du polynôme $Ax^m - N(x^{m-p} + x^{m-p-1} + \ldots + 1)$?

Rend-il aussi positif le premier membre de la dérivée de l'équation proposée?

Géométrie analytique plane.

Construire la courbe dont l'équation est :

$$y = x \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 - x}} \text{ asymptotes.}$$

— On donne une tangente à une parabole, ainsi que le point où cette tangente rencontre la directrice de la courbe; on donne en outre un cercle ayant ce point pour centre et un rayon donné r, cercle que l'on considère comme le lieu des sommets des paraboles considérées; former l'équation générale de ces courbes.

— Déduire de l'équation de la tangente en coordonnées polaires l'équation de l'asymptote.

Trouver les asymptotes de la courbe

$$\rho^3(1 - 2 \sin \omega) - 2\rho^2 \cos \omega + 1 - \operatorname{tg} \omega = 0.$$

— Étant donnés deux points A et B, trouver le lieu des points M tels que l'angle MBA soit le double de l'angle MAB.

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$x^3 + y^5 = 1.$$

— Étant donné un cercle O et un rayon fixe OA, on prend un rayon mobile OB; trouver le lieu du point M de rencontre des perpendiculaires AH et BK abaissées de l'extrémité de chaque rayon sur l'autre rayon.

— On donne les équations de deux cercles en coordonnées rectangulaires

$$x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2d'x + 2e'y + f = 0.$$

Exprimer que ces deux cercles se coupent orthogonalement en leurs points de rencontre.

Généraliser pour deux courbes quelconques.

— Démontrer que par les points de rencontre de deux ellipses quelconques, on peut toujours faire passer une hyperbole.

— On donne une asymptote d'une hyperbole, ainsi que le point où elle rencontre la tangente en l'un des sommets; on donne en outre la longueur de l'axe transverse. On demande l'équation générale des hyperboles ayant ces conditions communes.

— On demande l'équation générale des paraboles qui ont de commun un point de l'axe, un point de la directrice et le paramètre.

— L'équation générale du deuxième degré à deux variables représentant une parabole, on demande de calculer la valeur du paramètre en fonction des coefficients.

— Étant donnée l'équation d'une courbe en coordonnées bipolaires, on demande de déterminer la tangente en un de ses points. — Appliquer le résultat à l'ellipse, à l'hyperbole et à la lemniscate.

— On prend sur une ellipse deux points M' et M". Du point M' comme centre on décrit un cercle passant par le foyer de droite. Du point M" on décrit un deuxième cercle passant par le même foyer. Calculer la longueur de la tangente commune à ces deux circonférences.

— On mène deux diamètres quelconques MOM' et POP' d'une hyperbole équilatère; on joint un point Q quelconque de cette hyperbole aux points M, P, M', P'; démontrer que les angles PQM et P'QM' sont égaux.

— Former l'équation générale des coniques qui ont en commun une tangente, son point de contact, et les points où cette tangente rencontre les deux directrices.

— On donne un foyer d'une ellipse, et une droite sur laquelle est compté l'un des diamètres conjugués égaux. Trouver l'équation générale des ellipses satisfaisant à ces conditions.

— Former l'équation générale des hyperboles ayant une asymptote commune, ainsi que le point où l'autre asymptote coupe l'une des deux directrices.

— Trouver les asymptotes de la courbe représentée par l'équation

$$\rho^3 (1 - 4\sin^2 \omega) + 2\rho^2 \sin \omega + \cos \omega - 1 = 0.$$

— Former l'équation générale des paraboles qui ont en commun une tangente, le point A où cette tangente rencontre les directrices, et dont le lieu des foyers est un cercle décrit de A comme centre avec rayon donné.

— Intersection de deux coniques ayant un foyer commun.

— Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote et un sommet communs.

— Construire la courbe $\rho = \tan \omega - 1$.

— Étant donnés un cercle et une direction fixe, par un point quelconque d'un diamètre donné on mène une ordonnée dont on prend le milieu. Trouver le lieu du rabattement de ce point milieu sur la parallèle à la direction fixe menée par le pied de l'ordonnée.

— Construire la courbe $y = x^3 - x$.
Trouver le lieu des milieux des cordes de cette courbe qui sont parallèles à la droite $y = x$.

— Trouver le maximum de la distance du centre à une normale à l'ellipse.

— On donne une droite et trois points dans un plan ; former l'équation de la conique qui passe par les trois points, et dont la droite donnée est un axe.

— On donne une hyperbole équilatère, et un point fixe M sur l'un des axes. On mène un diamètre quelconque qui rencontre l'hyperbole aux points A et B. Par les trois points M, A, B on fait passer un cercle, et on mène en A et B les tangentes à ce cercle; elles se coupent en un point P. On joint PM; cette droite rencontre le cercle aux deux points M et N. A chaque position de la droite AB répond un point N; démontrer que ce point N décrit la polaire du point M par rapport à l'hyperbole.

— Former l'équation générale des paraboles qui ont en commun une tangente, le point où elle rencontre l'axe, et dont le lieu des sommets est une certaine droite perpendiculaire à la tangente.

— Lieu des milieux des cordes normales à la parabole.

— L'équation d'une courbe algébrique étant supposée mise sous la forme

$$x^m \varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} \varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-2} \varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

former l'équation de la tangente en un point donné, et en déduire l'équation de l'asymptote en considérant cette dernière comme une tangente dont le contact s'est éloigné à l'infini sur la courbe.

CONCOURS GÉNÉRAUX 1880

Mathématiques spéciales.

PREMIER CONCOURS (*retiré*). — Le produit

$$(1 + qz)(1 + q^3z)(1 + q^5z) \ldots (1 + q^{2n-1}z)\left(1 + \frac{q}{z}\right)\left(1 + \frac{q^3}{z}\right) \ldots \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$

étant représenté par

$$\frac{A_{-n}}{Z^n} + \frac{A_{-(n-1)}}{Z^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{Z} + A_0 + A_1 z + \ldots + A^n z^n,$$

on demande d'exprimer en fonction de q le coefficient des différentes puissances de z; 2° le paramètre q étant un nombre réel dont la valeur absolue est inférieure à l'unité, ou une quantité imaginaire dont le module est inférieur à l'unité, démontrer que le coefficient de z^r tend vers une limite quand r augmente indéfiniment, et déterminer cette limite.

DEUXIÈME CONCOURS. — Sur une courbe donnée du troisième degré ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points A_{-n}, $A_{-(n-1)}$ ... A_{-1}, A_0, A_1, A_2 ... A_n tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe aux points suivants. 1° Etant données les coordonnées du point A_0, on propose de trouver les coordonnées des points A_{-n} et A_n, et de déterminer la limite de ces points quand n augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe

SOLUTION ANALYTIQUE

Je place l'origine au sommet du paraboloïde ; je prends pour plan des xy le plan directeur parallèle aux droites A ; et dans ce plan, je prends pour axe des y l'axe du paraboloïde : l'axe des x sera alors la droite suivant laquelle le plan des xy coupe la surface. L'équation de la surface sera :

$$z(ax + bz) = y.$$

Les droites A et B ont pour équation

A $\qquad z = \lambda \qquad \lambda(ax + bz) = y.$

B $\qquad z = \mu \qquad \mu(ax + bz) = y. \qquad (1)$

Avec la relation $\quad a^2\lambda\mu + 1 = 0$

qui exprime que les droites sont rectangulaires.

Les projections de A et B sur le plan de xy ont pour équations

$A_1 \qquad \lambda(ax + b\lambda) = y, \qquad (2)$

$B_1 \qquad \mu(ax + b\mu) = y. \qquad (3)$

Pour avoir l'équation du cylindre que décrit ab, il suffit d'éliminer λ et μ entre (1) (2) et (3). Pour cela, je retranche membre à membre (2) et (3), on obtient

$$(\lambda - \mu)\,[ax + b(\lambda + \mu)] = 0$$

ou, en laissant de côté pour le moment la solution $\lambda - \mu = 0$,

$$\lambda + \mu = -\frac{ax}{b}.$$

La relation (1) donne d'ailleurs

$$\lambda\mu = -\frac{1}{a^2},$$

d'où $$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{2}{a^2}.$$

D'ailleurs, si j'ajoute (2) à (3) membre à membre

$$ax(\lambda + \mu) + b(\lambda^2 + \mu^2) = 2y. \qquad (4)$$

En portant dans cette équation les valeurs précédentes de $\lambda + \mu$ et $\lambda^2 + \mu^2$, on a : $y = \frac{b}{a^2}$.

La droite ab décrit un plan perpendiculaire à l'axe des y : ce plan coupe la surface suivant une hyperbole dont les équations sont $y = \frac{b}{a^2}$, $(ax + bz) = z\,\frac{b}{a^2}$.

Cette hyperbole a son centre sur l'axe des y.

Les asymptotes sont parallèles à Ox et OA, traces des plans directeurs sur le plan des zx.

Je reprends la solution $\lambda = \mu$.

La relation (1) donne

$$\mu = \lambda = \pm \frac{i}{a}.$$

L'équation (4) donne

$$y = \pm xi - \frac{b}{a^2}.$$

Ce qui représente deux plans imaginaires; leur droite d'intersection est verticale, et son pied sur le plan des xy a pour coordonnées $x = 0$, $y = -\frac{b}{a^2}$.

Les droites A et B sont confondues pour ces valeurs de λ et μ, elles se projettent suivant les droites

$$\left(y + \frac{b}{a^2}\right)^2 + x^2 = 0.$$

Ces droites appartiennent aux directions asymptotiques d'une sphère; on peut considérer chacune de ces droites comme perpendiculaires sur elles-mêmes, le lieu des pieds des perpendiculaires communes sera ces droites elles-mêmes.

On aurait pu trouver cette solution singulière par la géométrie, en remarquant que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole se compose de la directrice et des deux droites isotropes menées par le foyer.

On peut vérifier facilement que la droite $y = \frac{b}{a^2}$ et le point $x = 0$, $y = -\frac{b}{a^2}$ sont la directrice et le foyer de la parabole de contour apparent dont l'équation est

$$a^2x^2 + 4by = 0.$$

Dans cette discussion, j'ai supposé a et $b \gtrless 0$; si $a = 0$, la surface est un cylindre parabolique; il n'y a plus de problème.

Si $b = 0$, la surface est un hyperboloïde équilatère, les droites A_1 et B_1, au lieu d'envelopper une parabole, passent par un point fixe qui est le sommet de la surface. Les équa-

2° On fait varier m, et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en B à l'hyperbole et à l'asymptote AR.

3° On considère le cercle circonscrit au triangle AOB; ce cercle coupe l'hyperbole H aux points O et B, et en deux autres points P et Q. Former l'équation de cette droite PQ; puis, faisant varier m, trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite PQ avec les parallèles menées par le point O, soit à l'asymptote AR, soit à la seconde asymptote de l'hyperbole H.

Géométrie descriptive.

Une sphère donnée, dont le rayon est égal à $0^m,090$, touche les deux plans de projection à $0^m,100$ du bord gauche du cadre. Dans le plan du petit cercle de front, distant de $0^m,120$ du plan vertical de projection à la droite du centre de ce cercle, et à une distance de ce centre égale à la moitié du rayon du même petit cercle, on mène une verticale; sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection, on construit un triangle équilatéral; ce triangle, en tournant autour de cette verticale, engendre un double cône; on demande de représenter la sphère donnée, supposée pleine et opaque, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le double cône.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne commune à la sphère et à l'un des cônes, et la tangente en ce point.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Biandsutter, professeur à Lucerne, une solution fort simple de la question n° 159; nous croyons devoir signaler cette solution ici.

Le problème proposé était celui-ci : *Par quatre points donnés, faire passer quatre droites, de façon que la figure formée soit un carré.*

L'auteur de la solution que nous signalons s'appuie sur la proposition suivante qu'il est très facile de vérifier : *Deux droites rectangulaires menées dans le plan d'un carré, sont telles que les portions de chacune de ces droites comprises entre deux côtés opposés du carré sont égales.*

D'après cela rien n'est plus facile que de trouver un cinquième point du carré, situé sur l'un des côtés. Appelons α, β, γ, δ les quatre points donnés α et γ étant sur deux côtés opposés, β et δ sur les deux autres; si par α et γ je mène une droite et que par β je mène une perpendiculaire à $\alpha\gamma$, sur laquelle je prends $\beta\delta'$ égal à $\alpha\gamma$, le point δ est un point du côté qui passe par δ; donc en menant $\delta\delta'$, et par β une parallèle à cette droite, puis par α et γ des perpendiculaires à $\delta\delta'$, on aura le carré cherché. Il est facile de voir que le problème est déterminé tant que δ n'est pas confondu avec δ'.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

258. — Dans le triangle ABC, on mène les deux bissectrices AA′ et BB′, qui coupent les côtés opposés respectivement en A′ et B′, et se rencontrent en O; démontrer la relation

$$\frac{AA' \cdot OB'}{BB' \cdot OA'} = \frac{AC}{BC}.$$

(Reidt.)

259. — On donne une circonférence O, et un point fixe A dans son plan; on joint le point A à un point quelconque B de la circonférence; la bissectrice intérieure de l'angle AOB rencontre la droite AB en un point M dont on demande le lieu lorsque le point B décrit la circonférence. Ce lieu rencontre le diamètre en P; démontrer que, C étant le point de la circonférence le plus voisin de A sur la droite OA, les quatre points O, C, P, A forment une division harmonique.

(Launoy.)

260. — On joint un point fixe A intérieur à une circonférence, à un point quelconque B de la courbe; on prend sur AB un point M tel que $\frac{AM}{AB} = K$. On joint chacune des extrémités du diamètre qui passe par le point A aux points M et B; ces droites se rencontrent en deux points M et N′ autres que A et B. Démontrer : 1° que la ligne NN′ partage MB en deux parties dont le rapport est constant; 2° que la ligne qui joint les milieux de MB et de NN′ passe par le centre de la circonférence donnée; enfin, trouver le lieu des points N et N′. *(Launoy.)*

261. — On donne une circonférence O et deux points A et B dans son plan; on prend sur AB le point fixe C tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{a}{b}$. On prend un point P quelconque sur la circonférence, et on le joint au point B; on prolonge BP jusqu'à D de telle sorte que $\frac{DP}{DB} = \frac{p}{q}$; on demande le lieu du

point de rencontre des deux droites AP et CD lorsque P décrit la circonférence donnée.

Mathématiques spéciales.

262. — Résoudre et discuter, dans les diverses hypothèses que l'on peut faire, le système des trois équations

$$x^n + y^n + z^n = a^n$$
$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = b^{2n}$$
$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = c^{3n}$$

263. — Établir la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation du sixième degré complète pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

264. — Démontrer que, lorsque n est un entier supérieur à 5, on a la double inégalité

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

265. — Étant donnée la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

on mène en un point M de cette courbe une tangente qui rencontre les axes de coordonnées en A et B. On achève le rectangle ayant pour côtés OA et OB; soit M' le sommet opposé à O. On propose de trouver le lieu décrit par ce point M' quand M décrit la courbe donnée.

Cela fait, on projette un point quelconque de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = 1$$

sur les axes en C et D, on joint le point C au point D, et on propose de trouver immédiatement l'enveloppe des droites telles que CD.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 17970-0.

NOTE

SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES

Dans la note suivante, nous nous proposons d'indiquer, d'après un mémoire dû à M. *A. Boucher* (*), quelques propriétés des périodes, lorsque la fraction ne se réduit pas exactement en décimales; nous examinerons également le moyen de trouver rapidement le nombre de chiffres de la période d'après la forme du dénominateur de la fraction irréductible considérée. La connaissance de ces propriétés peut être d'une grande commodité lorsque l'on veut réduire en décimales des fractions dont le dénominateur est un peu considérable.

1. — Supposons que nous ayons à réduire en décimales la fraction $\frac{1}{N}$. Poussons l'opération de façon à avoir k chiffres décimaux au quotient; appelons x le quotient, abstraction faite de la virgule, y le reste, on a identiquement

$$1 = N \cdot \frac{x}{10^k} + \frac{y}{10^k}.$$

On en tire facilement

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x}{10^k}}{1 - \frac{y}{10^k}},$$

c'est-à-dire que la fraction considérée est équivalente à la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{x}{10^k}$, et dont la raison est $\frac{y}{10^k}$. Par suite, il nous sera souvent facile, connaissant les k premiers chiffres décimaux de la fraction, d'en obtenir autant que

(*) *Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales par un procédé nouveau, et nouvelles propriétés des périodes*, par M. Aug. Boucher, professeur au lycée d'Angers. - 1857.

nous voudrons ; il nous suffira de multiplier $\frac{x}{10^k}$ successivement par les différentes puissances de $\frac{y}{10^k}$, et d'ajouter les résultats. Cela pourra présenter un très grand avantage si y est un nombre simple. Prenons l'exemple suivant, emprunté au mémoire de M. Boucher (*).

Soit à réduire en décimales la fraction $\frac{1}{83}$; après avoir trouvé trois chiffres décimaux, nous obtenons comme reste 4 ; le quotient étant 0,012, on a

$$\frac{1}{83} = \frac{0{,}012}{1 - 0{,}004}.$$

Calculons les divers termes de la progression, nous aurons

0,012
0,000048
0,000000192
0,000000000768
0,000000000003072
0,000000000000012288

En ajoutant, et en supprimant les deux derniers chiffres, nous aurons, avec seize chiffres, la fraction décimale

0,0120481927710843.

On voit donc que si l'on arrive à un reste simple, il est très facile de trouver autant de chiffres que l'on veut ; on n'a du reste pas besoin d'écrire les zéros qui sont à gauche ; il suffira, quand on fait un produit, d'en placer le premier chiffre k rangs à droite du premier chiffre du produit précédent.

2. — Nous allons maintenant partir de cette manière de considérer la fraction décimale périodique pour étudier quelques propriétés des périodes ; mais, avant tout, nous allons donner quelques définitions.

Lorsque deux nombres contenant autant de chiffres donneront une somme composée exclusivement de chiffres 9, nous dirons que ces deux nombres sont *complémentaires*.

(*) *Loco cit.*, p. 8.

Lorsque une période sera formée de deux nombres complémentaires placés à la suite l'un de l'autre, nous l'appellerons période *complète* (*).

3. — Considérons la fraction irréductible $\frac{1}{N}$; soit p la période, D le dénominateur formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période; on a donc

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{D};$$

il est facile de voir que p possède les propriétés suivantes :

D'abord, D est toujours divisible par 9, et par suite, si N est premier avec 3, p doit être divisible par 9. C'est en particulier ce qui arrivera si N est premier, autre que 3.

Si D a un nombre pair de chiffres, il est divisible par 11, et par suite, si N est premier avec 11, p doit être divisible par 11.

En général, p doit contenir tous les facteurs premiers de D qui ne se trouvent pas dans N.

Il est facile de voir que, si l'on a inversement

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{D},$$

p étant plus petit que D sera la période, car on a

$$D = 10^k - 1,$$

donc

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{p}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}}.$$

On voit donc bien que la fraction est égale à la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{p}{10^k}$, et la raison $\frac{1}{10^k}$. Elle s'écrira donc très facilement, en prenant p pour période.

De même, en prenant un nombre a, inférieur à N,

(*) Nous préférons ce mot *période complète* au nom de *période mixte* employé par M. Boucher, seulement parce que cette dernière dénomination pourrait induire en erreur les élèves, le mot de *fraction périodique mixte* ayant déjà une signification différente dans les cours.

on a $$\frac{a}{N} = \frac{ap}{D},$$
et ap est inférieur à D; ap est donc la période correspondant à la fraction $\frac{a}{N}$.

4. — Si, en réduisant la fraction $\frac{1}{N}$ en décimales, nous trouvons le reste $N - 1$, la période est complète.

En effet, dans ce cas on a, en supposant k chiffres décimaux avant le reste $N - 1$,
$$1 = \frac{Nx}{10^k} + \frac{N-1}{10^k}.$$
On en tire facilement
$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x+1}{10^k}}{1 + \frac{1}{10^k}}.$$

On voit que la fraction $\frac{1}{N}$ est la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $-\frac{1}{10^k}$; ou bien encore, elle est la différence entre deux progressions géométriques dont la première a pour premier terme $\frac{x+1}{10^k}$, et pour raison $\frac{1}{10^{2k}}$, et l'autre a pour premier terme $\frac{x+1}{10^{2k}}$, et pour raison $\frac{1}{10^{2k}}$; il est tres facile d'écrire ces deux progressions, la première commencera par $x + 1$, puis après on écrira k zéros, et le nombre $(x + 1)$, et k zéros, et ainsi de suite; la seconde commencera au contraire par k zéros, puis le nombre $(x + 1)$, puis k zéros, le nombre $(x + 1)$, etc.; on les partagera en groupes de $2k$ chiffres, à partir de la gauche, et en retranchant les groupes correspondants l'un de l'autre, on verra facilement que la période est complète.

5. — Plus généralement, si en réduisant la fraction $\frac{a}{N}$

en décimales, on trouve le reste $N - a$, la période est complète.

Pour le prouver, je vais démontrer que si j'appelle a, b, c ... les restes successifs, avant le reste $N - a$, on obtient les restes successifs $N - a$, $N - b$, $N - c$, ... et que les chiffres du quotient correspondant aux restes a et $N - a$, b et $N - b$, etc., ont respectivement pour somme 9.

En effet, soit f le chiffre du quotient obtenu en divisant $10a$ par N; on a $\quad 10a = Nf + b$.

Prenons le reste $N - a$; multiplions-le par 10, pour avoir un nouveau chiffre au quotient; on a identiquement

$$10(N - a) = 10N - 10a.$$

Remplaçons $10a$ par sa valeur, on a

$$10(N - a) = N(9 - f) + N - b;$$

donc, lorsque nous arrivons à un reste $N - a$, le reste suivant est bien $N - b$, et la somme des deux quotients correspondants est bien 9.

6. — Si la fraction $\frac{a}{N}$ est irréductible, le nombre des chiffres de sa période est le même que celui de la période correspondant à $\frac{1}{N}$.

D'abord, de l'égalité $\frac{a}{N} = \frac{ap}{D}$,
on déduit, comme nous l'avons vu, que la période correspondant à $\frac{a}{N}$ ne peut pas avoir plus de chiffres qu'il n'y a de 9 dans D, et, par conséquent, pas plus de chiffres que la période correspondant à $\frac{1}{N}$; mais peut-il y en avoir moins? en d'autres termes, peut-on considérer ap comme formé de plusieurs périodes, telles que la fraction $\frac{4545}{9999}$, qui se réduit à $\frac{45}{99}$? Je dis que c'est impossible, car si l'on posait

$$\frac{a}{N} = \frac{p'}{D'},$$

comme la fraction $\frac{a}{N}$ est supposée irréductible, p' devrait

être divisible par a; on aurait donc $p' = aq$; d'où l'on tirerait facilement $\frac{1}{N} = \frac{q}{D'}$.

Donc $\frac{1}{N}$ ne contiendrait à sa période qu'un nombre de chiffres égal au nombre de 9 qu'il y a dans D', ce qui est contre l'hypothèse. Donc $D' = D$, et par suite $p' = ap$.

7. — Il résulte de cette proposition que, si N est un nombre premier, toutes les fractions plus petites que l'unité, et ayant pour dénominateur N, ont le même nombre de chiffres à la période.

8. — Si l'on considère la fraction $\frac{1}{N}$, que l'on réduit en décimales, et si h est l'un des restes obtenus dans cette opération, la fraction $\frac{h}{N}$ donnera naissance à une fraction périodique dont la période ne différera de la précédente que parce qu'on devra la supposer commençant à un chiffre autre que le premier.

Cela résulte évidemment de la manière même dont se fait la réduction d'une fraction en décimales.

Si, au contraire, h n'est pas l'un des restes obtenus en réduisant $\frac{1}{N}$ en décimales, la période correspondant à $\frac{h}{N}$ sera différente de la précédente, et aucun des restes obtenus dans cette réduction ne sera égal à l'un des restes fournis par la réduction de $\frac{1}{N}$ en décimales.

9. — Si N est un nombre premier, la réduction de la fraction $\frac{1}{N}$ en décimales donnera une période dont le nombre de chiffres sera $N - 1$ ou un sous-multiple de $N - 1$.

D'abord, il est bien évident que le nombre de chiffres de la période ne peut pas dépasser $N - 1$, car il ne peut pas y avoir plus de $N - 1$ restes différents, et par suite, après la $(N - 1)^e$ division au plus, nous retrouverons le reste 1; nous aurons ainsi obtenu, au quotient, tous les chiffres de la période.

En second lieu, il peut arriver que le reste 1 se reproduise après p divisions, p étant inférieur à $N - 1$; alors, la période n'aura que p chiffres ; et, en vertu de ce que nous avons dit plus haut (7), toutes les fractions inférieures à l'unité ayant N pour dénominateur donneront lieu à des périodes de p chiffres. Cela posé, prenons la fraction $\frac{a}{N}$, moindre que l'unité ; en admettant que a ne soit pas un des restes fournis dans la réduction en décimales de la fraction $\frac{1}{N}$, la période correspondant à $\frac{a}{N}$ sera différente de la période correspondant à $\frac{1}{N}$, et donnera lieu à p restes différents de ceux que l'on a obtenus précédemment ; il est facile de voir de la même manière que les $N - 1$ nombres inférieurs au dénominateur pourront ainsi se classer en groupes contenant p nombres, et par suite p sera un sous-multiple de $N - 1$. *(A suivre.)*

SUR LE PARTAGE DES POLYGONES

Par M. **Maurice d'Ocagne**.

En novembre 1878, je donnais dans ce journal (*) la solution géométrique d'un problème dont on ne connaissait jusqu'alors qu'une solution approximative (**) et seulement applicable aux opérations pratiques de l'arpentage, puisqu'elle exige des évaluations numériques de surface.

Ce problème est le suivant :

Par un point donné sur le périmètre d'un polygone quelconque, mener une droite qui divise la surface de ce polygone en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

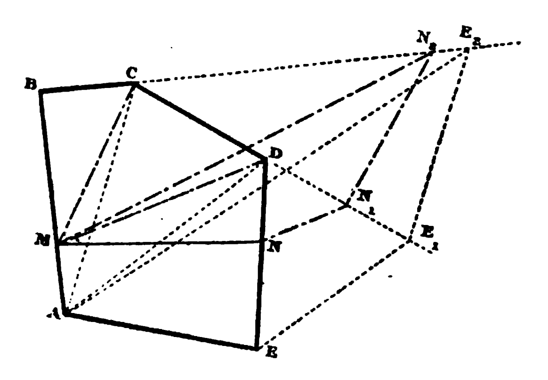
(*) T. II, p. 332.
(**) Voir *Arpentage, levé des plans et nivellement*, par F. J. O. P., p. 79.

J'ai fait voir dans la note en question par quel procédé géométrique le problème pouvait toujours être ramené de proche en proche au cas du triangle.

Mais pour cela je considérais toute la suite des polygones intermédiaires entre le polygone proposé et le triangle équivalent. La présente note a pour but de faire voir comment on peut supprimer toute cette suite de polygones et effectuer directement la construction pour un *polygone absolument quelconque*. Cette simplification considérable permet de résoudre facilement le problème dans tous les cas.

Auparavant, je tiens à indiquer la construction géométrique à effectuer dans le cas du triangle, que j'avais oublié dans ma première note.

Si M est le point donné sur le côté AC du triangle ABC, je porte sur ce côté à partir du point C, et à la suite l'une de l'autre deux longueurs CP, PQ proportionnelles à *m* et à *n*. Je tire MB; par A je mène à MB la parallèle AL qui coupe CB en L; je tire LQ; par P je mène à LQ la parallèle PN qui coupe BC en N; MN est la droite cherchée; il résulte, en effet, de cette construction que CN a la longueur déterminée pour ce segment (t. II, p. 133).



Voyons maintenant comment se résout la question pour un polygone quelconque. Je vais, pour simplifier les raisonnements, exposer la solution pour un pentagone; mais on verra facilement que cette solution est absolument générale.

Soit le point M donné sur le côté AB du pentagone ABCDE. Je vais transformer directement ce pentagone en un triangle équivalent ayant en commun avec lui le côté AB. Pour cela, je proposerai la construction suivante : tirer AD et AC; par E mener, à AD, la parallèle EE_1, qui coupe CD en E_1, et par E_1, à AC, la parallèle E_1E_2, qui coupe BC en E_2. On voit facilement que ABCDE est équivalent à $ABCE_1$, qui lui-même est équivalent à ABE_2, en considérant deux à deux ces figures comme formées d'une partie commune et de triangles équivalents.

Par la construction indiquée plus haut, je détermine la droite MN_2 divisant la surface du triangle ABE_2 dans le rapport donné. Puis je tire MC et MD; par N_2 je mène à MC la parallèle N_2N_1 qui coupe CD en N_1; par N_1, à MD, la parallèle N_1N qui coupe DE en N; MN est la droite cherchée. On voit en effet, comme précédemment, que MBCDN est équivalent à MBN_2.

Si MN_2 avait rencontré BC entre les points B et C, le problème se fût terminé là; de même N_2N_1 aurait pu rencontrer CD entre les points C et D; mais il pourrait aussi se faire que N_1N ne rencontrât DE que sur son prolongement; dans ce cas, on n'aurait qu'à mener par N, à ME, une parallèle qui couperait AE en P; MP serait alors la droite cherchée.

On voit que cette construction très symétrique, très facile à retenir, est la même, quel que soit le polygone considéré; elle résout donc d'une manière simple le problème dans toute sa généralité.

NOTE SUR LES IRRATIONNELLES

Par M. **Desmons**, professeur au Lycée Blaise Pascal, à Clermont.

1. — La racine carrée d'un nombre entier qui n'est pas [u]n carré parfait se définit généralement en disant qu'elle [e]st la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées, par [d]éfaut et par excès, de la racine à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, etc. Il faudrait

faire voir que, en prenant la racine carrée à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ ..., on obtient en général des racines par défaut de plus en plus grandes, et des racines par excès de plus en plus petites.

On regarde cette proposition comme évidente; il serait bon, toutefois, de montrer qu'il en est ainsi, et que les racines carrées par défaut croissent ou restent stationnaires, mais ne diminuent jamais, tandis que les racines carrées par excès décroissent ou restent stationnaires, mais n'augmentent jamais.

2. — Soit A un nombre entier et soit *m* sa racine carrée à une unité près, de sorte que l'on a :

$$A = m^2 + R,$$

R désignant le reste de l'opération.

Si $\frac{x}{n}$ désigne la racine carrée de A à $\frac{1}{n}$ près, on doit avoir

$$x^2 < n^2(m^2 + R) < (x + 1)^2.$$

Cette double inégalité fait voir :

1° Que la racine $\frac{x}{n}$ est *au moins* égale à *m*.

2° Que la racine $\frac{x+1}{n}$ est *au plus* égale à $m + 1$, car $x + 1$ ne peut être supérieur à $(m + 1)n$; s'il en était ainsi, $x + 1$ serait au moins égal à $mn + n + 1$, et par suite, la racine par défaut serait au moins $(m + 1)n$, ce qui revient à dire que A serait supérieur au carré de $m + 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

3. — Pour qu'on approche de plus en plus de la racine, il faut que l'on ait : $x > mn$

et $(x + 1) < (m + 1)n$,

c'est-à-dire $mn < x < mn + n - 1$.

Or, x désignant la racine carrée de An^2 à une unité près, et, d'après la double inégalité précédente, devant être supérieur à mn, on devra avoir

car alors si

$$n^2 R \geq 2mn + 1;$$

$$n^2 R > 2mn,$$

on aura :

$$An^2 = n^2(m^2 + R) \geq n^2m^2 + 2mn + 1 \geq (mn + 1)^2.$$

La racine par défaut sera au moins égale à $mn + 1$, et, par suite, supérieure à mn.

D'ailleurs, si $n^2R < 2mn(n-1) + (n-1)^2$,
alors

$$A < m^2n^2 + 2mn(n-1) + (n-1)^2 < (mn + n - 1)^2 :$$

la racine par défaut sera donc inférieure à $mn + n - 1$.

En réunissant les deux conditions précédentes dans une double inégalité, on obtient :

$$2mn < n^2R < (n-1)[2mn + n - 1];$$

telles sont les conditions cherchées.

4. — En remplaçant n par 10, on trouve les conditions

$$20m < 100R < 9(20m + 9);$$

si ces deux conditions sont remplies, les deux racines vont constamment l'une en augmentant, l'autre en diminuant, et par conséquent se rapprochent l'une de l'autre.

Ces expressions $20m$ et $9(20m + 9)$ sont aisées à former : car on a dû former le double de la racine, et l'expression $9(20m + 9)$ n'est autre que le résultat qui devrait être effectué si l'on avait le chiffre 9 à essayer.

On pourrait d'ailleurs trouver de suite les conditions précédentes, en remarquant que le second chiffre de la racine doit être au moins 1, et au plus 9 ; donc le quotient de 10R par le double de la racine doit être supérieur à 1, c'est-à-dire $100R > 20m$, et le reste suivi comme on sait de deux zéros, ou 100R, doit être en outre plus petit que le double produit de la racine, exprimant ici des dizaines, par le chiffre 9, augmenté du carré de ce chiffre ; ou $100R < 20m \times 9 + 9^2$, ce qui fournit bien la seconde condition.

Exemples. — *Racine carrée de 3.* — Soient R_1, R_2, $R_3, \ldots$, les restes successifs ; on a

$$R_1 = 2;\ R_2 = 11;\ R_3 = 71;\ R_4 = 176.$$

On obtient

$$20 < 200 < 9.29$$
$$340 < 1100 < 9.349$$
$$3460 < 7100 < 9.3469$$
$$34640 < 17600 < 9.34649.$$

La première condition n'est pas remplie dans cette dernière inégalité, et en effet on a

$$\sqrt{3} = 1{,}73205,$$

et, si l'on prend les deux racines par défaut,

$$1{,}732 \text{ et } 1{,}7320,$$

elles sont égales.

Racine carrée de 6. — Ici, $R_1 = 2$; $R_2 = 24$; $R_3 = 464$; $R_4 = 2399$.

On obtient

$$40 < 200 < 9.49$$
$$480 < 2400 < 9.489$$
$$4880 < 46400 < 9.4889;$$

dans cette dernière inégalité, la seconde condition n'est pas remplie, et deux racines par excès sont stationnaires; en effet

$$\sqrt{6} = 2{,}449;$$

les deux racines par excès

$$2{,}45 \text{ et } 2{,}450$$

sont égales.

5. — *Racines cubiques.* On peut appliquer, sans qu'il soit besoin d'entrer dans de grands développements, ce qui précède à la racine cubique.

On trouvera sans peine la double condition

$$3m^2n^2 + 3mn < n^3R < [3m^2n^2 + 3mn(n - 1) + (n - 1)^2](n - [illegible]$$

et si l'on fait $n = 10$, on a

$$300m^2 + 30m < 1000R < (300m^2 + 30m\,9 + 9^2)9.$$

Ces expressions ont dû être formées dans l'extraction de la racine.

Exemple. — *Racine cubique de 2.* — On a $R_1 = 1$; $R_2 = 27$[illegible]; $R_3 = 46875$; $R_4 = 4383021$.

Les conditions sont

$$330 < 1000 < 9\,(300 + 30.9 + 9^2)$$
$$43200 + 360 < 272000 < 9\,(43200 + 360.9 + 9^2)$$
$$4687500 + 3750 < 46875000 < 9\,(4687500 + 3750.9 + [illegible]$$

La dernière partie de cette double inégalité n'est pas vérifiée; en effet $\sqrt[3]{2} = 1{,}259$

et on obtient deux racines cubiques par excès qui sont égales, savoir $1{,}26$ et $1{,}260$.

6. — On peut suivre ensuite pour définir $\sqrt{A}$ ou $\sqrt[3]{A}$ [illegible]

raisonnements connus, et montrer, comme le fait M. Bourget en toute rigueur dans son *Arithmétique*, que la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées de la racine, par défaut et par excès, est indépendante du mode d'approximation adopté.

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

RELATIVES AUX ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE

(*Suite*, voir page 297 et suiv.)

---

25. — Les triangles semblables BHC, BA′B′ donnent

$$\frac{h'_c}{c_1} = \frac{a}{h_b};$$

de même, les triangles semblables C′HB′, BA′B′ donnent

$$\frac{h''_c}{p_a} = \frac{a_1}{h_b}.$$

On chasse les dénominateurs, on ajoute membre à membre et l'on a

$$h_b\, h_c = ac_1 + a_1 p_a.$$

De même, la comparaison des triangles semblables BHC, C′AC′ d'une part, C′HB′, C′A′C d'autre part, donne facilement par une méthode analogue

$$h_b\, h_c = ab_1 + a_1 q_a.$$

Par suite, en ajoutant membre à membre, et remarquant que l'on a

$$p_a + q_a = a,$$

on a

$$2h_b\, h_c = a(a_1 + b_1 + c_1).$$

Donc, en multipliant par $\frac{h_a}{2}$, et posant

$$a_1 + b_1 + c_1 = 2p_1,$$

on a

$$h_a\, h_b\, h_c = 2Sp_1.$$

26. — On a, d'après la formule que nous venons de trouver,

$$h_b\, h_c = ap_1.$$

On trouverait de même

$$h_c\, h_a = bp_1$$

$$h_a\, h_b = cp_1$$

Donc, en ajoutant, on aura

$$h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c = (a + b + c)p_1 = 2pp_1.$$

27. — On sait que l'angle A' est le supplément du double de l'angle A, et que le rayon du cercle des neuf points est la moitié du rayon du cercle circonscrit; on en déduit

$$a_1 = \mathrm{R} \sin 2\mathrm{A} = a \cos \mathrm{A}$$
$$b_1 = \mathrm{R} \sin 2\mathrm{B} = b \cos \mathrm{B}$$
$$c_1 = \mathrm{R} \sin 2\mathrm{C} = c \cos \mathrm{C}$$

Ajoutons membre à membre, on trouvera

$$a_1 + b_1 + c_1 = a \cos \mathrm{A} + b \cos \mathrm{B} + c \cos \mathrm{C}.$$

Mais on a

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = \frac{2p}{\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}};$$

donc on aura

$$2p_1 = p \frac{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}{\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}}.$$

Comme les angles A, B, C sont les angles d'un triangle, la fraction qui est au second membre se réduit à

$$8 \sin \frac{\mathrm{A}}{2} \sin \frac{\mathrm{B}}{2} \sin \frac{\mathrm{C}}{2};$$

donc $$p_1 = 4p \sin \frac{\mathrm{A}}{2} \sin \frac{\mathrm{B}}{2} \sin \frac{\mathrm{C}}{2}.$$

RELATIONS DIVERSES

En appelant R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit et r', r'', r''' les rayons des cercles ex-inscrits tangents respectivement aux côtés a, b, c; et conservant en outre les autres notations indiquées précédemment nous aurons les relations suivantes :

28. — On a $$r'' = \frac{\mathrm{S}}{p - b}; \quad r''' = \frac{\mathrm{S}}{p - c},$$

par suite $$r''r''' = \frac{\mathrm{S}^2}{(p - b)(p - c)} = p(p - a),$$

de même $$rr' = (p - b)(p - c);$$

on en tire alors $$r''r''' - rr' = 2p^2 - 2pa - bc$$

ou bien $$r''r''' - rr' = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

Mais nous avons vu précédemment (n° 20) que l'on a

$$h_a h'_a = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2);$$

donc on a $r''r''' - rr' = h_a h'_a$.

On aurait deux autres formules analogues, et en ajoutant on trouverait

$$r'r'' + r''r''' + r'''r' - rr' - rr'' - rr''' = h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

29. — Les formules qui donnent les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits donnent facilement la formule

$$rr'r''r''' = S^2.$$

D'autre part, on a $R = \frac{abc}{4S}$.

Multipliant les deux membres de cette dernière égalité par $\frac{h_a h_b h_c}{2}$, on trouve facilement après réduction

$$\frac{R h_a h_b h_c}{2} = S^2.$$

En comparant cette égalité avec celle précédemment obtenue, on a la relation

$$\frac{r'r''r'''}{h_a h_b h_c} = \frac{R}{2r}.$$

30. —Nous avons vu plus haut (n° 26) que l'on avait la relation

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = 2pp_1;$$

d'autre part on sait aussi que

$$S = Rp_1 = rp.$$

Cette dernière relation nous donne

$$\frac{p^2}{2pp_1} = \frac{R}{2r}.$$

En remplaçant $2pp_1$ par sa valeur, il vient

$$\frac{p^2}{h_a h + h_a h_c + h_b h_c} = \frac{R}{2r}.$$

31. — D'autre part, il est facile de reconnaître que l'on a

$$r'r'' + r''r''' + r'''r' = p^2.$$

Donc en remplaçant p^2 par sa valeur dans la formule que

nous venons de trouver, et comparant l'égalité ainsi écrite à celle de l'article précédent, nous trouvons

$$\frac{r'r''r'''}{h_a h_b h_c} = \frac{r'r'' + r'r''' + r'''r'}{h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c}.$$

32. — On a $a h_a = b h_b = c h_c = 2pr = 2S.$

On en tire immédiatement

$$h_a h_b h_c = \frac{(a + b + c)^3}{abc} r^3.$$

33. — La formule bien connue

$$r' + r'' + r''' - r = 4R$$

nous donne, en élevant les deux membres au carré et tenant compte de la formule donnée au n° 29,

$$r'^2 + r''^2 + r'''^2 + r^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Mais d'autre part on a

$$h'^2_a = 4R^2 - a^2$$
$$h'^2_b = 4R^2 - b^2$$
$$h'^2_c = 4R^2 - c^2$$

Ajoutons membre à membre, nous aurons

$$h'^2_a + h'^2_b + h'^2_c = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

On en tire facilement

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 4R^2 + h'^2_a + h'^2_b + h'^2_c.$$

34. — Nous avons vu (n° 27) que l'on avait la relation

$$p_1 = 4p \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

Multiplions les deux membres par R, et remplaçons p_1R par son égal pr; nous aurons la formule

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

On aurait de même

$$p_1 = 4(p - a) \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2};$$

en multipliant par R les deux membres et remplaçant p_1R par son égal $(p - a) r'$, on a

$$r' = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

On trouvera également

$$r'' = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$r' = 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

35. — En ajoutant membre à membre ces trois dernières formules, on trouve

$$r' + r' + r''' = 2R\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right)$$
$$= 3R + R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

36. — On trouverait facilement en prenant les rayons deux à deux, les égalités suivantes :

$$r + r' = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2}$$

$$r' + r'' = 4R \cos^2 \frac{C}{2},$$

et aussi $\quad r' - r = 4R \sin^2 \frac{A}{2}$

$$r' - r' = 4R \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

et les formules analogues.

On en déduit immédiatement

$$r' + r'' + r''' - 3r = 4R\left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}\right)$$

et aussi

$$3r + r' + r'' + r''' = 4R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

QUESTION 208

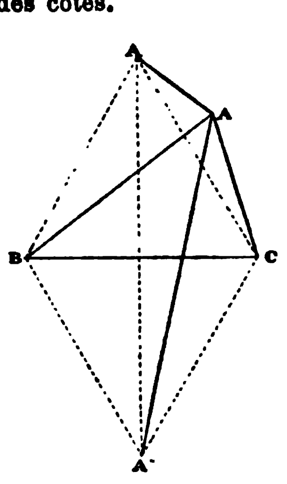
Solution par M. V.-M. Arnaud, élève du Lycée de Nice.

Soit ABC *un triangle; de part et d'autre de* BC *on construit les triangles équilatéraux* A'BC, A''BC; *soit* X *l'angle* A'AA''. *Soient de même* Y *et* Z *les angles obtenus de la même façon en prenant les autres côtés. On a la relation*

$$\cos X + \cos Y + \cos Z = 0.$$

(E. Lemoine.)

Soit m^2 l'aire du triangle ABC, et $2k^2$ la somme des carrés des côtés.



On a d'abord

$$\cos X = \frac{AA'^2 + AA''^2 - A'A''^2}{2AA' \times AA''};$$

on a, d'autre part, d'après un théorème connu,

$$AA'^2 + AA''^2 = 2k^2;$$

$$AA'' = \sqrt{k^2 + 2m^2\sqrt{3}};$$

$$AA' = \sqrt{k^2 - 2m^2\sqrt{3}}.$$

Donc

$$AA' \times AA'' = \sqrt{k^4 - 12m^4}.$$

Enfin $A'A''^2 = 3a^2$.

Donc

$$\cos X = \frac{2k^2 - 3a^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}}.$$

On aurait de même

$$\cos Y = \frac{2k^2 - 3b^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}},$$

$$\cos Z = \frac{2k^2 - 3c^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}}.$$

En faisant la somme il vient

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{6k^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}}$$

$$= \frac{6k^2 - 6k^2}{2\sqrt{k^4 - 12m^4}} = 0.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Heurtaux, Externat des étudiants nantais; Raymondier, Pensionnat Saint-Louis à Saint-Etienne; Payeur, Collège de Verdun; Huet, à Orléans; Wittenmayer, à Vendôme.

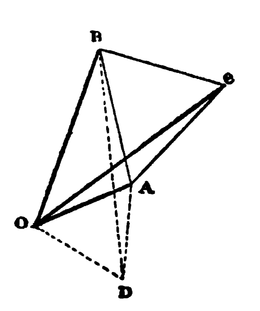
QUESTION 222

Solution par M. d'Ocagne, du Lycée Fontanes.

Mener par un point trois droites de longueurs données telles que leurs extrémités soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Soient OA, OB, OC les droites cherchées.

Construisons sur OA le triangle équilatéral OAD et joignons BD. Les triangles BAD et OAC sont égaux : car AB = AC, AD = OA et BAD = 60° + OAB = OAC. Par suite BD = OC.



D'où la solution : On construit le triangle OBD ayant pour côtés les trois longueurs données, puis on mène OA faisant avec OD un angle de 60° et sur laquelle on prend OA = OD. On achève alors le triangle équilatéral ABC et on tire OC.

Le problème sera possible si l'on peut construire avec les trois droites données le triangle OBD.

Nota : Ont résolu la même question : MM. Bois, du lycée de Montauban; Marin, à Agen; Huet, à Orléans; Billier et Simon, à Lons-le-Saulnier; Joly, à Tarbes; Bonneville, à Toulouse; Heurtaux, à Nantes; Roubault, à Melun; Renault, à Bordeaux; H. Bourget, à Aix; Malcor, Lacan, à Toulon; Lachesnais, à Versailles.

QUESTION 223

Solution par M. P. Chrétien, élève au Lycée du Havre.

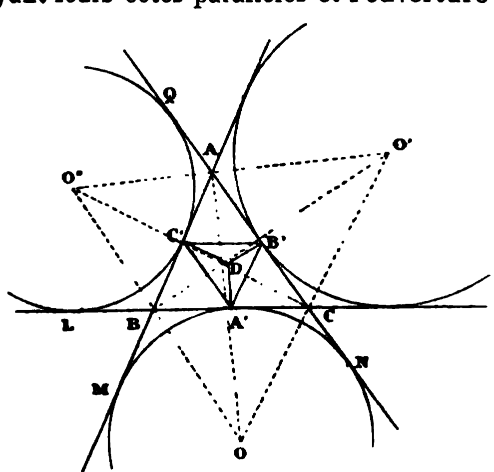
Les six axes radicaux des quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle pris deux à deux sont les bissectrices des angles du triangle formé en joignant les milieux des côtés.

Soit ABC un triangle; OO'O″ les centres des cercles exinscrits, M, N les points de contact des côtés AB, AC avec le cercle O. Si 2μ est le périmètre du triangle ABC, on a AM = AN = μ.

De même si L et Q sont les points de contact de O″ avec BC et AC, on a CL = CQ = μ. Donc AN = CQ, par suite CN = AQ et B' étant le milieu de AC, nous aurons B'N = B'Q.

B' est donc un point de l'axe radical des deux cercles O et O″. Cet axe radical est perpendiculaire à OO″, ligne

des centres, par suite parallèle à BO'. Joignons A'B'C' milieux des côtés du triangle ABC. B'D est bissectrice de l'angle A'B'C', car les angles A'BC' et A'B'C' sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et l'ouverture dirigée en



sens contraire et de plus BO' est la bissectrice de ABC. De même les axes radicaux A'D, C'D sont les bissectrices des angles C'A'B' et A'C'B'. Le point D est donc le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, du Lycée Henri IV ; Monterou, à Pau ; Deslais, au Mans ; Heurtaux, à Nantes ; Callon, Lycée Louis-le-Grand ; Bénard, à Châteauroux.

QUESTION 225

Solution par M. Louis SICARD, élève du Lycée de Lyon.

Trouver le plus grand des triangles inscrits dans un cercle donné, pour lesquels la différence de deux angles est constante.

Soit ABC l'un de ces triangles inscrits dans un cercle de rayon R. Soit S sa surface, on a

$$S = \frac{ac \sin B}{2}$$

avec $B - C = \omega$.

Or, $a = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

Dès lors $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$;

mais $2 \sin B \sin C = \cos (B - C) - \cos (B + C)$;

dès lors $S = R^2 \sin A (\cos \omega + \cos A)$.

On a donc à chercher le maximum de

$$\sin A (\cos \omega + \cos A),$$

lequel a lieu en même temps que celui de

$$\sin^2 A (\cos \omega + \cos A)^2$$

ou de $(1 + \cos A)(1 - \cos A)(\cos \omega + \cos A)^2$.

Cette expression sera maximum lorsque l'on aura

$$\frac{1}{1 + \cos A} - \frac{1}{1 - \cos A} + \frac{2}{\cos \omega + \cos A} = 0;$$

d'où $2 \cos^2 A + \cos \omega \cos A - 1 = 0$

et $$\cos A = \frac{- \cos \omega \pm \sqrt{8 + \cos^2 \omega}}{4}$$

Les deux valeurs que l'on trouve pour cos A sont réelles. Voyons si elles conviennent toutes les deux.

Un cosinus devant toujours être compris entre $+1$ et -1, on posera

$$\frac{- \cos \omega + \sqrt{8 + \cos^2 \omega}}{4} \leq 1; \qquad (1)$$

d'où $\cos \omega \geq - 1$:

cette solution (1) est toujours admissible.

Si l'on pose

$$\frac{- \cos \omega - \sqrt{8 + \cos^2 \omega}}{4} \geq - 1, \qquad (2)$$

on en tire $\cos \omega \leq 1$:

cette seconde solution (2) est également admissible. Il y aura donc deux valeurs de l'angle A pour lesquelles le triangle en question sera maximum.

Nota. — Ont résolu cette question : MM. Bois, de Montauban; Santel, de Perpignan; La Chesnais, à Versailles.

SUR LES TANGENTES AUX POINTS DOUBLES
DE L'INTERSECTION DES SURFACES

Par M. **Songaylo**, examinateur d'admission à l'École centrale des arts et manufactures.

Théorème. — *Lorsqu'une surface de révolution est tout à la fois touchée et coupée par un plan, le point de contact est un point double de la section.*

Soient *(fig. 1)* : z, z', les projections de l'axe supposé vertical ; μ', μ'_1 la projection verticale du méridien de

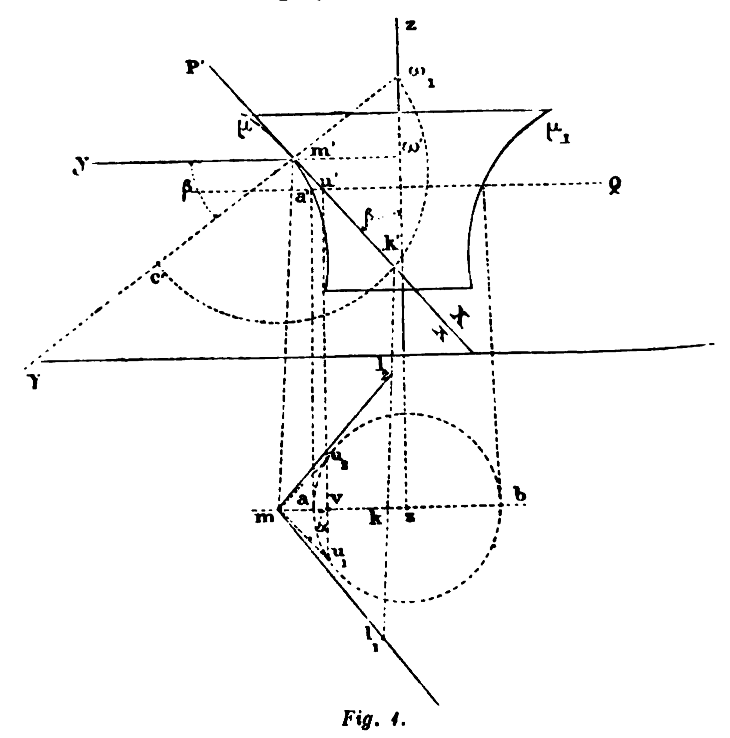


Fig. 1.

front ; m, m' le point de contact, amené, par une rotation autour de z, z' sur ce méridien de front.

La tangente P′, en m', à μ', est la trace verticale du plan tangent au point choisi ; nous l'adopterons pour axe des abscisses et nous prendrons pour axe des ordonnées la parallèle à la ligne de terre menée par m'. Tout d'abord, construisons par l'emploi d'un plan horizontal auxiliaire ayant Q′ pour trace verticale et voisin de m, m', deux points (u_1, u'), (u_2, u') de la section.

En faisant voir que la courbe d'intersection a deux tangentes en m, nous aurons par là même démontré que la courbe dans l'espace présente elle-même au point correspondant M deux tangentes, et que, par suite, ce point est double.

Pour ce but, tirons les droites mu_1, mu_2 ; désignons par v la rencontre des droites u_1u_2, mz et par α l'angle u_1mz. Lorsque le plan horizontal dont Q′ est la trace verticale se déplace en se rapprochant du point m, m', les points u_1, u_2 se déplacent également et se rapprochent de m; il s'ensuit que, à la limite, les droites mu_1mu_2 seront tangentes en m à la projection horizontale de la courbe étudiée. Pour déterminer les positions de ces tangentes, cherchons donc la limite de tang α.

On voit, immédiatement, que l'on a

$$\text{tang}\,\alpha = \pm\frac{u_1\,v}{mv}.$$

Désignons : par R_1, R les rayons des parallèles placés, respectivement, dans le plan horizontal auxiliaire et dans celui qui contient le point m, m' ; par a', x, y le point de rencontre de μ' avec Q′ et ses coordonnées ; par a, b les points de croisement du plan de front conduit par z, z' avec la projection horizontale du parallèle de rayon R_1, et enfin par β l'angle que fait P′ avec une verticale quelconque. Cela posé, on aura

$$u_1\,v = \sqrt{av\,.\,vb} = \sqrt{y\,(2R_1 - y)},$$
$$mv = x \sin\beta.$$

La substitution des valeurs de u_1v et de mv dans la première formule donne ensuite

$$\text{tang}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{y\,(2R_1 - y)}}{x \sin\beta}$$

ou bien

$$\text{tang}\,\alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{2R_1\frac{y}{x^2} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Lorsqu'on passe à la limite, R_1 tend vers R et le rapport $\frac{y}{x}$, qui n'est autre chose que le coefficient angulaire de la tangente menée par l'origine à la courbe μ', devient nul: on trouve donc

$$\lim \text{tang}\,\alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{2R \lim \frac{y}{x^2}}.$$

Tout se réduit actuellement à la recherche de la limite du rapport $\frac{y}{x^2}$.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe μ'; en développant son second membre par la formule de Mac-Laurin, on trouve

$$y = f(o) + \frac{x}{1}f'(o) + \frac{x^2}{1.2}f''(o) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^n(o)$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}f^{n+1}(\theta x), \qquad (1)$$

dans laquelle θ est une fraction proprement dite, inconnue.

Dans la présente question $f(o) = o$, $f'(o) = o$, puisque la courbe μ' touche l'axe des abscisses à l'origine; l'équation (1) se peut donc écrire

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1.2}f''(o) + \frac{x}{1.2.3}f'''(o) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots n}f^n(o) + \frac{x^{n-1}f^{n+1}(\theta x)}{1.2.3\ldots n(n+1)}$$

en faisant tendre x vers zéro, on trouve, en général,

$$\lim \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2}f''(o). \qquad (2)$$

La relation cherchée est donc

$$\lim \text{tang}\,\alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{R f''(o)}. \qquad (3)$$

En général $f''(o)$ n'est pas nul; donc, à cause du double signe compris dans la formule (3), m, m' est un point double de la section.

Les tangentes au point double, nous allons le faire voir

dans un instant, se déterminent facilement en construisant la limite de l'angle α ; mais, antérieurement, cherchons une interprétation géométrique de $f''(o)$.

L'équation de la ligne μ', dans le système xmy, peut s'écrire $x = \varphi(y)$: les fonctions f et φ étant inverses.

Conservons l'axe des abscisses et remplaçons celui des ordonnées par une perpendiculaire Y à $m'x$, menée par m' ; les formules de transformation donnent, en appelant X, Y les coordonnées nouvelles d'un point quelconque de la courbe μ', $x = \mathrm{X} + \mathrm{Y} \text{ tang } \beta$,

$$y = \frac{\mathrm{Y}}{\cos \beta};$$

donc, dans le nouveau système d'axes, l'équation de μ' est

$$\mathrm{X} = -\mathrm{Y} \text{ tang } \beta + \varphi\left(\frac{\mathrm{Y}}{\cos \beta}\right).$$

D'autre part, il est manifeste que le rayon de courbure de la courbe μ' en m', que nous désignerons par ρ, est égal à la limite de la sous-normale, comptée sur l'axe m'Y, et relative à un point de μ' qui, d'abord voisin de m', se rapprocherait de ce dernier et tendrait à se confondre avec lui. Nous désignerons par (x_1, y_1), $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)$ les coordonnées, prises respectivement dans chacun des systèmes d'axes, de ce point voisin ; l'équation correspondante de la normale à μ' sera alors $\mathrm{Y} - \mathrm{Y}_1 = -\mathrm{X}'_1(\mathrm{X} - \mathrm{X}_1)$,
et la sous-normale sera égale à

$$\mathrm{X}'_1 \mathrm{X}_1,$$

par suite, on aura $\rho = \lim (\mathrm{X}'_1 \mathrm{X}_1)$.

D'ailleurs, de l'équation de la courbe μ' dans le nouveau système d'axes, on tire

$$\mathrm{X}'_1 = -\text{tang } \beta + \varphi'(y_1) \frac{1}{\cos \beta};$$

la substitution de la valeur de X'_1 dans celle de ρ donne, puisque X_1 tend vers zéro,

$$\rho = \lim \left[\frac{1}{\cos \beta} \mathrm{X}_1 \varphi'(y_1)\right]$$

ou $$\rho = \frac{1}{\cos \beta} \lim \frac{\mathrm{X}_1}{f'(x_1)}$$

ou encore $$\rho = \frac{1}{\cos \beta} \lim \frac{x_1 - y_1 \sin \beta}{f'(x_1)}.$$

Lorsqu'on donne à x_1 la valeur zéro, la dernière fraction devient indéterminée ; remplaçons-la donc par le rapport des dérivées de ses deux termes, ce qui donne

$$\rho = \frac{1}{\cos\beta} \lim \frac{1 - f'(x_1)\sin\beta}{f''(x_1)},$$

en passant à la limite, on trouve

$$\rho = \frac{1}{\cos\beta} \frac{1}{f''(0)}$$

ou, finalement,

$$f''(0) = \frac{1}{\rho\cos\beta}. \qquad (4)$$

La relation (3) devient alors

$$\lim \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta} \sqrt{\frac{R}{\rho\cos\beta}}.$$

Soient : ω' la projection verticale du centre du parallèle qui passe par le point double; ω'_1 la projection de même nom du sommet du faisceau des normales à la surface menées par les divers points de ce parallèle, et c' la projection verticale du centre de courbure, en m, m', du méridien de front. Nous aurons :

$$m'\omega'_1 = \frac{m'\omega'}{\cos\beta} = \frac{R}{\cos\beta};\ m'c' = \rho$$

et, par suite,

$$\lim \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{\sin\beta} \sqrt{\frac{m'\omega'_1}{m'c'}} = \pm \frac{m'\omega'_1}{\sin\beta \sqrt{m'c' \cdot m'\omega'_1}}.$$

Décrivons sur $\omega_1 c'$ comme diamètre une demi-circonférence et soit K' son point de croisement avec P', projetons ensuite K en K', sur zm; on aura alors

$$\sin\beta \sqrt{m'c' \cdot m'\omega'_1} = m\mathrm{K},$$

et, finalement, $\qquad \lim \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{m'\omega'_1}{m\mathrm{K}}$:

La construction se termine manifestement comme il suit : à partir de K, sur KK' et sur son prolongement, on portera des longueurs $\mathrm{K}l_1$, $\mathrm{K}l_2$ égales toutes deux à $m'\omega'_1$ et les droites de jonction des points l_1, l_2 au point m seront les tangentes cherchées.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Jouanne**, professeur au Lycée de Caen.

SYSTÈME DE DIAMÈTRES CONJUGUÉS PARALLÈLES DANS DEUX CONIQUES.

En prenant les équations de deux coniques rapportées à des axes quelconques

$$ax^2 + 2bxy + cx^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$
$$a'x^2 + 2b'xy + c'x^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0,$$

les diamètres conjugués d'une droite de direction m sont donnés par les deux suivantes :

$$ax + by + d = m(bx + dy + e) = 0$$
$$a'x + b'y + d' = m(b'x + d'y + e') = 0.$$

Pour que ces droites soient parallèles, on doit avoir :

$$\frac{a + bm}{a' + b'm} = \frac{b + mc}{b' + mc'},$$

ce qui conduit à l'équation du second degré

$$(bc' + cb')m^2 + ac' + ca')m + (ab' - ba') = 0. \qquad (1)$$

En général, on a donc deux diamètres conjugués parallèles. Les directions sont données par les racines de cette équation; en effet, en prenant pour axe des x l'une d'elles et pour axe des y sa conjuguée, on est conduit à l'équation

$$om^2 + (ac' - ca')m = 0$$

dont une racine est o et l'autre est ∞, c'est-à-dire les directions des deux axes choisis.

Lorsqu'on a $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$, il y a une infinité de diamètres conjugués parallèles.

Il importe de savoir si les racines de (1) sont toujours réelles, ou d'indiquer dans quels cas ce fait se présente. La condition de réalité est

$$(ac' - ca')^2 - 4(bc' - cb')(ab' - ba') \geq 0, \qquad (2)$$

qu'on peut écrire aussi sous cette autre forme :

$$(2bb' - ac' - ca')^2 - (b^2 - ac)(b'^2 - a'c') \geq 0. \qquad (2 \text{ bis})$$

Cette fonction des coefficients que je désigne par R n'est

autre chose que la résultante ou l'éliminant des équations des directions asymptotiques :

$$f(m) = a\mu^2 + 2b\mu + c = 0$$
$$\varphi(m) = a'\mu^2 + 2b'\mu + c' = 0.$$

La question est donc ramenée à l'étude de R.

A cet effet il faut considérer les cas suivants :

1° *Deux ellipses.* — En désignant par α et β les racines de $f(m) = 0$ et par α' et β' celles de $\varphi\mu = 0$, on sait que $R = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$.

Dans le cas des ellipses

$$\alpha = p_1 + iq_1 \qquad \alpha' = p_2 + iq_2$$
$$\beta = p_1 - iq_1 \qquad \beta' = p_2 + iq_2.$$

Alors

$$R = a^2[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2][(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2].$$

Cette quantité est essentiellement positive; alors les racines de (1) sont réelles et deux ellipses ont toujours un système de diamètres conjugués parallèles ; c'est ce que montre d'ailleurs la fonction R.

2° *Deux hyperboles.* — Alors α, β, α' et β' sont réelles : supposons d'abord $\alpha' > \alpha > \beta > \beta'$,
alors $R = a^2 (\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\beta' - \alpha)(\beta' - \beta) > 0$
et les racines de (1) sont réelles; ce résultat serait le même pour $\alpha > \alpha' > \beta' > \beta$.

Supposons que $\alpha' > \alpha > \beta' > \beta$; alors $R < 0$ et les racines de (1) sont imaginaires.

Si on a $\alpha' = \alpha$, $R = 0$ et les valeurs de m sont égales : leur valeur commune $-\dfrac{ac' - ca'}{2bc' - cb'}$ est précisément la raison commune aux équations $\varphi(m) = 0$ et $f(m) = 0$. C'est donc une des directions asymptotes.

Or on sait que, dans ce cas, le diamètre se confond avec la direction de la corde conjuguée ; c'est ce qui explique l'égalité des racines.

Alors quand les directions asymptotiques de l'une des coniques renferment celles de l'autre, il y a un système de diamètres conjugués parallèles; autrement il n'y en a pas.

3° *Ellipse et parabole.* — En prenant $R = (2bb' - a'c - ac')^2 - (b^2ac)(b'^2a'c')$, on voit qu'il se réduit à $(2bb' - a'c - ac')^2$ et par conséquent que les racines de (1) sont réelles.

4° *Hyperbole et parabole.* — Alors $R > 0$, ou $R = 0$; pour $R = 0$ la direction de l'axe de la parabole est celle de l'une des asymptotes et on retombe sur les diamètres singuliers.

5° *Ellipse et hyperbole.* — En prenant pour R la forme déjà employée au 3e cas, on voit immédiatement la réalité des racines et l'existence du système de diamètres parallèles.

6° *Deux paraboles.* — Dans ce cas les deux diamètres conjugués parallèles sont toujours réels, et si les axes sont parallèles, il y en a une infinité.

On peut former le tableau suivant qui résume cette discussion :

Deux ellipses, Ellipse et hyperbole, Ellipse et parabole, Deux paraboles.	$R > 0$ Certitude de la réalité des diamètres conjugués parallèles.
Deux hyperboles, Hyperbole et parabole.	Incertitude, la réalité dépend des directions des asymptotes.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS PARALLÈLES DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE

En prenant pour axes des coordonnées un système de diamètres conjugués de l'une des deux surfaces, les équations seront :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0$$

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + F = 0.$$

Pour que les plans diamétraux conjugués de la direction donnée par α, β et γ soient parallèles, on doit avoir :

$$\frac{a\alpha + b''\beta + b'\gamma}{A\alpha} = \frac{b''\alpha + a'\beta + b\gamma}{A'\beta} = \frac{b'\alpha + a\beta + a''\gamma}{A''\gamma},$$

et, faisant tous ces rapports égaux à λ, on en tire les trois

équations : $(a - A\lambda)\alpha + b''\beta + b'\gamma = o;$
$b''\alpha + (a' - \lambda A')\beta + b\gamma = o;$
$b'a + b\beta + (a'' - \lambda A'')\gamma = o;$.

Ces équations ne peuvent être compatibles que si l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - \lambda A & b'' & b' \\ b'' & a' - \lambda A' & b \\ b' & b & a'' - \lambda A'' \end{vmatrix} = o.$$

Cette équation du troisième degré a ses racines réelles, comme on peut l'établir.

En effet, si on représente par A, A′, A″, B, B′, B″, les mineurs du premier ordre du déterminant Δ, et par a, a', a'', b, b', b'', les mineurs de même ordre du déterminant adjoint dont les éléments sont A, A′, etc...;

Comme on a $d = (a - \lambda A)A$. ou $A^2A'' - B^2 = (a - \lambda A)\Delta$, il suffit de connaître le signe de d pour en déduire le signe de Δ $\quad A' = (a - \lambda A)(a'' - \lambda A'') - b'^2$

$A'' = (a - \lambda A)(a' - \lambda A') - b''^2$

Soit $\frac{a}{A} > \frac{a'}{A'} > \frac{a''}{A''}$; désignons par λ_1 et λ_2 les racines de $A' = o$; $\lambda_1 > \frac{a}{A} > \frac{a''}{A''} > \lambda_2$.

Pour $\lambda = \infty \quad d > o, \quad a - \lambda A < o, \quad \Delta < o;$
$\lambda = \lambda_1 \quad d < o, \quad a - \lambda A < o, \quad \Delta > o;$
$\lambda = \lambda_2 \quad d < o, \quad a - \lambda A > o \quad \Delta < o;$
$\lambda = -\infty \quad d > o, \quad (a - \lambda A) > o \quad \Delta > o.$

Donc les trois racines sont réelles.

De la réalité des racines de $\Delta = o$, il ne faut pas conclure l'existence de trois diamètres conjugués parallèles dans les deux surfaces ; il peut arriver que pour chaque racine il y ait une direction à laquelle correspond seulement dans chaque surface un plan diamétral parallèle à l'autre. C'est ce qu'on peut établir en considérant successivement deux surfaces quelconques.

1° *Deux ellipsoïdes ou un ellipsoïde et un hyperboloïde.* — Rien n'est changé dans la direction des diamètres conjugués par une simple translation. Alors on peut amener les deux centres à coïncider.



Prenons pour axe des z la direction donnée par l'une des racines de $\Delta = 0$ et pour plan des xy le plan diamétral conjugué ; on aura pour les deux surfaces les équations suivantes :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + \gamma + F = 0;$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + \gamma + f = 0.$$

Pour $z = 0$, on a les sections du plan diamétral qui sont deux coniques ayant deux diamètres conjugués communs, ainsi qu'il a été démontré. Il en résulte que deux surfaces à centre dont un ellipsoïde ont toujours un système de diamètres conjugués parallèles.

2° *Ellipsoïde et paraboloïde.* — On peut effectuer une translation du paraboloïde qui place le centre de l'ellipsoïde sur cette surface et alors, en prenant les mêmes axes que précédemment, on a les équations :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + F = 0;$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2\sqrt{aa'}xy + 2ex + 2e'y = 0,$$

et les sections par le plan $z = 0$ sont une ellipse et une parabole ayant deux directions conjuguées parallèles. Donc le système de diamètres conjugués parallèles existe dans ce cas.

3° *Deux hyperboloïdes ou deux cônes.* — Les deux centres étant amenés à coïncider comme précédemment, le plan $z = 0$ donne pour intersection deux hyperboles, et on sait qu'elles n'ont de diamètres conjugués communs que si les asymptotes de l'une renferment celles de l'autre. Il n'y a donc de systèmes de diamètres conjugués parallèles que si les cônes asymptotes transportés parallèlement de manière à ce que le centre soit commun, sont tels que l'un soit intérieur à l'autre.

En suivant la même marche pour d'autres surfaces, on est conduit à former le tableau suivant qui résume toute l'analyse de la question.

Deux ellipsoïdes. Ellipsoïde et hyperboloïde. Id. et cône. Id. et paraboloïde. Id. et cylindre elliptique. Id. et cylindre hyperbolique. Ellipsoïde et cylindre parabolique. Deux paraboloïdes elliptiques. Paraboloïde elliptique et cylindre elliptique. Paraboloïde elliptique et cylindre parabolique. Deux cylindres elliptiques. Cylindre elliptique et parabolique. Deux cylindres paraboliques.	Les trois racines de $\Delta = o$ donnent trois diamètres conjugués parallèles.
Deux hyperboloïdes ou deux cônes. Cône ou hyperboloïde et paraboloïde. Paraboloïde elliptique et hyperbolique. Paraboloïdes hyperboliques. Paraboloïde et cylindre hyperbolique. Cylindre elliptique et hyperbolique. Cylindres hyperboliques.	L'existence du système de trois directions conjuguées parallèles est subordonnée aux positions respectives des cônes asymptotes, plans asymptotes, plans directeurs et axes. Dans le cas de contact il n'y a pas de directions conjuguées parallèles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Solution de la composition mathématique
par M. Janin, élève à l'école préparatoire de Sainte-Barbe.
(Voir l'énoncé, p. 324.)

L'équation d'une hyperbole équilatère passant par les points M et N est

$$x^2 - y^2 + 2mxy + 2pRy - R^2 = 0. \qquad (1)$$

Prenons maintenant un point Q sur le cercle et soient

$$x_0 = R\cos\varphi \qquad y_0 = R\sin\varphi$$

les coordonnées de ce point.

Si de ce point nous menons des tangentes à l'hyperbole équilatère (1), l'équation de la corde des contacts sera :

$$x(\cos\varphi + m\sin\varphi) + y(m\cos\varphi - \sin\varphi + p) + (p\sin\varphi - 1)R = 0. \qquad (2)$$

Joignons maintenant le point Q aux points A et B, où la droite (2) rencontre le cercle donné. Pour trouver plus facilement l'équation du système des droites QA, QB, transportons l'origine des coordonnées au point Q ; nous avons alors

$$x = x' + R\cos\varphi \qquad y = y' + R\sin\varphi \qquad (3)$$

et les équations du cercle et de la droite (2) deviennent :

$$x'^2 + y'^2 + 2R(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi) = 0 \qquad (C)$$

$$x'(\cos\varphi + m\sin\varphi) + y'(m\cos\varphi - \sin\varphi + p) + 2(m\cos\varphi - \sin\varphi + p)R\sin\varphi = 0. \qquad (2)'$$

Pour trouver maintenant l'équation des droites QA et QB, il suffit de former une combinaison homogène des équations (C) et (2)'. Cette combinaison est :

$$(x'^2+y'^2)(m\cos\varphi - \sin\varphi + p)\sin\varphi = (x'\cos\varphi + y'\sin\varphi) \times [x'(\cos\varphi + m\sin\gamma) + y'(m\cos\varphi - \sin\varphi + p]$$

c'est-à-dire en ordonnant

$$[x'(1 - p\sin\varphi) + y'(m + p\cos\varphi)]x' = 0. \qquad (4)'$$

Telle est l'équation des droites QA et QB, l'origine étant en Q ; pour avoir l'équation de ces droites dans l'ancien système, il faut, dans l'équation (4)', remplacer x' et y' par leurs valeurs tirées des formules (3), ce qui donne l'équation (4)

$$[x(1 - p\sin\varphi) + y(m + p\cos\varphi) - (\cos\varphi + m\sin\varphi)R][x - R\cos\varphi] = 0.$$

En séparant les équations de ces deux droites, on obtient pour l'une l'équation

$$x - R\cos\varphi = 0$$

qui représente une droite parallèle à l'axe des y.

L'autre droite est représentée par l'équation

$$(1 - p\sin\varphi)x + (m + p\cos\varphi)y - (\cos\varphi + m\sin\varphi)R = 0$$

Cette équation peut s'écrire

$$(py - R)\cos\varphi - (px + mR)\sin\varphi + (x + my) = 0.$$

On voit maintenant que, quel que soit φ, cette équation est vérifiée pour

$$y = \frac{R}{p} \qquad x = -\frac{mR}{p};$$

d'où

$$x + my = 0.$$

Par suite, cette droite passe par le point fixe dont les coordonnées sont

$$a = -\frac{mR}{p} \qquad b = \frac{R}{p}. \qquad (P)$$

Remarque. — Il est facile de voir géométriquement que le point P est le pôle de l'axe des x par rapport à l'hyperbole considérée.

En effet, lorsque le point Q vient en M, la corde des contacts coïncide avec la tangente à l'hyperbole au point M, et des droites QA, QB, l'une devient la tangente au cercle au point M (tangente parallèle à l'axe des y) et l'autre devient la tangente à l'hyperbole au point M.

En répétant la même construction pour le point N, on voit que le point fixe se trouve à l'intersection des tangentes menées aux extrémités de la corde MN, c'est-à-dire est le pôle de MN.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante est déterminée.

En effet, si l'on joint le point P aux points M et N, on obtient les tangentes PM, PN à l'hyperbole aux points M et N, et l'hyperbole demandée se trouve déterminée sans ambiguïté par deux points et les tangentes en ces points.

Pour construire le centre de cette hyperbole, remarquons qu'il est déterminé par l'intersection des deux droites

$$x + my = 0, \qquad mx - y + pR = 0.$$

Si dans ces équations on remplace m et p par leurs valeurs tirées en fonction des coordonnées du point P, elles deviennent $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $\qquad ax + by - R^2 = 0$.

Ces deux droites représentent : la première, la droite qui joint le centre du cercle au point P ; la seconde, la polaire du point P par rapport au cercle.

On obtiendra donc le centre de l'hyperbole en prenant sur le diamètre PO le conjugué harmonique du point P.

Comme on sait faire cette construction, le problème proposé est résolu.

Par le centre C de l'hyperbole menons une parallèle Cx' à l'axe des x ; les deux droites CP, Cx' formeront un système de diamètres conjugués. Il suffit pour le vérifier de remarquer que la droite PO est le diamètre conjugué de la direction Ox.

Pour construire les asymptotes, puisque l'hyperbole est équilatère et que nous connaissons un système de diamètres conjugués, il suffira de mener les bissectrices de l'angle PCx.

Soient CI, CJ ces bissectrices, on obtiendra les axes de l'hyperbole en menant les bissectrices CX, CY de l'angle ICJ.

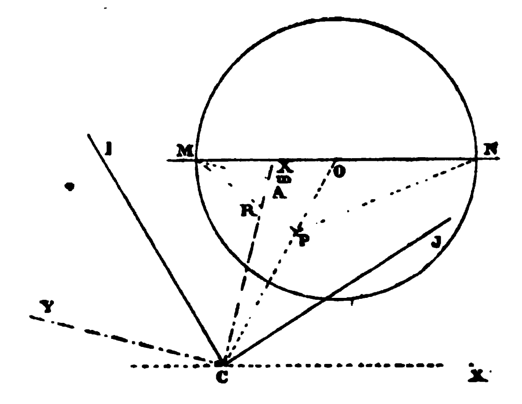


Fig. 1.

Pour construire les sommets de l'hyperbole nous chercherons l'intersection de l'hyperbole avec l'axe transverse.

Nous allons déterminer cet axe transverse.

Après avoir construit le centre et les asymptotes d'après la méthode indiquée précédemment, on mènera les bissectrices de l'angle ICJ (supposons pour fixer les idées que OP soit dans l'angle ICJ); l'axe transverse sera dans l'angle ICJ si le centre C n'est pas entre O et P (*fig. 1*); l'axe transverse sera dans l'angle adjacent si le centre C est entre O et P (*fig. 2*).

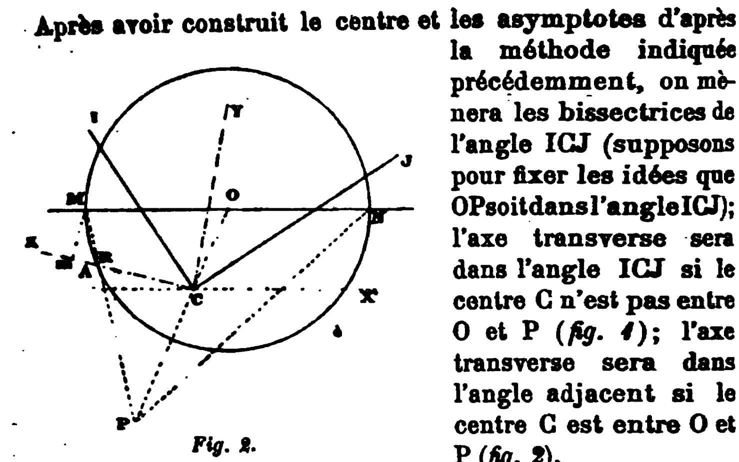


Fig. 2.

Quoi qu'il en soit, après avoir construit l'axe transverse CX, du point M on abaissera une perpendiculaire Mm sur CX e l'on considérera le point R où la tangente MP au point M à l'hyperbole considérée rencontre l'axe CX.

Le point R est le pôle de la droite Mm.

Par suite, les points R, m sont conjugués harmoniques par rapport aux sommets AA′ de l'hyperbole et l'on a

$$CA^2 = CA'^2 = CR \cdot Cm$$

relation qui permet de construire les points A et A′ à l'aide d'une moyenne proportionnelle.

Cherchons maintenant le lieu des foyers des hyperboles lorsque le point P décrit la droite $y = x$.

Pour cela désignons comme précédemment par a et b les coordonnées du point fixe P; on a

$$pa + mR = 0 \qquad pb = R,$$

d'où l'on tire $\quad m = -1 \qquad p = \dfrac{R}{a};$

Et l'équation de l'hyperbole devient

$$x^2 - y^2 - 2xy + 2py - R^2 = 0.$$

Soient α, β les coordonnées des foyers de cette hyperbole, l'équation de l'hyperbole pourra s'écrire :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 2(x \cos \omega + y \sin \omega - d)^2.$$

L'identification de ces deux équations nous donne les

relations :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} 1-2\cos^2\omega=\lambda. \\ 1-2\sin^2\omega=-\lambda. \\ 2\cos\omega\sin\omega=\lambda. \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{l} \alpha-2d\cos\omega=0. \\ \beta-2d\sin\omega=-\lambda p. \\ \alpha^2+\beta^2-2d^2=-\lambda R^2; \end{array}\right.$$

Les équations (1) se réduisent à deux. Pour trouver le lieu des foyers, il faut entre ces cinq équations éliminer les quatre paramètres

$$\omega \qquad \lambda \qquad d \qquad p$$

l'élimination peut être simplifiée; en remarquant que les équations (1), la première et la dernière des équations (2) ne contiennent pas p, nous ne devrons éliminer que

$$\omega \qquad \lambda \qquad d$$

Des deux premières des équations (1) on tire

$$2\cos^2\omega=1-\lambda. \qquad 2\sin^2\omega=1+\lambda.$$

En multipliant membre à membre il vient

$$4\sin^2\omega\cos^2\omega=1-\lambda^2.$$

Et en tenant compte de la troisième relation

$$4\sin^2\omega\cos^2\omega=1-\lambda^2=\lambda^2,$$

on en tire
$$\lambda^2=\frac{1}{2}$$

$$\lambda=\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En représentant par ε la quantité ± 1 ;

En portant cette valeur de λ dans la première des relations (1) on tire

$$\cos\omega=\sqrt{\frac{1-\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\varepsilon\sqrt{2}}}{2}.$$

Nous ne prenons pas le double signe, parce que l'on peut toujours choisir arbitrairement le signe de l'une des trois quantités $\cos\omega \qquad \sin\omega \qquad d$

le signe des deux autres se trouvant par là déterminé.

Nous connaissons maintenant λ et $\cos\omega$, qui sont les seuls paramètres des équations (1) qui entrent dans les relations

$$\alpha-2d\cos\omega=0$$

$$\alpha^2+\beta^2-2d^2+\lambda R^2=0.$$

Entre ces relations éliminons d.

De la première on tire :

$$d = \frac{\alpha}{2 \cos \omega};$$

portant dans la seconde, il vient, en remplaçant $\cos^2 \omega$ et λ par leurs valeurs,

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2\alpha^2}{2 - \varepsilon\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} R^2 = 0.$$

Pour faire disparaître l'irrationnelle en dénominateur multiplions les deux termes de la fraction

$$\frac{2\alpha^2}{2 - \varepsilon\sqrt{2}}$$

par la quantité $\quad 2 + \varepsilon\sqrt{2}$

et remarquons que $\quad \varepsilon^2 = 1;$

nous aurons $\quad \frac{2\alpha^2}{2 - \varepsilon\sqrt{2}} = \alpha^2 (2 + \varepsilon\sqrt{2})$

et l'équation du lieu des foyers devient alors

$$(\varepsilon\sqrt{2} - 1)\, \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} R^2 = 0.$$

Si dans cette équation on remplace successivement ε par ± 1, on obtient les deux équations :

$$(\sqrt{2} - 1)\, \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} R^2 = 0$$

$$(\sqrt{2} + 1)\, \alpha^2 - \beta^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} R^2 = 0.$$

La première de ces équations représente une ellipse rapportée à ses axes. Les longueurs des axes sont

$$a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} - 1} R^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} + 1) R^2$$

$$b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} R^2$$

et le carré de la demi-distance focale est

$$c^2 = a^2 - b^2 = R^2,$$

ce qui montre que les foyers de l'ellipse sont les points M et N.

La seconde équation représente une hyperbole rapportée

à ses axes. Les longueurs des axes sont

$$a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} R^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - 1) R^2$$

$$b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} R^2$$

et le carré de la demi-distance focale a pour expression

$$c^2 = a^2 + b^2 = R^2.$$

Les foyers sont encore les points M et N.

Le lieu des foyers des hyperboles équilatères de l'énoncé se compose d'une ellipse et d'une hyperbole ayant pour foyers les points M et N.

Cherchons les points d'intersection de ces coniques avec le cercle donné.

L'équation de ces coniques est

$$(\varepsilon\sqrt{2} - 1) x^2 + y^2 - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} R^2 = 0$$

et l'équation du cercle est $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

Multiplions la seconde de ces équations par $-\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}$ et ajoutons-la à la première, il vient :

$$\left(\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} - 1\right) x^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}\right) y^2 = 0$$

ou

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Cette équation représente les deux bissectrices de l'angle des axes de coordonnées.

Comme elle ne dépend pas de ε, il en résulte que les deux coniques du lieu se coupent sur le cercle aux points situés sur les bissectrices.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

Par M. Nettre, élève de Mathématiques spéciales, à Sainte-Barbe.

La propriété que l'auteur s'est proposé d'établir n'est, en réalité, pas nouvelle ; mais la démonstration qu'il nous a apportée nous semble originale, et le corollaire qu'il en a déduit n'est pas sans intérêt. Cette propriété est la suivante :

Si, par un point fixe P, pris dans le plan d'une conique, on trace diverses sécantes et qu'on joigne à un foyer les points où chaque sécante rencontre la courbe, les lignes de jonction ainsi obtenues forment avec la droite qui joint le foyer au point fixe P des angles ω et ω' satisfaisant aux deux relations suivantes :

$$\frac{\cos\frac{\omega+\omega'}{2}}{\cos\frac{\omega-\omega'}{2}} = C^{te} \qquad \text{et} \qquad tg\,\frac{\omega}{2}\,tg\,\frac{\omega}{2} = C^{te}.$$

Prenons pour axes de coordonnées la droite FP et la perpendiculaire élevée à cette droite au foyer F. L'équation de la conique donnée, par rapport à ces axes, est

$$x^2 + y^2 = e^2U^2,$$

e étant l'excentricité de la conique, et $U = 0$, l'équation de la directrice correspondant au foyer F. (On sait que $U = x \cos \alpha + y \sin \alpha$

L'équation d'une droite quelconque du plan peut être écrite sous la forme

$$mx + ny + \lambda U = 0^1. \qquad (1)$$

Si l'on appelle ρ et ω, ρ' et ω' les coordonnées polaires des points M et M' par rapport au point F, pris pour pôle, et à l'axe FP pris pour axe polaire, on aura, en exprimant que la droite précédente (1) passe par les points M et M',

$$m\rho \cos \omega + n\rho \sin \omega + \lambda U = 0,$$

x et y étant remplacées dans U par les coordonnées des points considérés. Or, ces points étant sur la conique, on a :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = e^2U^2,$$

d'où

$$U = \frac{\rho}{e}.$$

Par conséquent, pour les points M et M', on aura :

$$m\rho \cos \omega + n\rho \sin \omega + \lambda \frac{\rho}{e} = 0$$

et

$$m\rho' \cos \omega' + n\rho' \sin \omega' + \lambda \frac{\rho'}{e} = 0.$$

En joignant à ces deux conditions l'équation générale $mx + ny + \lambda U = 0$, on obtiendra l'équation de la droite particulière MM' en éliminant m, n et λ entre ces trois relations homogènes. Le résultat de cette élimination est le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & U \\ \cos\omega & \sin\omega & \frac{1}{e} \\ \cos\omega' & \sin\omega' & \frac{1}{e} \end{vmatrix} = 0$$

c.-à-d.

$$x\frac{\sin\omega - \sin\omega'}{e} + y\frac{\cos\omega' - \cos\omega}{e} + U(\cos\omega\sin\omega' - \sin\omega\cos\omega') = 0$$

ou

$$2x\sin\frac{\omega - \omega'}{2}\cos\frac{\omega + \omega'}{2} + 2y\sin\frac{\omega - \omega'}{2}\sin\frac{\omega - \omega'}{2} + eU\sin(\omega' - \omega) = 0$$

ou enfin

$$x\cos\frac{\omega + \omega'}{2} + y\sin\frac{\omega + \omega'}{2} - eU\cos\frac{\omega - \omega'}{2} = 0.$$

Si l'on écrit alors que cette droite passe au point fixe P $\begin{pmatrix} y = 0 \\ x = a \end{pmatrix}$, il vient :

$$a\cos\frac{\omega + \omega'}{2} - eU\cos\frac{\omega - \omega'}{2} = 0$$

c.-à-d.

$$\frac{\cos\frac{\omega + \omega'}{2}}{\cos\frac{\omega - \omega'}{2}} = \frac{eU}{a} = \frac{e(a\cos\alpha - p)}{a}$$

ce qui constitue la première relation énoncée.

Cette formule peut s'écrire :

$$\frac{\cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} + \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}} = \text{constante}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}} = K$$

en appelant K la constante.

Il en resulte :

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}(K+1)=1-K;$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}=\frac{1-K}{1+K}=\frac{a-(a\cos\alpha-p)e}{a+(a\cos\alpha-p)e}=C^{te}.$$

C'est la seconde relation énoncée.

Corollaire. — La première formule conduit à une propriété remarquable de l'ellipse.

Si l'on mène la bissectrice FB de l'angle MFM', l'angle BFP est égal à $\frac{\omega+\omega}{2}$; pour avoir son cosinus, il suffit d'abaisser du point fixe P une perpendiculaire PB sur la bissectrice, et en prolongeant FM' jusqu'à la rencontre en C de cette perpendiculaire, on a
dans le triangle FBC :

$$FB = FC\cos\frac{\omega-\omega}{2},$$

et dans le triangle FBP :

$$FB = FP\cos\frac{\omega+\omega'}{2}.$$

Par suite :

$$\frac{FC}{FP}=\frac{\cos\frac{\omega+\omega'}{2}}{\cos\frac{\omega-\omega'}{2}}=\frac{e(a\cos\alpha-p)}{a}=K.$$

Donc $\quad FC = K\,.\,FP = Ka = C^{te}.$

On voit donc, par cette dernière considération, que, *si l'on joint un point fixe du plan à un foyer, que par le point fixe on mène une sécante* PMM' *à travers la courbe, et que de ce point* P *on abaisse une perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle* MFM', *les segments interceptés par cette perpendiculaire sur les rayons vecteurs* FM, FM' *sont constants. De plus, le lieu des points* C, *où la perpendiculaire rencontre le rayon* FM' *prolongé, est un cercle.*

QUESTION 234

Solution par M. Moulines, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Pierron).

Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position. Son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers.

Soient $2a$, $2b$ les longueurs des axes d'une ellipse. Soit $2a'$ la longueur du diamètre AA' donné de grandeur et de position et $2b'$ la longueur du diamètre donné de grandeur seulement.

On a $$AF + A'F = 2a;$$
élevant au carré

(1) $$\overline{AF}^2 + \overline{A'F}^2 + 2AF \cdot A'F = 4a^2.$$

Mais dans le triangle AFA' on a
$$\overline{AF}^2 + \overline{A'F}^2 = 2\overline{OF}^2 + 2a'^2.$$

Dès lors, l'égalité (1) devient
$$AF \cdot A'F = 2a^2 - a'^2 - \overline{OF}^2$$
et comme $$\overline{OF}^2 = a^2 - b^2$$
et $$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$
$$AF \cdot A'F = b'^2.$$

Le lieu est donc une *ovale de Cassini* ayant pour pôles A et A' et b'^2 pour puissance.

Remarque I. — Si $b' = a'$, c'est-à-dire si l'on donne seulement un des diamètres conjugués égaux de grandeur et de position, on aura $AF \cdot A'F = \dfrac{\overline{AA'}^2}{4}$
et le lieu sera une *lemniscate*.

Remarque II. — En cherchant le même lieu pour une hyperbole en se donnant la longueur géométrique du diamètre conjugué imaginaire, on obtiendrait la même équation : car il suffirait pour avoir le lieu de changer le signe du produit $AF \cdot AF'$ et le signe de b'^2.

Remarque III. — Dans l'hyperbole équilatère, tous les diamètres conjugués ont même longueur géométrique. Donc,

le lieu des foyers des hyperboles équilatères qui ont même centre et passent par un point commun est une lemniscate ayant pour pôles le point donné et son symétrique par rapport au centre.

NOTA. — La même question a été aussi résolue par M. V. Arnaud, élève de mathématiques spéciales au lycée de Nice.

QUESTION 244.

Solution par M. A. COIGNARD, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Étant donnée une conique qui passe à l'origine des axes supposés rectangulaires, on considère les cordes de cette conique qui sont vues sous un angle droit; par les extrémités de chacune de ces cordes et par l'origine on fait passer un cercle; on demande le lieu des centres de tous ces cercles.

Soit la conique rapportée à une tangente et à la normale, son équation sera

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0;$$

on sait d'après le théorème de Frégier que toutes les cordes considérées passent par un point fixe sur la normale. Soit β son ordonnée; on a à trouver le lieu des milieux de la corde

$$y - \beta = mx.$$

Il suffit donc d'éliminer m entre cette équation et l'équation du diamètre conjugué de la direction m, qui est

$$f'_x + mf'_y = 0;$$

le lieu est donc $f'_x + \dfrac{y-\beta}{x} f'_y = 0.$

On voit sous cette forme que le lieu cherché est une conique qui passe par le centre de la conique donnée.

Cette équation développée devient

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + (E - C\beta)y - B\beta x - E\beta x - E\beta = 0.$$

Ce lieu passe par le point d'ordonnée β et situé sur l'axe des y. C'est une conique homothétique à la conique proposée.

NOTA. — Ont résolu cette question : MM. Comandré, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Pierron); Lestoquoy, du lycée de Saint-Quentin; Hugot et Simon, du lycée de Lyon; Gino Loria, à Mantoue; Libmann, collège Stanislas, à Paris.

QUESTION 245

Solution par M. D. COMANDRÉ, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Etant données deux courbes S *et* S_1 *par leurs équations, dans un système de coordonnées polaires, on suppose que l'on sache construire les tangentes à ces courbes en deux points* M *et* M_1, *situés sur un même rayon vecteur; on demande d'en déduire la tangente au point* M_2, *situé sur le même rayon vecteur dans la courbe* S_2, *qui est le lieu des milieux des distances telles que* MM_1 *dans les deux courbes proposées.*

Considérons les deux courbes

$$\rho = f(\omega), \quad (1)$$

$$\rho = \varphi(\omega). \quad (2)$$

La courbe considérée sera

$$\rho = \frac{f(\omega) + \varphi(\omega)}{2}. \quad (3)$$

Les sous-normales à (1) et à (2) sont respectivement $-f'(\omega), -\varphi'(\omega)$. Or, la sous-normale à (3) est $-\dfrac{f'(\omega)+\varphi'(\omega)}{2}$ c'est-à-dire la demi-somme des sous-normales à (1) et à (2).

Donc, on connait la sous-normale à (3), car on connait les tangentes à (1) et (2); par suite, on a la tangente en M_2 à la courbe (3).

NOTA. — On peut remarquer que quand on connaîtra plusieurs courbes et les tangentes à ces courbes, si on en considère une dont le rayon vecteur soit une fonction linéaire et homogène des rayons vecteurs des premières, on pourra construire la tangente à cette courbe en un point quelconque.

En effet, soient $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots \rho_n$ les ρ de plusieurs courbes. Soit une courbe définie par la relation

$$R = a\rho_1 + b\rho_2 + c\rho_3 + \dots \quad n\rho_n :$$

on remarque que si on prend la dérivée on a

$$R' = a\rho'_1 + b\rho'_2 + c\rho'_3 \dots + n\rho'_n .$$

Donc, on connaît la sous-normale à la courbe R. Donc, on connaît la tangente.

NOTA. — Cette question a été résolue par MM. Coignard, élève au lycée Saint-Louis; Landre, élève du Prytanée militaire de La Flèche; de Prat, à Lille.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. M. D'OCAGNE, élève au lycée Fontanes.

Soit O le pôle. La normale à l'enveloppe de la droite OM est la perpendiculaire à cette droite menée par le point O. Appelons N et N_1 les points où cette perpendiculaire coupe les normales en M et M_1 aux courbes correspondantes. Prenons le milieu N_2 de NN_1. La ligne M_2N_2 est la normale au lieu de M_2 (*); on en déduit la tangente.

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE *(1er volume), par M.* **E. Jurisch**, *professeur aux Écoles supérieures municipales Colbert et J.-B. Say. — Paris, librairie Delagrave.*

Les élèves de mathématiques élémentaires paraissent, en général, assez rebelles à l'étude de la géométrie descriptive; cela tient, croyons-nous, à ce que les ouvrages qui exposent les éléments de cette science n'insistent pas assez sur les petits problèmes qui constituent ce que l'on peut appeler l'*alphabet* de la géométrie descriptive.

Le volume que nous signalons aujourd'hui contient, dans une première partie, ces petits problèmes exposés dans un ordre méthodique et développés assez simplement pour que les élèves puissent se les approprier rapidement: lorsqu'ils posséderont ces éléments, ils seront à même de faire des épures analogues à celles qui leur sont demandées aux examens.

La seconde partie du volume, qui traite des *polyèdres* et de la *sphère*, renferme d'ailleurs de nombreuses applications de ces problèmes élémentaires; elles achèveront d'en montrer l'utilité aux élèves.

L'emploi des *projections obliques* pour résoudre certaines questions tend à s'introduire dans l'enseignement, et il n'existe, à notre connaissance, aucun ouvrage élémentaire qui en fasse une étude spéciale; les principes et les applications élémentaires de la méthode des projections obliques que l'auteur a placés à la fin du volume constituent donc une innovation qui, si modeste qu'elle soit, mérite d'être remarquée.

(*) Voir Mannheim, *Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique*, p. 174.

Signalons aussi les *deux cents questions* comprises dans ce volume; un certain nombre d'entre elles, proposées aux examens divers, contiennent des données numériques permettant aux élèves de s'exercer en vue de l'épure qui leur sera imposée dans les épreuves de fin d'année.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

266. — On donne un point P dans l'intérieur d'un triangle ; par ce point, on mène des parallèles aux côtés ; la parallèle à AC rencontre les côtés aux points 1 et 4 ; la parallèle à BC rencontre les côtés aux points 2 et 5 ; enfin la parallèle à AB rencontre les côtés aux points 3 et 6 ; en joignant les points 1, 3, 5 on forme un triangle ; de même pour les points 2, 4, 6. On demande : 1° de démontrer que ces deux triangles sont équivalents ; 2° de déterminer le point P de façon que le triangle (1, 3, 5) soit maximum.

267. — On donne dans un plan deux circonférences qui se coupent en A, et un point B. On demande de décrire de B comme centre une circonférence telle que deux des points C et D où elle coupe les deux premières soient en ligne droite avec le point A. En outre, on suppose que le point B parcourt la plus grande des deux circonférences ; par chacune de ses positions, on mène une parallèle à la direction correspondante ACD. Démontrer que cette parallèle est constamment tangente à une certaine ellipse fixe, que l'on propose de déterminer. *(Vazou.)*

268. — Sur les trois côtés d'un triangle quelconque comme diamètre, on décrit des circonférences et on mène les tangentes communes à ces circonférences, prises deux à deux. Démontrer que la somme des carrés des inverses des tangentes est égale au carré de l'inverse du rayon du cercle inscrit. *(Blessel.)*

269. — Par un point donné dans un angle, et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée à ces

mêmes côtés de telle sorte que le point donné la divise en deux segments dont la somme des carrés soit donnée.

(Conc. gén. 1819.)

270. — Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et le produit d'un des côtés inconnus par la somme ou la différence de ces deux côtés.

Mathématiques spéciales.

271. — Trouver le coefficient du terme en x^p dans le développement suivant :

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1})^2$$

(F. Fabre.)

272. — Vérifier l'identité

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots (1 + x^{2p})$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k,$$

et exprimer K en fonction de p. *(F. Fabre.)*

273. — Si m désigne un nombre entier positif, à quelle condition doit-il satisfaire pour que $(x + y)^m - (x^m + y^m)$ soit divisible par $x^2 + xy + y^2$? *(F. Fabre.)*

274. — Étant donné l'arc $2a$, effectuer la somme S déterminée par la formule

$$S = 3 + \sin^4 a + \cos^4 a + \sin^6 a + \cos^6 a + \sin^8 a$$
$$+ \cos^8 a + \dots + \sin^{2n} a + \cos^{2n} a + \dots$$

275. — La somme de n nombres positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, multipliée par la somme de leurs inverses, ne peut jamais être égale à n^2 ; en d'autres termes, l'équation

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)\left(x_1 + x_2 + \dots + x_n\right) = n^2$$

est toujours impossible, sauf pour $x_1 = x_2 = x_3 \dots = x_n = 1$. *(De Longchamps.)*

Le Rédacteur-Gérant.
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS — 20578-0.

NOTE

SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES

(*Suite*, voir page 481.)

10. — Lorsqu'une fraction dont le dénominateur est premier donne naissance à une période non complète, le nombre de chiffres de la période est impair.

Dans l'égalité $$\frac{1}{N} = \frac{p}{D}$$
on sait que D est de la forme $10^k - 1$, k étant le nombre de chiffres de la période. Je dis que si la période n'est pas complète, k est impair. En effet, supposons que k soit pair, et égal à $2k'$. On aurait alors
$$\frac{1}{N} = \frac{p}{10^{2k'} - 1} = \frac{p}{(10^{k'} + 1)(10^{k'} - 1)}.$$
N, étant premier, doit diviser l'un des deux facteurs du dénominateur; supposons d'abord qu'il divise $10^{k'} + 1$; on aurait $$10^{k'} + 1 = Nq,$$
d'où l'on tirerait $$\frac{1}{N} = \frac{\frac{q}{10^{k'}}}{1 + \frac{1}{10^{k'}}}$$
et nous avons vu que si la fraction $\frac{1}{N}$ se présente sous cette forme, la fraction est complète, ce qui est contre l'hypothèse. Si au contraire N divise le facteur $10^{k'} - 1$, on tire $$\frac{1}{N} = \frac{\frac{q}{10^{k'}}}{1 - \frac{1}{10^{k'}}}$$
et par suite la période n'aurait que k' chiffres, ce qui est encore contre l'hypothèse. Donc k est forcément impair.

11. — Nous venons de voir que si N est un diviseur de $10^k + 1$, la période est complète. Réciproquement, si N

donne naissance à une fraction décimale à période complète. N est un diviseur de $10^k + 1$.

En effet, soit $2k$ le nombre des chiffres de la période, x la première partie de cette période, on a (4)

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x+1}{10^k}}{1 + \frac{1}{10^k}} = \frac{x+1}{10^k + 1};$$

donc N doit diviser $10^k + 1$.

Donc on trouvera les diviseurs premiers qui donnent naissance à des périodes complètes en cherchant les facteurs premiers de $10^k + 1$, où l'on donne à k les valeurs entières 1, 2, 3, 4....

12. — Nous allons nous proposer, connaissant le nombre de chiffres de la période correspondant à la fraction $\frac{1}{N}$, N étant premier, d'en déduire le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N^2}$.

D'abord, en appelant p la période, qui contient par hypothèse k chiffres, on en déduit

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{10^k - 1}.$$

Si p est divisible par N, on a $p = Nq$, et par suite

$$\frac{1}{N^2} = \frac{q}{10^k - 1};$$

donc, dans ce cas, la fraction correspondant à $\frac{1}{N^2}$ contient autant de chiffres à la période que la fraction correspondant à $\frac{1}{N}$.

Mais supposons que p ne soit pas divisible par N; posons alors
$$p = Np + r;$$
r, étant inférieur à N, est nécessairement premier avec lui.

Cela posé, prenons deux périodes au numérateur; on sait que l'on a encore une fraction égale à la fraction proposée, et on a
$$\frac{1}{N} = \frac{p.10^k + p}{10^{2k} - 1}.$$

Mais on a par hypothèse

$$10^k - 1 = SN,$$

donc

$$10^k = SN + 1$$

et par suite

$$\frac{1}{N} = \frac{(qN + r)(SN + 1) + (qN + r)}{10^{2k} - 1} = \frac{TN + 2r}{10^{2k} - 1},$$

On trouverait de même, en prenant trois périodes :

$$\frac{1}{N} = \frac{VN + 3r}{10^{3k} - 1},$$

et ainsi de suite ; or, il faut que le numérateur, *formé d'un nombre entier de périodes*, soit divisible par N, pour qu'on puisse en déduire le nombre de chiffres de la période de $\frac{1}{N^2}$; mais, d'après la forme du numérateur, il faut, pour que cette condition soit remplie, que l'on prenne N périodes ; donc, en général, le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N^2}$ est Nk.

On verrait de même que, si la période correspondant à $\frac{1}{N^2}$ n'est pas divisible par N, le nombre de chiffres de la période de $\frac{1}{N^3}$ est N^2k, et ainsi de suite.

3. — La période correspondant à $\frac{1}{N_h}$, N, étant un nombre premier, est de même nature que la période correspondant à $\frac{1}{N}$, c'est-à-dire complète ou incomplète en même temps que cette dernière.

En effet, soit k le nombre des chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N}$; le nombre des chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N^h}$ sera, d'après ce qui précède, égale à $N^{h'} k$, h' étant un entier égal ou inférieur à $h - 1$; or N étant premier, $N^{h'}$ est impair ; donc $N^{h'}.k$ sera pair ou impair en même temps que k.

14. — Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible est formé d'un produit de facteurs premiers, aucun des restes n'est divisible par un des facteurs premiers du dénominateur.

Soit la fraction $\frac{a}{bc}$, que je suppose irréductible ; je dis que je ne pourrai pas obtenir un reste divisible par b ou par c ; en effet, supposons que, après k opérations, j'aie un reste divisible par b par exemple, j'aurais

$$a \times 10^k = bc \times 9 + bm = bQ,$$

donc $a \times 10^k$ serait divisible par b, ce qui est impossible.

Cela nous indique immédiatement combien il y a au plus de chiffres à la période d'une fraction dont le dénominateur est composé de plusieurs nombres premiers ; en effet, prenons par exemple la fraction $\frac{1}{NN'}$. Parmi les $NN' - 1$ restes possibles, il y en a $(N' - 1)$ divisibles par N, et aussi $(N - 1)$ divisibles par N' ; on ne pourra pas les obtenir, et par suite il en restera au plus

$$NN' - 1 - (N' - 1) - (N - 1) = (N - 1)(N' - 1).$$

Donc le nombre des chiffres de la période sera $(N - 1)(N' - 1)$ ou un sous-multiple de ce nombre.

Si nous prenons de même la fraction $\frac{1}{NN'N''}$, nous verrons que, parmi les $NN'N'' - 1$ restes possibles, il y en a qui sont multiples de N, et dont le nombre est $N'N'' - 1$; d'autres, au nombre de $N''N - 1$, sont divisibles par N' ; d'autres encore, au nombre de $NN' - 1$, sont divisibles par N'' ; enfin il y en a $N - 1$ divisibles par $N'N''$; $N' - 1$ divisibles par $N''N$; $N'' - 1$ divisibles par NN'. En retranchant tous ces restes, que l'on ne peut avoir, on voit facilement qu'on peut en trouver un nombre marqué par

$$(N - 1)(N' - 1)(N'' - 1) ;$$

donc ce nombre, ou un de ses sous-multiples, marquera le nombre de chiffres de la période correspondant à la fraction considérée.

15. — On sait que, au lieu de prendre pour représenter une fraction décimale périodique, une fraction ordinaire

dont le numérateur est la période, et le dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à la période, on peut prendre au numérateur n périodes, à la condition que le dénominateur contiendra un nombre de 9 égal à n fois le nombre de chiffres de la période. Je dis que l'on ne pourrait pas prendre un nombre de 9 qui ne fût pas un multiple du nombre de chiffres de la période.

En effet, désignons par A le numérateur de la fraction que l'on formerait ainsi, et qui aurait autant de chiffres que le dénominateur; posons

$$\frac{1}{N} = \frac{A}{10^{nk+r} - 1};$$

appelons p le nombre formé en prenant n périodes ; on a

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{10^{nk} - 1} = \frac{p \cdot 10^r}{10^{nk+r} - 10^r}.$$

On en déduit, par une propriété connue

$$\frac{1}{N} = \frac{A - p \cdot 10^r}{10^r - 1};$$

donc la période correspondant à $\frac{1}{N}$ n'aurait que r chiffres au lieu de k chiffres, ce qui est contre l'hypothèse.

16. — Cela posé, nous allons démontrer le théorème important suivant :

Le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{N.N'.N''\ldots}$ est égal au plus petit commun multiple des nombres de chiffres des périodes correspondant aux fractions $\frac{1}{N}, \frac{1}{N'}, \frac{1}{N''}\ldots$

D'abord, le nombre de chiffres de la période correspondant à la fraction composée est un multiple commun des nombres de chiffres des autres périodes; en effet, on a, en appelant D' le dénominateur de la fraction composée

$$\frac{1}{NN'N''} = \frac{p}{D'};$$

d'où $$\frac{1}{N} = \frac{N'N''p}{D'}; \quad \frac{1}{N'} = \frac{N''Np}{D'}, \text{ etc.}$$

donc le nombre de chiffres de D′ est un multiple du nombre de chiffres des périodes correspondant aux fractions $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{N'}$...

En outre, je dis que D′ a précisément un nombre de chiffres égal au plus petit commun multiple des nombres de chiffres des autres périodes. Pour le prouver, je vais prendre deux fractions irréductibles, $\frac{1}{N}$ et $\frac{1}{N'}$. Je prendrai un dénominateur D formé d'autant de 9 qu'il y a d'unités dans le plus petit commun multiple des nombres de chiffres des périodes; alors je prendrai un nombre correspondant de périodes dans chaque fraction, et j'aurai

$$\frac{1}{a} = \frac{P}{D}; \quad \frac{1}{b} = \frac{P}{D}.$$

d'où

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{P+P'}{D}.$$

Or, la fraction $\frac{a+b}{ab}$ est irréductible, puisque a et b sont premiers, donc P + P′ est divisible par $(a+b)$; appelons p le quotient, nous aurons $\frac{1}{ab} = \frac{p}{D}$;

donc la fraction $\frac{1}{ab}$ donnera naissance à une fraction dont la période ne contiendra pas plus de chiffres qu'il n'y a d'unités dans le plus petit commun multiple des nombres de chiffres des périodes de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$; du reste, d'après la première partie du raisonnement, il ne peut pas y en avoir moins ; le théorème est donc démontré pour ce cas.

c étant premier avec ab, le théorème s'applique en considérant la fraction $\frac{1}{abc}$ comme provenant de la fraction $\frac{1}{ab}$, combinée avec la fraction $\frac{1}{c}$, et ainsi de suite.

17. — Cette proposition nous permet de résoudre la question suivante, qui a été donnée dans des concours : Trouver

tous les nombres N tels que la période de $\frac{1}{N}$ ait p chiffres décimaux. Il suffit évidemment que N soit diviseur de $10^p - 1$; on formera donc les diviseurs de 10^p; parmi ces diviseurs se trouveront toujours 3 et 9, qui ne donnent qu'un chiffre à la période et que l'on laissera de côté. Si le nombre p est formé du produit de deux nombres entiers, a et b, on laissera de côté ceux des diviseurs de $10^p - 1$ qui sont diviseurs de $10^a - 1$, ou de $10^b - 1$, et ainsi de suite.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève au Lycée Fontanes.

On considère trois circonférences passant par un même point et se coupant deux à deux sur une droite : 1° par un point de cette droite, on mène une tangente à chacune des trois circonférences ; les points de contact de ces tangentes et le point commun aux trois circonférences sont sur une même circonférence ; 2° les points diamétralement opposés au point commun dans les trois circonférences sont sur une même circonférence avec ce point commun.

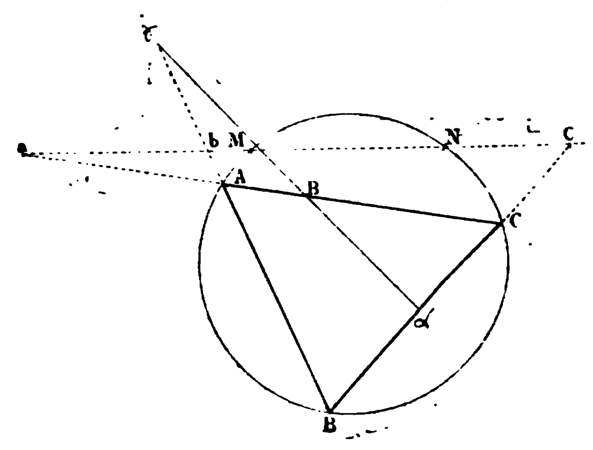
1°. Transformons par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle le point commun aux trois circonférences et un module quelconque.

Les trois circonférences se transforment en trois droites. Comme ces circonférences se coupaient deux à deux sur une droite, leurs transformées se coupent deux à deux sur une circonférence passant par le pôle. L'inverse du point d'où on menait les tangentes se trouve sur cette circonférence. Quant aux tangentes qui étaient issues de ce point, elles se transforment en circonférences passant par le pôle et l'inverse de leur point de concours, et tangentes aux trois droites en lesquelles se sont transformées les circonférences primitives.

Si donc les points de contact primitifs se trouvaient sur

une même circonférence avec le point que nous avons pris pour pôle, leurs inverses seront en ligne droite; tout revient donc à démontrer cette dernière proposition, c'est-à-dire que *si on prend deux points sur la circonférence circonscrite à un triangle et que par ces points on fasse passer des circonférences tangentes respectivement aux trois côtés du triangle, les points de contact sont en ligne droite.*

Soient M et N les points donnés sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, α, β et γ les points de tangence



des circonférences décrites sur MN avec les côtés qu'elles touchent respectivement.

Je dis que $\alpha\beta\gamma$ est rectiligne.

L'un des cercles de corde MN étant tangent à AC en β, on a

$$\overline{a\beta}^2 = aM \times aN.$$

Or
$$aA \times aC = aM \times aN,$$

donc
$$\overline{a\beta}^2 = aA \times aC$$

ou
$$\frac{\beta a}{aC} = \frac{aA}{\beta a}.$$

On verrait de même que

$$\frac{\gamma b}{bA} = \frac{bB}{\gamma b}$$

et que
$$\frac{\alpha c}{cB} = \frac{cC}{\alpha c}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre nous avons

$$\frac{\beta a \times \gamma b \times \alpha c}{aC \times bA \times cB} = \frac{aA \times cC \times bB}{\beta a \times \gamma b \times \alpha c} \qquad (1)$$

Maintenant remarquons que

$$aA \times aC = \overline{a\beta}^2,$$

égalité obtenue précédemment, peut s'écrire

$$aA(aA + A\beta + \beta C) = (aA + A\beta)^2$$

ou $\overline{aA}^2 + aA \times A\beta + aA \times \beta C = \overline{aA}^2 + 2aA \times A\beta + \overline{A\beta}^2$

ou encore $aA \times \beta C = \beta A(\beta A + Aa)$

ou enfin $aA \times \beta C = \beta A \times \beta a$;

d'où

$$\frac{\beta A}{\beta C} = \frac{aA}{\beta a}.$$

On trouverait de même

$$\frac{\gamma B}{\gamma A} = \frac{bB}{\gamma b}$$

$$\frac{\alpha C}{\alpha B} = \frac{cC}{\alpha c}$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre nous avons

$$\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \gamma A \times \alpha B} = \frac{aA \times bB \times cC}{\beta a \times \gamma b \times \alpha c}. \qquad (2)$$

Comparant (1) et (2), on voit que

$$\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \alpha B \times \gamma A} = \frac{\beta a \times \gamma b \times \alpha c}{aC \times bA \times cB}. \qquad (3)$$

Multiplions (2) et (3) membre à membre

$$\left(\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{BC \times \gamma A \times \alpha B}\right)^2 = \frac{aA \times bB \times cC}{aC \times bA \times cB}.$$

Mais la droite abc étant sécante par rapport au triangle ABC, on a

$$\frac{aA \times bB \times cC}{aC \times bB \times cB} = 1.$$

Donc

$$\left(\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \gamma A \times \alpha B}\right)^2 = 1 :$$

ce qui donne

$$\frac{\beta A \times \gamma B \times \alpha C}{\beta C \times \gamma A \times \alpha B} = \pm 1.$$

Mais si on prenait la valeur — 1, cela indiquerait que $A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$ concourent en un même point, ce qui est inadmissible. Il faut donc prendre la valeur + 1 ; par suite la ligne $\alpha\beta\gamma$ est droite.

2° Dans la transformation que nous avons faite de la figure les points diamétralement opposés au point commun sont devenus les pieds des perpendiculaires abaissées du pôle sur les transformées des trois circonférences ; ces points sont en ligne droite d'après le théorème de Simson ; donc leurs inverses sont sur une même circonférence avec le pôle, c'est-à-dire avec le point commun aux trois circonférences données.

THEORÈME DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Descube**, ingénieur.

Si les deux bissectrices d'un triangle sont égales, les deux angles qui leur correspondent sont égaux et le triangle est isoscèle.

Soit ABC un triangle ; BE, CF les deux bissectrices que nous supposons égales : il s'agit de démontrer que l'angle B est égal à l'angle C.

Si les angles B et C ne sont pas égaux, admettons que B soit le plus grand ; l'angle EBC sera aussi plus grand que l'angle FCB ; donc les deux triangles EBC, FCB auront un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, donc on aura :

$$EC > BF.$$

D'un autre côté, par le point F menons une parallèle à BE et par le point E une parallèle à BA, le parallélogramme formé nous donnera

$$FD = BE = FC.$$

Donc le triangle DFC sera isoscèle, par suite l'angle FDC sera égal à l'angle FCD ; mais l'angle FDE qui est égal à FBE est plus grand que l'angle ECF par hypothèse ; donc

par compensation, l'angle EDC est moindre que l'angle ECD : donc EC est moindre que DE ou BF.

Nous arrivons ainsi à une conclusion contradictoire à celle que nous avons déjà obtenue. Donc l'hypothèse de l'inégalité des angles B et C est absurde ; donc

$$B = C;$$

par suite le triangle est isoscèle ; c. q. f. d.

NOTE SUR UNE LIGNE

CONSIDÉRÉE DANS LE TRIANGLE RECTILIGNE

Par M. **M. d'Ocagne,** élève au Lycée Fontanes.

1. Dans un triangle quelconque, considérons la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet ; cette ligne, qui jouit de propriétés intéressantes, sera désignée, dans ce qui suit, par la notation (M'), la lettre M servant à désigner la médiane.

2. *Construction de la ligne* (M'). — Je porte sur le côté AB, de A vers B, une longueur AC' égale à AC, et sur AC, de A vers C, une longueur AB' égale à AB ; il résulte de la définition de la ligne (M') que cette ligne passe par le milieu de B' C' et que ce milieu se trouve facilement avec le compas, lorsque l'on connaît le milieu de BC.

3. Les principales propriétés de la ligne (M'), qui se démontrent avec la plus grande facilité, sont les suivantes, que nous nous contenterons d'énoncer :

a. — *Les distances d'un point quelconque de la ligne* (M') *aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.*

b. — *Les segments déterminés par* (M') *sur le côté opposé sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents.*

c. — *Si le triangle est rectangle, la ligne* (M') *se confond avec la hauteur.*

d. — *Les trois lignes* (M') *d'un triangle concourent au même point.*

e. — *Le point de concours de ces lignes est le barycentre*

des sommets des triangles affectés des coefficients a^2, b^2, c^2, *ou* $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$.

f. — Considérons la ligne (M′) menée par le point A; menons la perpendiculaire AH à cette ligne, et, par le point C, la perpendiculaire CH à AC; ces deux lignes se coupent en H; enfin, menons la perpendiculaire HI sur AB; on a AI = AB.

4. *Relations métriques.* — Soit D′ le point de rencontre de (M′) avec le côté opposé (nous désignons par D le pied de la médiane). Posons

$$BD' = c'; \quad CD' = b';$$

on a

$$c' = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}; \quad b' = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}.$$

Si nous désignons par m' la longueur de la ligne (M′), on a

$$m' = \frac{bc}{b^2 + c^2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Dans le cas où le triangle est rectangle, on trouve

$$m' = \frac{bc}{a},$$

ce qui donne bien la hauteur.

En appelant β l'angle D′AB, γ l'angle D′AC, on trouve

$$\sin\beta = \frac{c \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}}$$

$$\sin\gamma = \frac{b \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}}.$$

En supposant A = 90°, on retrouve les valeurs connues pour le triangle rectangle.

Enfin, en appelant d la distance du côté BC au point de concours des trois lignes (M′), on trouve

$$d = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2},$$

S, étant la surface de ABC.

On trouve des formules analogues pour les distances aux deux autres côtés.

5. **Problème.** — *Construire une parabole, connaissant deux tangentes et leurs points de contact.*



des sommets des triangles affectés des coefficients a^2, b^2, c^2, *ou* $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$.

f. — Considérons la ligne (M') menée par le point A : menons la perpendiculaire AH à cette ligne, et, par le point C, la perpendiculaire CH à AC ; ces deux lignes se coupent en H ; enfin, menons la perpendiculaire HI sur AB ; on a AI = AB.

4. *Relations métriques.* — Soit D' le point de rencontre de (M') avec le côté opposé (nous désignons par D le pied de la médiane). Posons

$$BD' = c' ; \quad CD' = b' ;$$

on a
$$c' = \frac{ac^2}{b^2 + c^2} ; \quad b' = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}.$$

Si nous désignons par m' la longueur de la ligne (M'), on a

$$m' = \frac{bc}{b^2 + c^2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} .$$

Dans le cas où le triangle est rectangle, on trouve

$$m' = \frac{bc}{a},$$

ce qui donne bien la hauteur.

En appelant β l'angle D'AB, γ l'angle D'AC, on trouve

$$\sin \beta = \frac{c \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}}$$

$$\sin \gamma = \frac{b \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}}.$$

En supposant A = 90°, on retrouve les valeurs connues pour le triangle rectangle.

Enfin, en appelant d la distance du côté BC au point de concours des trois lignes (M'), on trouve

$$d = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2},$$

S, étant la surface de ABC.

On trouve des formules analogues pour les distances aux deux autres côtés.

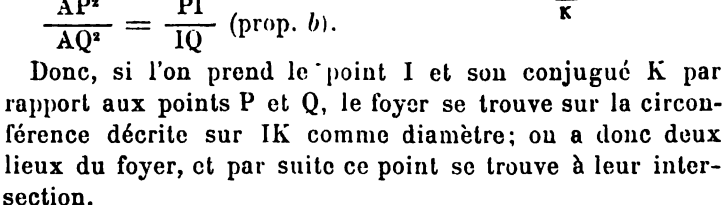
5. **Problème.** — *Construire une parabole, connaissant deux tangentes et leurs points de contact.*

Soient PP' et QQ' les deux tangentes, dont les points de contact sont P et Q; appelons F le foyer; on sait que

$$\text{PFQ} = 2\text{P'AQ};$$

on a donc un premier lieu du foyer en décrivant sur PQ un segment capable du double de l'angle P'AQ. De plus, on a

$$\frac{\text{AP}^2}{\text{AQ}^2} = \frac{\text{FP}}{\text{FQ}}.$$



D'autre part, si nous menons la ligne (M') du triangle PAQ, et que I soit le point où elle rencontre le côté PQ, on a

$$\frac{\text{AP}^2}{\text{AQ}^2} = \frac{\text{PI}}{\text{IQ}} \text{ (prop. } b\text{)}.$$

Donc, si l'on prend le point I et son conjugué K par rapport aux points P et Q, le foyer se trouve sur la circonférence décrite sur IK comme diamètre; on a donc deux lieux du foyer, et par suite ce point se trouve à leur intersection.

6. **Théorème.** — *Si* L *est un point d'une lemniscate, dont les pôles sont* P *et* P', *la ligne* (M') *issue du point* L *dans le triangle* PLP' *est normale à la courbe en* L.

On sait, d'après la définition de la lemniscate, que la tangente à la courbe se construit de la manière suivante : on prend IL = LP'; on mène à LI une perpendiculaire par le point I, et à MP une perpendiculaire par le point P; ces lignes se coupent en T; LT est la tangente cherchée. Je dis que la perpendiculaire LN à LT n'est autre chose que la ligne (M') du triangle LPP'.(*)

En effet, si du point N nous abaissons des perpendiculaires NH et NH' sur LP et LP', nous avons

$$\text{LT} = \frac{\text{LI}}{\cos \text{ILT}} = \frac{\text{LP}}{\cos \text{PLT}}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

même sens. Donc PMA = AMN comme ayant mêmes mesures que PCA et ABN et AM est bissectrice de l'angle PMN. On verrait de même que les deux autres hauteurs sont bissectrices des angles P et N. Donc pour construire le triangle cherché, il suffira de mener les bissectrices du triangle PMN, qui donneront par leurs intersections avec le cercle circonscrit les sommets du triangle cherché.

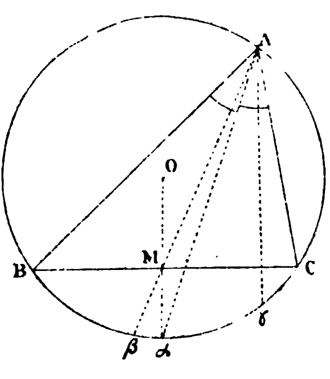
Nota : Ont résolu la même question : MM. Boulogne, de Saint-Quentin; Tricon, à Marseille; Darmandieu, à Mont-de-Marsan; Tinel, au Havre; Bonneville, à Toulouse; Marin, à Agen; Daguillon, lycée Henri IV; Joly, à Tarbes; Roubault, à Melun; Huet, à Orléans; Heurtaux, à Nantes; Bois, à Montauban; Jourdan, à Rouen; Callon, lycée Louis-le-Grand; Giroud, à Marseille; Pecquery, au Havre; Benard, à Châteauroux; Cavrais, à Toulouse; Hugot, Mathey, à Lyon; Gino Loria, à Mantoue; Marge, lycée Charlemagne; Malcor, à Toulon; H. Bourget, à Aix; Deslais, Cottereau, au Mans; de Brévans, à Besançon; Lesoille, école de Cluny; van Aubel, à l'Athénée de Liège.

QUESTION 232

Solution par M. Hugot, élève du Lycée de Lyon.

Construire un triangle, connaissant les points de rencontre α, β, γ, du cercle circonscrit avec la bissectrice, la médiane et la hauteur issues d'un même point.

Soit O le centre du cercle circonscrit. En menant par le point γ une parallèle à Oα on obtient en A le sommet du triangle d'où sont issues les trois droites ayant leur pied en α, β, γ. Joignant Aβ, on obtient par son intersection avec Oα un point M du côté opposé au sommet A. Il suffit pour avoir ce côté BC de mener par M une perpendiculaire à Oα. On obtient ainsi les sommets B et C et le triangle est construit.



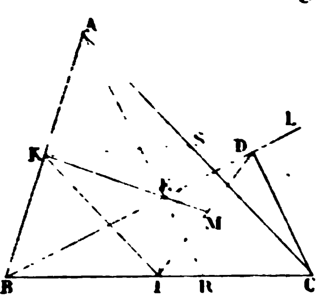
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, Labro, de Saint-Quentin ; Tricon, Giroud, à Marseille ; Darmandieu, Jacquillat, Renaud, à Bordeaux ; Bonneville, Gros, Cavrais, à Toulouse ; Marin, à Agen ; Mangeot, à Nancy ; Gino-Loria, à Mantoue ; Mathey, à Lyon ; Lacau, à Toulon ; Tranier, à Toulouse ; H. Bourget, à Aix ; de Brévans, à Besançon ; Joly, Letellier, à Tarbes ; Roubault, à Melun ; Pecquery, au Havre ; Heurtaux, à Nantes ; O'Langer, à la Martinique ; Bois, à Montauban ; Lafitte, à Rouen ; Callon, lycée Louis-le-Grand ; Montéron, à Pau ; Deslais, au Mans ; Losoille, école de Cluny ; Manger, lycée Charlemagne, à Paris ; Benard, à Chateauroux.

QUESTION 242

Solution par M. Poinsrac, élève du Lycée de Niort.

On donne un triangle ABC; *une droite* BL *pivote autour du sommet* B. *On abaisse des perpendiculaires* AE, CD *des deux autres sommets sur cette droite. On joint le point* E *au milieu* K *de* AB, *et le point* D *au milieu* I *de* BC. *Trouver le lieu du point de rencontre* M *des deux droites* KE *et* DI.

Considérons l'angle KMI. Il est extérieur au triangle DEM. Par suite (1) KMI = MED + EDM ; or MED = KEB = KBE, car le triangle KBE est isoscèle, la droite KE étant médiane du triangle rectangle AEB et par suite égale à la moitié BK de l'hypoténuse. Pour la même raison BDI est un triangle isoscèle et BDI = DBI, donc en remplaçant dans (1) KMI = B. Dès lors le lieu du point M sera un segment capable de l'angle B construit sur la droite KI comme corde. Ce segment passant par le milieu S du côté AC, puisque l'angle KSI est égal à l'angle B et que ses côtés passent par les points K et I, appartiendra au cercle des neuf points du triangle ABC.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Maret, Callon, du lycée Louis-le-Grand ; Mayon, Daguillon, du lycée Henri IV ; Bonneville, de Toulouse ; Mangeot, de Nancy ; Roubault, de Melun ; Letellier, de Tarbes ; Deslais, au Mans ; Huet, à Orléans ; Malcor, à la Seyne, près Toulon.

QUESTION 248

Solution par M. GIROUD, élève du Lycée de Marseille.

Dans un quadrilatère ABCD *nous désignerons par* a, b, c, e *les côtés;* d *et* d' *les diagonales,* ω *leur angle,* h_1 *et* h_2 *les perpendiculaires abaissées des sommets sur la diagonale* d *et* h_3 h_4 *les perpendiculaires abaissées sur la diagonale* d. *Démontrer les formules*

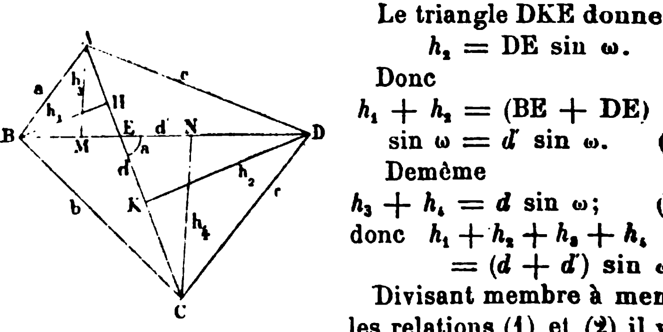
$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (d + d') \sin \omega$$

$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h^4} = \frac{d'}{d}$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{(h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{\sin \omega}$$

$$h_1\, h_2\, h_3\, h_4 = \frac{a^2\, b^2\, c^2\, e^2}{d^2\, d'^2} \sin A \sin B \sin C.$$

Le triangle BHE donne $h_1 = \text{BE} \sin \omega$.



Le triangle DKE donne $h_2 = \text{DE} \sin \omega$. Donc $h_1 + h_2 = (\text{BE} + \text{DE}) \sin \omega = d' \sin \omega$. (1)

Demême $h_3 + h_4 = d \sin \omega$; (2) donc $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = (d + d') \sin \omega$.

Divisant membre à membre les relations (1) et (2) il vient

$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h_4} = \frac{d'}{d}.$$

La surface de ABC est $\frac{dh_1}{2}$; celle de DAC est $\frac{dh_2}{2}$; celle du quadrilatère est donc $\frac{d}{2}(h_1 + h_2)$.

Or de (2) on tire $d = \dfrac{h_3 + h_4}{\sin \omega}$,

donc $S = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{\sin \omega}$.

En exprimant de deux manières la surface du triangle ABC, on a $dh_1 = ab \sin B$; d'où $h_1 = \dfrac{ab}{d} \sin B$. On trouverait de même $h_2 = \dfrac{ce \sin D}{d}$, $h_3 = \dfrac{ae}{d} \sin A$, $h_4 = \dfrac{bc}{d'}$ sin C.

Multipliant membre à membre il vient

$$h_1\, h_2\, h_3\, h_4 = \frac{d'^2\, b^2\, c^2\, e^2}{b^2\, d^2} \sin A \sin B \sin C \sin D.$$

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Bompard, collège Stanislas; Gossieaux, Boulogne, à Saint-Quentin; Huet, à Orléans; Monterou, à Pau; Callon, lycée Saint-Louis; Baron, à Dinan; Hugot, à Lyon; Marin, à Agen; Blessel, à Paris; Gino Loria, à Mantoue; Daguillon, lycée Henri IV; Bonneville, à Toulouse; Bernard, à Pons; Vivant et Bertin, à Lons-le-Saulnier; Tinel, au Havre; Joly, Letellier, Grazides, à Tarbes; Vazou, collège Rollin; Tricon, à Marseille; Deslais, au Mans; Marit, lycée Louis-le-Grand; Payeux, à Verdun; Lacan, collège de la Seyne (Var).

QUESTION 249

Solution par M. Henri Bois, élève du Lycée de Montauban.

Si dans un triangle un angle C *est double d'un autre* A, *la projection du côté* BC *sur la bissectrice intérieure de l'angle* C *est égale à la moitié du côté* AB.

Soit $C = 2A$.

Il faut montrer que

$$2CH = AB.$$

En effet, $$CH = BC \cos A$$

et $$\frac{AB}{\sin 2A} = \frac{BC}{\sin A},$$

d'où $$AB = 2BC \cos A.$$

On a donc bien $$AB = 2CH.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Boucheaux, d'Angers; Gossieaux, Boulogne, de Saint-Quentin; Bompard, collège Stanislas; Bernard, Roux, à Pons; Huet, à Orléans; Vautier, école Sainte-Geneviève, Paris; Martin, à Passy; Weywada, à Albi; Montérou, à Pau; Talbourdeau, à Moulins; Tinel, au Havre; Giroud, à Marseille; Baron, à Dinan; Hugot, à Lyon; Marin, à Agen; Blessel, à Paris; Gino-Loria, à Mantoue; Daguillon, lycée Henri IV; Bonneville, à Toulouse; Vivant et Bertin, à Lons-le-Saunier; Lacan, à Toulon; Tricon, à Marseille; Lachesnais, à Versailles; Marit, lycée Louis-le-Grand; Letellier, Joly à Tarbes; Deslais, au Mans; de Brévans, à Besançon; Payeur, à Verdun.

QUESTION 250.

Solution par M. Weywada, élève du Lycée d'Albi.

Si dans un triangle la bissectrice intérieure d'un angle est égale à l'un des côtés de l'angle, la projection de l'autre côté sur cette bissectrice est égale à la somme des côtés de l'angle.

(Launoy.)

Soit AD la bissectrice de A, égale à AB et AE la projection de AC sur AD. On doit avoir $AE = \frac{AB + AC}{2}$ ou $AD + DE = \frac{AB + AC}{2}$ et comme $AB = AD$, $2AD + 2DE = AD + AC$ ou $AD + 2DE = AC$.

Prolongeons AD d'une longueur $EF = DE$; il faut prouver que $AF = AC$.

Les deux triangles rectangles DEC, CEF sont égaux (EC commun, $DE = EF$), donc $EFC = EDC$; or $EDC = BDA$, donc $EFC = BDA$.

Les deux triangles ABD et FCA ont deux angles égaux chacun à chacun ($BAD = DAC$, $AFC = ADB$) ; dès lors ils sont semblables, et l'on a $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AB}$; or $AD = AB$, donc $AC = AF$.

Nota : La même question a été résolue par MM. Tinel, élève du lycée du Havre; Blessel, conducteur des ponts et chaussées; Libmann, Bompard, collège

Stanislas; Roux, Bernard, à Pons; Letellier, Joly, à Tarbes; Lesoille, école de Cluny; Boulogne, à Saint-Quentin; Huet, à Orléans; Tricon, Giroud, à Marseille; Marin, à Agen; Gino-Loria, à Mantoue; Daguillon, au lycée Henri IV; Bonneville, à Toulouse; Lacan, à Toulon; Deslais, au Mans; de Brévans, à Besançon; Bois, à Montauban; Payeur, à Verdun.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE POITIERS

— Décomposer en facteurs du premier degré l'expression

$$28x(x+1)-105;$$

étudier sa variation lorsque x prend toutes les valeurs possibles.

— On joint les milieux de deux côtés consécutifs d'un rectangle ; on en détache le triangle rectangle qui a la droite ainsi menée pour hypoténuse. Trouver le centre de gravité de l'aire restante.

— Trois nombres en progression arithmétique sont tels que la somme des carrés des deux premiers égale le carré du troisième. Le premier étant a, quels sont les deux autres ?

— Exprimer x au moyen de a et de b, sachant que l'on a

$$x = y^3 + 3ay$$
$$y = \sqrt[3]{b+\sqrt{b^2+a^3}} + \sqrt[3]{b-\sqrt{b^2+a^3}}$$

— Le nombre π égale 3,1415926... Combien de chiffres décimaux exacts pourra-t-on obtenir à la racine carrée, en remplaçant ce nombre incommensurable par 3,1416 ?

— Inscrire dans une sphère de rayon R un cylindre dont la surface totale soit équivalente à cellé d'un cercle de rayon m.

— D'un point A, situé dans le plan d'un cercle de rayon R, à une distance d du centre, on mène une sécante AD faisant un angle α avec le diamètre OA Aux points C et D, où cette sécante coupe la circonférence, on mène les tangentes, qui se coupent en B. Déterminer, au moyen des données d et α : 1° la longueur OB; 2° la longueur AB; 3° la position de la projection b du point B sur OA; 4° l'angle BDA par une de ses lignes trigonométriques.

— Sur les quatre arêtes latérales d'un parallélépipède droit on prend, à partir de la base, quatre longueurs a, b, c, d; quelle est la condition pour que les quatre points ainsi déterminés soient situés dans un même plan ? Expression du volume du parallélépipède tronqué ainsi formé.

— Quatre forces, situées dans un même plan, et d'intensités 1, 2, 3, 4, sont appliquées au même point. En faisant tourner la première autour de ce point de 30°, elle coïnciderait avec la seconde; à partir de cette position, une rotation de 90° dans le même sens l'amènerait sur la troisième; enfin, une nouvelle rotation de 30° la conduirait sur la quatrième. Calculer l'intensité de la résultante, et l'angle qu'elle fait avec la première force.

— Résoudre les équations

$$l - bz + cy = 0,$$
$$m - cx + az = 0,$$
$$t - ay + bx = 0,$$
$$ax + by + cz = 0,$$

où les inconnues sont x, y, z et t.

— **Résoudre les équations**

$$\sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x},$$
$$3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x}.$$

— **Calculer les angles d'un triangle dont les côtés sont 984, 1537 et 1825.**

— **La distance au Soleil de la planète Uranus est 19,183, celle de la Terre étant 1; calculer la durée de la révolution sidérale d'Uranus, celle de la Terre étant 365^{jm},256.**

— **La hauteur d'une pyramide hexagonale régulière est égale au côté de la base, trouver le cosinus de l'angle de deux faces latérales adjacentes.**

— **La déclinaison du soleil est 19°25′ boréale, et, à Paris, un cadran solaire indique 3^h,20^m après midi; quelles sont les coordonnées géographiques du lieu où le soleil paraît au zénith?**

— **Construire un cercle concentrique à un cercle de rayon R, et tel que la couronne soit moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux cercles.**

FACULTÉ DE BORDEAUX

Examens de Pau en août 1880.

— **L'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à a; la somme des deux autres côtés est égale à b. Calcul de ces côtés et discussion de la formule; calcul d'un angle aigu. Application : $a = 950$; $b = 1080$.**

— **Trouver la raison d'une progression arithmétique dont le premier terme est a, sachant que la somme des n premiers termes est égale à $2n$ fois le tiers du n^e terme. Application : $a = 10$; $n = 101$. On vérifiera le résultat trouvé.**

FACULTÉ DE MONTPELLIER

— Résoudre le système

$$x + y = mz$$
$$x^2 + y^2 = nz^2$$
$$x^3 + y^3 = a^3 - z^3.$$

— **Résoudre par rapport à x l'équation**

$$x^2 - 2x\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 0;$$

calculer la valeur numérique des racines dans le cas où l'on a

$$\alpha = 20°42'17'',$$

et aussi dans le cas où l'on a $\alpha = 69°17'43''$.

— **Trouver un arc x tel que**

$$\sin x + \cos x = m;$$

calculer les valeurs numériques des racines dans le cas où $m = \frac{4}{3}$.

— **Résoudre** $a^2x^2 - a^2x + a - 1 = 0$

et indiquer comment varient les racines quand on donne à a toutes les valeurs possibles.

— **Résoudre** $\cos x = 2 \operatorname{tg} x$.

— **Calculer la base et les angles d'un triangle isoscèle, sachant que le côté est égal à 2^m, et la surface à 1^m carré.**

— **On a deux cylindres dont l'un a pour rayon x et pour hauteur y, et l'autre**

a pour hauteur x et pour rayon y ; déterminer x et y sachant que les surfaces totales de ces cylindres sont équivalentes, la première à la surface d'un cercle de rayon m, et la seconde à la surface d'un cercle de rayon n.

FACULTÉ DE PARIS

— Partager un angle donné a, moindre que 90°, en deux parties telles que la somme de leurs tangentes soit un minimum.

— On donne l'hypoténuse $BC = a$ d'un triangle rectangle et l'angle B ; on suppose que le triangle tourne autour de l'hypoténuse ; on demande de calculer en fonction de a et de B : 1° la somme des surfaces engendrées par chacun des côtés de l'angle droit ; 2° le volume engendré par le triangle ABC ; 3° le maximum de ce volume quand B varie.

— Démontrer que les droites qui joignent les milieux de deux arêtes non contiguës d'un tétraèdre passent toutes les trois par un même point, et que la distance de ce point à chacune des faces est égale au quart de la hauteur correspondante.

— On partage un angle de 60° en deux parties telles que le sinus de l'une soit le double du sinus de l'autre ; trouver les valeurs de ces deux sinus.

— Déterminer la quantité a de façon que dans l'équation

$$x^2 - \frac{15\,x}{4} + a^3 = 0$$

l'une des racines soit le carré de l'autre.

— On considère un triangle ABC, le point D, milieu de BC, et la médiane AD. Trouver sur cette médiane un point M tel que la somme

$$MA^2 + MB^2 + MC^2$$

soit maxima.

— Calculer la surface d'un cercle, sachant que la surface du dodécagone régulier inscrit est de 1 mètre carré.

— On donne par ses traces un plan parallèle à la ligne de terre ; on donne aussi les projections horizontales de deux droites parallèles situées dans ce plan ; construire leur distance.

— Résoudre l'équation $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1880. COMPOSITIONS SUPPLÉMENTAIRES

Mathématiques.

1. — Calculer les angles x compris entre 0 et 180 donnés par la formule

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

dans laquelle on a

$$\alpha = 27°43'17''$$
$$\beta = 49°18'36''$$

2. — Résoudre l'équation

$$(x - a)(x - b)(x - c) + abc = 0$$

dans laquelle on suppose a, b, c positifs. Les quantités b et c ayant une valeur fixe, entre quelles limites a doit-il être compris pour que les racines soient réelles ?

3. — On donne un demi-cercle et un point P sur le diamètre AB, et on demande de déterminer sur la circonférence un point M tel que, en menant les cordes MA, MB et les parallèles PN, PQ à ces cordes le périmètre MNPQ soit maximum.

Géométrie descriptive.

Étant donnés : un point O situé à 45 millimètres au-dessus du plan horizontal et à 75 millimètres en avant du plan vertical, et le plan passant par le point O et la ligne de terre on demande :

1° De construire les projections d'un tétraèdre régulier s'appuyant par sa base sur le plan donné de telle sorte que le centre de cette base soit au point O; la longueur de l'arête étant de 70 millimètres ;

2° De faire tourner le plan donné d'un angle de 90° autour de la verticale passant par le sommet du tétraèdre;

3° De construire les projections du solide dans cette nouvelle position.

SUR LES TANGENTES AUX POINTS DOUBLES
DE L'INTERSECTION DES SURFACES

Par M. **Songaylo**, examinateur d'admission à l'École centrale des Arts et Manufactures.

(*Suite*, voir page 502.)

Problème. — *Construire les tangentes aux points doubles de l'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques.*

Considérons deux cônes ayant un plan tangent commun P (*fig.* 2). Soient : S, S_1 leurs sommets ; Sδ, $S_1\delta$ les génératrices suivant lesquelles P touche, respectivement, chacune de ces surfaces.

Nous allons, tout à la fois, démontrer que le point δ, en lequel P touche les deux cônes, est un point double de leur intersection et chercher les tangentes en ce point. Pour atteindre simultanément ces deux buts, il suffit de construire les tangentes à la courbe d'intersection en δ, et de constater que le problème offre deux solutions. Ces tangentes sont nécessairement dans le plan tangent commun P ; il est

d'ailleurs manifeste qu'elles se confondent avec les tangentes à la projection sur P de la courbe commune aux deux cônes. Nous chercherons donc simplement ces dernières. Conduisons par δ deux plans perpendiculaires au plan tangent P et soient : δx, δx_1 les traces de ces plans sur P ;

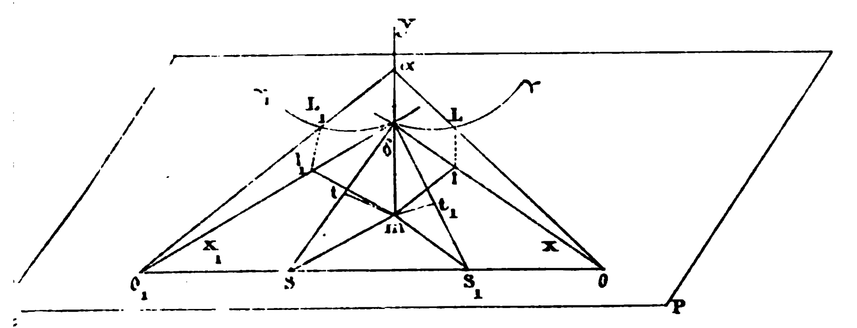


Fig. 2.

γ, γ_1 les courbes suivant lesquelles ils coupent respectivement les cônes de sommets S, S_1 ; δy l'intersection des plans perpendiculaires au plan P, qui est elle-même perpendiculaire à ce plan, et, finalement, θ, θ_1 les points en lesquels la ligne qui unit S, S_1 coupe, respectivement, les plans des courbes γ, γ_1.

Nous adopterons γ, γ_1 pour bases respectives des cônes et nous construirons, par la méthode générale, un point de la projection sur P de leur ligne commune. Pour le faire, conduisons, par θ, θ_1 et un point α, placé sur y et voisin de δ, un plan sécant auxiliaire ; lequel donne : sur les plans des bases, les droites $\theta\alpha$, $\theta_1\alpha$; sur les bases elles-mêmes les points L, L_1, que l'on projette sur P en l, l_1 ; enfin, sur les cônes, des génératrices, dont les projections sl, s_1l_1 se croisent au point m cherché.

Traçons la droite δm et observons que, puisqu'on connaît le point δ, tout se réduit à déterminer la limite de la direction de δm, lorsque m tend vers δ. On le fera en menant par m des droites mt, mt_1 respectivement parallèles à $\theta\delta$, $\theta_1\delta$; puis en cherchant la limite du rapport de ces deux lignes, que nous désignerons, la première mt, par p, l'autre mt_1 par p_1.

Soient $y = f(x)$
$y_1 = \varphi(x_1)$
les équations des courbes γ, γ_1 rapportées, respectivement, aux axes $y\delta x$, $y\delta x_1$, et (x, y), (x_1, y_1) les coordonnées des points L, L_1. La similitude des triangles donne :

$$\frac{mt}{\delta l} = \frac{St}{S\delta},$$

$$\frac{mt_1}{\delta l_1} = \frac{S_1 t_1}{S_1 \delta};$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{p}{x} = \frac{St}{S\delta},$$

$$\frac{p_1}{x_1} = \frac{S_1 t_1}{S_1 \delta};$$

en divisant membre à membre ces deux dernières relations on a

$$\frac{p}{p_1} \cdot \frac{x_1}{x} = \frac{St}{S\delta} : \frac{S_1 t_1}{S_1 \delta}.$$

Lorsqu'on fait tendre x vers δ, les points m, t, t_1 tendent aussi vers δ, et les rapports du second membre de la dernière égalité ont 1 pour limite, ce qui permet d'écrire la relation

$$\lim \frac{p}{p_1} = \lim \frac{x}{x_1}. \qquad (5)$$

D'autre part, on l'a vu, la formule (1) peut s'écrire

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{\text{IV}}(0)$$

$$\dots + \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^n(0) + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} f^{n+1}(\theta x) \qquad (6)$$

$$\frac{y_1}{x_1^2} = \frac{1}{1 \cdot 2} \varphi''(0) + \frac{x_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(0) + \frac{x_1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi^{\text{IV}}(0) \dots$$

$$+ \frac{x_1^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^n(0) + \frac{x_1^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} \varphi^{n+1}(\theta_1 x_1) \qquad (7)$$

La similitude des triangles donne encore

$$\frac{y}{\delta x} = \frac{\theta l}{\theta \delta},$$

$$\frac{y_1}{\delta x} = \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1 \delta_1};$$

on en déduit $$\frac{y}{y_1} = \frac{\theta l}{\theta\delta} : \frac{\theta_1 l_1}{\theta_1 \delta},$$

et, par suite, $$\lim \frac{y}{y_1} = 1.$$

Or, on l'a déjà vu (2), des équations (6) et (7) on tire, en général,
$$\lim \frac{y}{x^2} = \frac{f''(o)}{1 \cdot 2},$$
$$\lim \frac{y_1}{x_1^2} = \frac{\varphi''(o)}{1 \cdot 2},$$
d'où l'on déduit
$$\lim \frac{y_1}{y} \cdot \lim \frac{x^2}{x_1^2} = \frac{\varphi''(o)}{f''(o)}$$
ou encore, puisque $\lim \frac{y_1}{y} = 1$,
$$\lim \frac{x}{x_1} = \pm \sqrt{\frac{\varphi''(o)}{f''(o)}}.$$

En remplaçant dans (5) $\lim \frac{x}{x_1}$ par sa valeur, il vient
$$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \sqrt{\frac{\varphi''(o)}{f''(o)}}.$$

Reprenons la formule (4) de la précédente question
$$f''(o) = \frac{1}{\rho \cos \beta},$$
dans laquelle β (*fig. 1*) représente l'angle de la normale à la courbe μ', en m', avec l'axe $m'y$, et observons que cette formule est applicable aux courbes γ, γ_1 (*fig. 2*), à la condition toutefois de supposer β nul. Alors, en désignant par ρ et par ρ_1 les rayons de courbure, en δ, des courbes γ, γ_1, nous aurons
$$f''(o) = \frac{1}{\rho},$$
$$\varphi''(o) = \frac{1}{\rho_1}:$$
d'où l'on déduit $$\frac{\varphi''(o)}{f''(o)} = \frac{\rho}{\rho_1}$$
et, par suite, $$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}}.$$

Telle est la formule cherchée; elle montre que le point δ est un point double et va servir à la construction des tangentes en ce point. Cette formule peut s'écrire

$$\lim \frac{p}{p_1} = \pm \frac{\sqrt{\rho\rho_1}}{\rho_1},$$

le tracé ne saurait maintenant offrir aucune difficulté. Opérons dans le plan tangent commun P; rien ne serait plus simple ensuite que de projeter sur un plan quelconque la figure que nous allons construire.

Soient SS, $S_1\delta$ les deux génératrices de contact qui

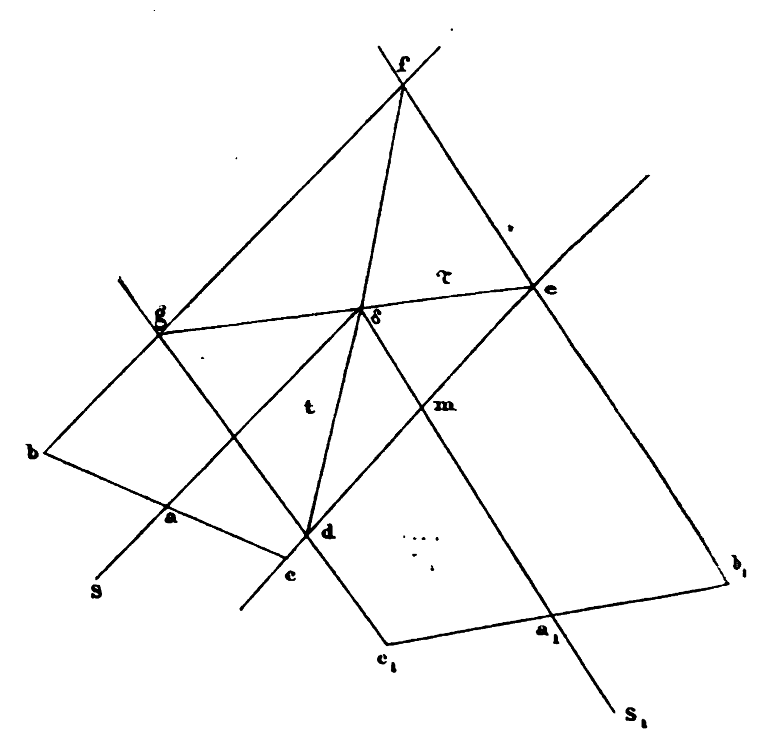


Fig 3.

se croisent au point double δ (*fig. 3*). Construisons $\sqrt{\rho\rho_1}$; après quoi, par un point a, pris arbitrairement sur Sδ,

menons une parallèle à la trace du plan de la courbe γ sur celui de la figure et portons sur cette ligne, de part et d'autre de a, deux longueurs ab, ac égales à $\sqrt{\rho\rho_1}$; puis, par b, c, tirons des parallèles à $S\delta$.

Opérons de même pour l'autre cône, mais en remplaçant cette fois $\sqrt{\rho\rho_1}$ par ρ_1.

Les couples de parallèles ainsi tracées forment un parallélogramme $defg$, dont les diagonales δt, $\delta\tau$ sont les tangentes cherchées.

Pour exécuter ce tracé, nous avons dû recourir aux rayons de courbure de deux bases placées dans des plans perpendiculaires au plan tangent commun ; le théorème qui suit permet de le rendre indépendant de l'orientation des bases.

Théorème de Meusnier. (Ce théorème, que nous nous bornerons à considérer dans le seul cas des surfaces coniques, est encore vrai pour une surface quelconque). — *Dans toute surface conique, le rayon de courbure d'une section oblique est la projection du rayon de courbure de la section normale qui a même tangente.*

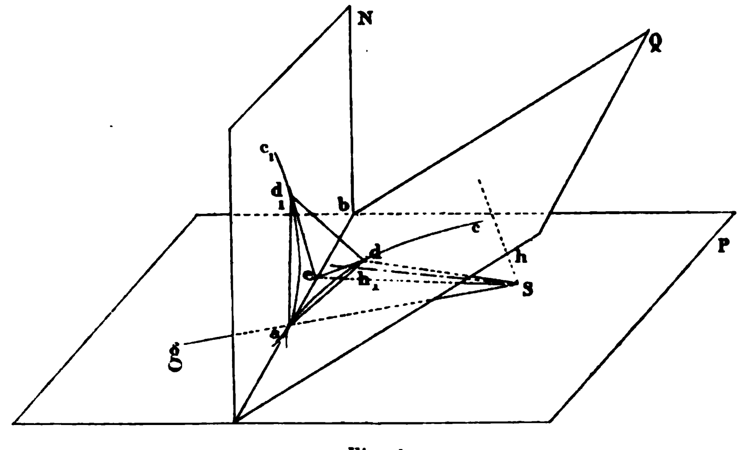


Fig. 4.

Soient (*fig. 4*) : Q le plan de la base ou d'une section oblique de la surface conique ; c la base elle-même ou la

section oblique ; S le sommet de la surface et Sg sa génératrice de contact avec l'un P de ses plans tangents.

Les plans P, Q se coupent suivant la tangente ab, à la courbe c, au point a. Par ab conduisons un plan N perpendiculaire à P et considérons la section e_1 avec le cône.

Prenons deux points, l'un d sur la courbe c, l'autre e sur la tangente ab, et tous deux voisins de a ; tirons la génératrice Sd et désignons par d_1 sa rencontre avec c_1 ; traçons enfin la droite qui unit S, e, ainsi que les triangles aed, aed_1. Nous désignerons encore respectivement par (Ω, Ω_1), (R, R_1) les aires de ces triangles et les rayons des cercles qui leur sont circonscrits.

On aura
$$4\Omega R = ae \,.\, ed \,.\, ad,$$
$$4\Omega_1 R_1 = ae \,.\, ed_1 \,.\, ad_1,$$
en divisant ces égalités membre à membre, on trouve
$$\frac{\Omega}{\Omega_1} \cdot \frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \cdot \frac{ad}{ad_1}. \tag{8}$$

La comparaison des pyramides Sade, Saed_1 donne à son tour, en appelant h et h_1 les distances du point S aux plans Q et N_1 la relation
$$\frac{\Omega h}{\Omega_1 h_1} = \frac{Sa \,.\, Sd \,.\, Se}{Sa \,.\, Sd_1 \,.\, Se}$$
ou
$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{h_1}{h} \frac{Sd}{Sd_1}.$$

En éliminant $\frac{\Omega}{\Omega_1}$ entre cette dernière relation et (8), on trouve
$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \cdot \frac{ad}{ad_1} \cdot \frac{h}{h_1} \cdot \frac{Sd_1}{Sd} ;$$
mais, d'autre part, on a
$$\frac{ad}{Sd} = \frac{\sin aSd}{\sin daS},$$
$$\frac{Sd_1}{ad_1} = \frac{\sin d_1aS}{\sin aSd} ;$$
en combinant les trois dernières relations, on trouve
$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \cdot \frac{\sin d_1aS}{\sin daS} \cdot \frac{h}{h_1} ;$$
mais, en appelant θ l'angle des plans N, Q, on peut rem-

placer $\frac{h}{h_1}$ par cos θ dans la dernière relation, ce qui donne

$$\frac{R}{R_1} = \frac{ed}{ed_1} \frac{\sin d_1 aS}{\sin daS} \cdot \cos \theta.$$

En faisant d'abord tendre le point e vers a, le rapport $\frac{ed}{ed_1}$ tendra vers $\frac{ad}{ad_1}$, ou vers son égal $\frac{\sin ad_1 d}{\sin add_1}$; si l'on fait ensuite tendre d vers a, les rayons R, R_1 tendront vers les rayons de courbure des courbes C, C_1, que nous désignerions par ρ et par ρ_1, et nous aurons finalement

$$\rho = \rho_1 \cos \theta,$$

ce qui justifie le théorème, attendu que l'angle des plans Q, N est égal à celui des normales en a aux courbes considérées.

Théorème. — *Les tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces coniques forment un faisceau harmonique avec les deux génératrices de ces surfaces qui se croisent en ce point : les couples de rayons conjugués sont, d'une part, les deux tangentes, de l'autre les deux génératrices.*

Considérons la figure 3 et le faisceau $\delta.SS_1 t\tau$. Soit m la rencontre des droites de, δS_1 ; la droite de prolongée coupe à l'infini δS; comme, d'autre part, m est le milieu de de, on voit que les rayons du faisceau considéré déterminent sur une divergente des points de section qui forment une division harmonique, et, par conséquent, que ce faisceau est lui-même harmonique. Ce théorème est évidemment applicable aux projections des rayons du faisceau, et sert, lorsqu'on connaît l'une des tangentes au point double, à trouver l'autre tangente en ce point.

NOTE SUR UNE APPLICATION

DU CALCUL DES DÉTERMINANTS

A CERTAINES QUESTIONS DE MAXIMA ET DE MINIMA

Par M. E.-J. Boquel.

(*Suite et fin*, voir page 460.)

La méthode peut être généralisée.

Nous ferons observer d'abord que l'on a, d'une manière générale,

$$\begin{aligned}&(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)\\ &- (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\ &+ (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2.\end{aligned}$$

En effet, tous les termes du second membre sont différents les uns des autres; ils se trouvent d'ailleurs tous dans le premier membre effectué, et il est facile de voir qu'il n'y en a aucun du premier membre qui manque dans le second. Dans le premier membre, le produit

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

contient n^2 termes; le carré $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$ contient n carrés et $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ doubles produits, de sorte que, dans le premier membre effectué, il reste $n^2 - n = n(n-1)$ carrés, et $\frac{n(n-1)}{2}$ doubles produits. Deux carrés et le double produit correspondant forment un carré parfait $(a_ib_k - a_kb_i)^2$, i et k recevant toutes les valeurs différentes de 1 à $n (i \gtrless k)$; il y a donc autant de ces carrés parfaits que de combinaisons de n lettres, deux à deux, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$; tous les termes du premier membre sont donc employés pour former le second.

— Cela posé, soit une fonction $F(x, y, z, \ldots v)$ de $n-1$

variables indépendantes et telle qu'on puisse la mettre sous la forme de la somme de n carrés de n fonctions linéaires des $n - 1$ variables $x, y, z, \ldots v$, comme il suit

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \ldots v) = & (ax + by + cz + \ldots + kv + l)^2 \\ & + (a'x + b'y + c'z + \ldots + k'v + l')^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + k_{n-1}v + l_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Considérons le déterminant formé avec les coefficients des n fonctions linéaires qui entrent dans la composition de $F(x, y, z, \ldots v)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & k & l \\ a' & b' & c' & \ldots & k' & l' \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & k_{n-1} & l_{n-1} \end{vmatrix}$$

et supposons ce déterminant différent de zéro.

Ordonnons-le par rapport aux éléments de la dernière colonne, il prendra la forme

$$\Delta = Ll + L'l' + \ldots L_{n-1}\, l_{n-1}.$$

$L, L', \ldots L_{n-1}$ étant des constantes, le minimum de F a évidemment lieu pour les mêmes valeurs de $x, y, z, \ldots v$ que le minimum de l'expression

$$(L^2 + L'^2 + \ldots + L^2_{n-1})\, F(x, y, z, \ldots v).$$

Désignons par $A, A', \ldots A_{n-1}$ les n fonctions linéaires

$$ax + by + cz + \ldots + l, \quad a'x + b'y + c'z + \ldots l'$$
$$\ldots, a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + l_{n-1}$$

on a identiquement, en vertu de l'observation faite plus haut:

$$\begin{aligned} & (L^2 + L'^2 + \ldots + L^2_{n-1})(A^2 + A'^2 + \ldots + A^2_{n-1}) \\ & - (AL + A'L' + \ldots + A_{n-1}\, L_{n-1})^2 = (LA' - LA')^2 \\ & + (LA'' - AL'')^2 + \ldots + (L_{n-2}\, A_{n-1} - A_{n-2}\, L_{n-1})^2 \end{aligned}$$

La quantité $AL + A'L' + \ldots + A_{n-1}\, L_{n-1}$ est précisément le déterminant Δ; car si, dans ce déterminant, on multiplie les éléments de la première colonne par x, ceux de la seconde par y, etc., enfin ceux de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ par v, et qu'on ajoute ces éléments ainsi multipliés aux éléments correspondants de la $n^{\text{ième}}$ colonne, le déterminant nouveau est égal au premier, et l'on a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \ldots & ax + by + cz + \ldots + Kv + l \\ a' & b' & c' \ldots & a'x + b'y + c'z + \ldots + K'v + l' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \ldots & a_{n-1}x + \ldots + K_{n-1}v \\ & & & + l_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & KA \\ a' & b' & c' & \ldots & K'A' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & K_{n-1}A_{n-1} \end{vmatrix}$$

Or, en donnant ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on a précisément :

$$\Delta = AL + A'L' + \ldots + A_{n-1}L_{n-1}$$

puisqu'il ne diffère du proposé que par le changement en A. A', ... A_{n-1} des éléments l, l', l_{n-1} de la colonne par rapport à laquelle on avait primitivement ordonné.

On a donc finalement :

$$(L^2 + L'^2 + \ldots L^2_{n-1})F(x, y, z, \ldots v) = \Delta^2$$
$$+ (LA' - AL')^2 + (LA' - AL'')^2 + \ldots$$
$$+ (L_{n-2}A_{n-1} - A_{n-2}L_{n-1})^2.$$

Cette expression est la somme de $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$ carrés dont l'un est une constante ; son minimum aura donc lieu quand les $\frac{n(n-1)}{2}$ derniers carrés seront nuls (si cela est possible), c'est-à-dire pour les valeurs de $x, y, z \ldots v$ satisfaisant aux équations $LA' - AL' = 0$, $LA'' - AL'' = 0$, ... $L_{n-2}A_{n-1}\ A_{n-2}L_{n-1} = 0$.

Ces $\frac{n(n-1)}{2}$ équations n'en forment réellement que $(n - 1)$ distinctes ; car elles ne sont autre chose que l'égalité des n rapports suivants :

$$\frac{A}{L} = \frac{A'}{L'} = \frac{A''}{L''} = \ldots = \frac{A_{n-1}}{L_{n-1}}.$$

On pourra donc généralement trouver des valeurs de x, y, z, ... v annulant les $\frac{n(n-1)}{2}$ derniers carrés, et pour ces valeurs, l'expression

$$(L^2 + L'^2 + \ldots L_{n-1}^2)F(x, y, z, \ldots v)$$

atteint son minimum, dont la valeur est Δ^2. Le minimum de $F(x, y, z, \ldots v)$ est donc

$$\frac{\Delta^2}{L^2 + L'^2 + \ldots + L_{n-1}^2}.$$

— Cette formule comprend, comme cas particulier, le minimum d'une fonction générale du second degré à $n-1$ variables. Une pareille fonction se ramène, en effet, généralement à la somme de n carrés de n fonctions linéaires, dont la première renferme les $n-1$ variables, la deuxième $n-2$ de ces variables, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière qui est une constante.

Or si l'on a : $F = (ax + by + cz + \ldots + Kv + l)^2 + (b'y + c'z + \ldots + K'v + l')^2 + (c''z + \ldots + K''v + l'')^2 + \ldots + l^2_{n-1}$.

Le déterminant Δ sera :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\,b\,c \ldots K & l \\ o\,b'\,c' \ldots K' & l' \\ o\,o\,c'' \ldots K'' & l'' \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ o\,o\,o \ldots K_{n-2} & l_{n-2} \\ o\,o\,o \ldots o & l_{n-1} \end{vmatrix} = a'b'c'' \ldots K_{n-2}l_{n-1}$$

Les mineurs L, L', L'' ... sont tous nuls jusqu'à L_{n-2} inclusivement, car ils ont tous une ligne entièrement formée d'éléments nuls, quant à L_{n-1}, on a :

$$L_{n-1} = \begin{vmatrix} a\,b\,c \ldots K \\ o\,b'\,c' \ldots K' \\ o\,o\,c'' \ldots K'' \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ o\,o\,o \ldots K_{n-2} \end{vmatrix} = ab'c'' \ldots K_{n-2}$$

La formule $\frac{\Delta^2}{L^2 + L'^2 + \ldots + L^2_{n-1}}$ se réduit donc à

$\frac{a^2b'^2c''^2 \ldots K^2_{n-2}\, l^2_{n-1}}{a^2b'^2c''^2 \ldots K^2_{n-2}}$ c'est-à-dire à l^2_{n-1}. Ce résultat est d'ailleurs évident *à priori*; car les $(n - 1)$ premiers carrés peuvent, en général, être annulés par le système des $n - 1$ valeurs de $x, y, z, \ldots v$ qui vérifient les $n - 1$, équations $ax + by + cz + \ldots + Kv + l = 0$, $b'y + c'z + \ldots + K'v + l' = 0$, ... et pour ces valeurs, la fonction se réduit à l^2_{n-1}.

En appliquant aux fonctions $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ et $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F$, on retrouve les résultats connus.

QUESTION 212

Solution par M. A. Simon, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Soit V *un polynôme entier par rapport à* x ; V_1 *sa dérivée : on peut toujours trouver un polynôme* X_1, *tel que* $X_1V_1 - 1$ *soit divisible par* V ; *soit* V_2 *le quotient. On détermine* V_3 *à l'aide de* V_1 *et de* V_2 *comme on a déterminé* V_2 *à l'aide de* V *et de* V_1, *etc... La suite* $V, V_1, V_2, V_3 \ldots$ *peut remplacer la suite de Sturm si* $V = 0$ *n'a pas de racines égales.* (H. Laurent.)

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $V = 0$ a toutes ses racines inégales.

Cherchons le p. g. c. d. entre V et V_1 ; on aura la série d'égalités

$$V = V_1Q_1 + R_1$$
$$V_1 = R_1Q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Le dernier reste obtenu étant une constante C.

Or de ces égalités on tire

$$R_1 = V - V_1Q_1$$
$$R_2 = V_1(1 + Q_1Q_2) - VQ_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tous les restes seront de la même forme et l'on aura

finalement $C = A_1V_1 - AV$

A et A_1 étant des polynômes entiers en x.

On tire de là $\frac{A}{C} V = \frac{A_1}{C} V_1 - 1,$

ou bien $V_2 V = X_1V_1 - 1$

en posant $\frac{A}{C} = V_2 \quad \frac{A_1}{C} = X_1.$

Comme le polynôme V_2 est entier en x, $X_1V_1 - 1$ est divisible par V. En continuant ainsi on aura la série d'identités :

$$VV_2 = X_1V_1 - 1$$
$$V_1V_3 = X_2V_2 - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{k-1} V_{k+1} = X_k V_k - 1$$

Cela posé, considérons la suite

$$V, V_1, V_2, V_3 \ldots \quad V_k \ldots V_p ;$$

je dis que cette suite peut remplacer la suite de Sturm.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'elle possède les mêmes propriétés que celle-ci.

1° *La dernière fonction* V_p *est constante,* puisque les degrés des fonctions vont en diminuant chaque fois d'au moins une unité et que $V = 0$ et $V_1 = 0$ n'ont pas de racines communes.

2° ***Deux fonctions intermédiaires consécutives ne peuvent pas s'annuler pour la même valeur de* x**; si en effet, pour une certaine valeur de x on a $V_k = 0$, on a $V_{k-1} V_{k+1} = -1$, ce qui exige $V_{k-1} \gtrless 0 \quad V_{k+1} \gtrless 0$.

3° ***Quand une fonction intermédiaire s'annule pour une certaine valeur de* x, *pour cette même valeur de* x *celle qui la précède et celle qui la suit sont de signes contraires.*** En effet, si $V_k = 0$ on a $V_{k-1} V_{k+1} = -1$.

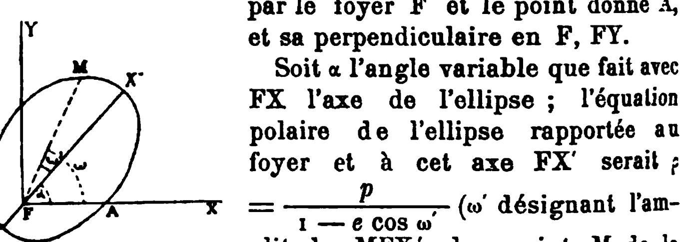
4° ***Le quotient*** $\frac{V_1}{V}$ ***passe du négatif au positif au moment où* x *atteint et dépasse une racine de l'équation*** $V = 0$; V_1 est en effet la dérivée de V.

QUESTION 235

Solution par M. Tissier, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen.

Connaissant un foyer d'une ellipse, l'excentricité et un point, trouver l'enveloppe des directrices.

Prenons pour axes des coordonnées la droite FX passant par le foyer F et le point donné A, et sa perpendiculaire en F, FY.



Soit α l'angle variable que fait avec FX l'axe de l'ellipse ; l'équation polaire de l'ellipse rapportée au foyer et à cet axe FX' serait $\rho = \dfrac{p}{1 - e \cos \omega'}$ (ω' désignant l'amplitude MFX' dun point M de la courbe). Si ω représente l'amplitude relative à l'axe OX, on a $\omega' = \omega - \alpha$, donc l'équation de l'ellipse rapportée à OX est

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \alpha)}.$$

Soit a l'abscisse du point A; pour $\omega = 0$, on a $\rho = a$, ce qui détermine p $\quad p = a(1 - e \cos \alpha)$.

Ceci posé, la directrice correspondant au foyer F a pour équation

$$\rho = -\frac{p}{e \cos(\omega - \alpha)}$$

ou, en remplaçant p par sa valeur trouvée précédemment et repassant aux coordonnées cartésiennes,

$$e(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + a(1 - e \cos \alpha) = 0$$

ou $$(x - a)\cos \alpha + y \sin \alpha + \frac{a}{e} = 0. \qquad (1)$$

L'équation dérivée de cette équation sera

$$-(x - a) \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$$

$$\frac{x - a}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha}. \qquad (2)$$

Si nous éliminons α entre (1) et (2) nous aurons l'équation du lieu demandé. Pour cela, remarquons que l'équation (1) peut s'écrire

$$[(x - a)\cos \alpha + y \sin \alpha]^2 = \frac{a^2}{e^2}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha).$$

Si dans cette équation, homogène en cos α et sin α, on remplace ces deux quantités par $x - a$ et y qui leur sont proportionnelles, on a pour équation du lieu

$$[(x-a)^2 + y^2]^2 = \frac{a^2}{e^2}[(x-a)^2 + y^2]$$

et en supprimant la solution $(x-a)^2 + y^2 = 0$ qui donne le point A, on trouve le cercle

$$(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{e^2};$$

il a pour axe l'axe OX, ce qui était évident par raison de symétrie, et pour centre le point A. D'ailleurs, il coupe OX aux points $x = a \pm \frac{a}{e}$, ce qui achève de le déterminer.

Remarque. — Dans ce qui précède, aucune hypothèse n'a été faite sur la valeur de l'excentricité donnée e, donc il n'est pas nécessaire que la conique considérée soit une ellipse.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

M. Tissier a joint à la solution de la question 235 une note sur une propriété *très connue* des coniques. Sa démonstration étant originale, il nous a paru utile pour nos lecteurs de la donner à la suite de cette question. Cette propriété est la suivante :

L'enveloppe de la corde d'une conique vue du foyer sous un angle constant est une autre conique ayant même foyer et même directrice que la conique donnée.

Soit $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$ l'équation de la conique rapportée à son foyer comme pôle et à son axe focal comme axe polaire. Soit u l'angle donné, α l'amplitude de l'extrémité M de la corde MN et par suite $\alpha - u$ celle de l'extrémité N.

Formons l'équation de la corde MN.

Soit $\rho = \frac{c}{A\cos\omega + B\sin\omega}$ cette équation.

En exprimant qu'elle donne le même ρ que l'équation de

la conique pour $\omega = \alpha$ et $\omega = \alpha - u$, on a les deux relations $Ap \cos \alpha + Bp \sin \alpha = C(1 - e \cos \alpha)$

$Ap \cos (\alpha - u) + Bp \sin (\alpha - u) = C[1 - e \cos(\alpha - u)]$

Si nous y joignons l'équation précédente

$$A\rho \cos \omega + B\rho \sin \omega = C.$$

Nous aurons en éliminant A, B, C entre ces trois équations l'équation cartésienne de la corde MN

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p \cos \alpha & p \sin \alpha & 1 - e \cos \alpha \\ p \cos (\alpha - u) & p \sin (\alpha - u) & 1 - e \cos (\alpha - u) \end{vmatrix} = 0.$$

Si on multiplie les éléments de la dernière colonne par p, qu'on ajoute à ceux de la première multipliés par e, ce déterminant se simplifie et l'équation devient

$$\begin{vmatrix} x & y & p + ex \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 1 \\ \cos (\alpha - u) & \sin (\alpha - u) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ou en développant

$$x[\sin \alpha - \sin (\alpha - u)] + y[\cos (\alpha - u) - \cos \alpha]$$
$$+ (p + ex)[\sin (\alpha - u) \cos \alpha - \sin \alpha \cos (\alpha - u)] = 0$$

ou $2x \sin \frac{u}{2} \cos \left(\alpha - \frac{u}{2}\right) + 2y \sin \frac{u}{2} \sin \left(\alpha - \frac{u}{2}\right)$

$$- 2(p + ex) \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} = 0.$$

En posant $\alpha - \frac{u}{2} = \varphi$ et supprimant les facteurs communs, on a pour équation de la corde MN

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p + ex) \cos \frac{u}{2} = 0. \quad (1)$$

dont la dérivée par rapport à φ est

$$- x \sin \varphi + y \cos \varphi = 0, \text{ ou } \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Éliminons φ entre (1) et (2). Pour cela écrivons (1) sous la forme

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 = (p + ex)^2 \cos^2 \frac{u}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

et remplaçons $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ respectivement par les quantités y et x qui leur sont proportionnelles, on a en supprimant la solution $x^2 + y^2 = 0$, l'équation

$$(x^2 + y^2) = (p + ex)^2 \cos^2 \frac{u}{2},$$

équation d'une conique ayant pour foyer l'origine des coordonnées, c'est-à-dire le foyer de la conique proposée et pour directrice la droite $p + ex = 0$ qui est précisément la directrice de la conique donnée.

QUESTION 243

Solution par M. **Comandré**, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, classe de M. Piéron.

On donne une parabole $y^2 = 2px$, *rapportée aux axes ordinaires: autour de l'origine on fait tourner deux droites rectangulaires, rencontrant la parabole aux points* A *et* B, *et l'on construit une hyperbole* H *ayant pour asymptotes* OA *et* OB *et passant par un point* K *situé sur la bissectrice des axes. Trouver : 1° le lieu des pôles de* AB *par rapport à* H; *2° le lieu* Σ *des points de rencontre de* AB *avec* H. *On cherchera les points de* Σ *qui se trouvent sur les droites* $x = 2p$ *et* $y = x$. *On discutera les différentes formes de la courbe suivant la position de* K *sur la droite* $y = x$.

L'équation de la parabole est

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Un système de deux droites rectangulaires passant par l'origine est $\quad x^2 + 2\lambda xy - y^2 = 0; \qquad (2)$
retranchant (1) de (2), on a

$$x = 0$$

$$x + 2\lambda y - 2p = 0.$$

La dernière équation représente la droite AB; elle passe par le point fixe $y = 2p$. (Th. de Fraigier.)

Soit K ($x = a$, $y = a$) le point fixe, alors l'hyperbole sera $\quad f(x, y) = x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2\lambda a^2 = 0.$

1re Partie. — Soit (α, β) le pôle de AB, on aura

$$\frac{1}{f'\alpha} = \frac{\alpha\lambda}{f'\beta} = \frac{-2p}{f'\gamma},$$

c'est-à-dire $\quad \dfrac{1}{\alpha + \lambda\beta} = \dfrac{\alpha\lambda}{\lambda\alpha - \beta} = \dfrac{p}{\lambda\alpha^2}.$

Éliminant λ entre ces relations, on aura le lieu

$$\lambda = \frac{p\alpha}{a^2 - p\beta}$$

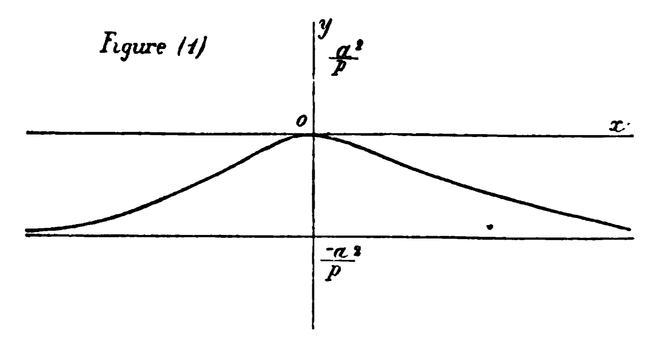
$$2\lambda^2 a^2 = p\lambda\alpha - p\beta;$$

donc
$$2\frac{p^2a^2\alpha^2}{(a^2 - p\beta)^2} = \frac{p^2\alpha^2}{a^2 - p\beta} - p\beta$$

ou
$$pa^2x^2 + px^2y + a^4y - 2a^2py^2 + p^2y^2 = 0,$$

d'où
$$x^2 = -\frac{y(py - a^2)^2}{p(py + a^2)}$$

courbe du 3e degré.



Discussion. — Cette courbe est symétrique par rapport à oy, elle passe à l'origine où elle a pour tangente l'axe ox.

Pour que x soit réel, il faut que y varie entre $-\frac{a^2}{p}$ et o.

Le point $x = 0$, $y = \frac{a^2}{p}$ est un point double isolé de la courbe; pour $y = -\frac{a^2}{p}$, x est infini et pour $y = 0$, $x = 0$.

Donc on a la courbe *fig. 1*.

2e Partie. — Pour avoir les points d'intersection de la droite AB avec l'hyperbole H, il suffit d'éliminer λ entre les équations

(H) $$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2\lambda a^2 = 0,$$

(AB) $$x + 2\lambda y - 2p = 0.$$

On a
$$2\lambda = \frac{2p - x}{y}.$$

Donc $$x^2 - y^2 + \frac{2p - x}{y}(xy - a^2) = 0$$
$$y(x^2 - y^2) + (2p - x)(xy - a^2) = 0$$
$$x = \frac{2pa^2 + y^3}{a^2 + 2py}$$
équation du 3e degré.

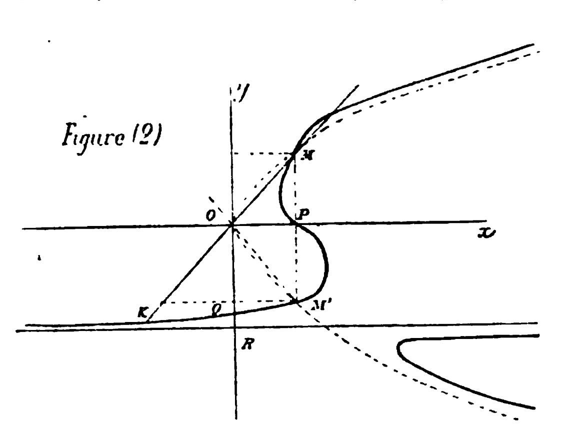
Discussion. — La droite $y = -\frac{a^2}{2p}$ est une asymptote de la courbe. x s'annule pour la valeur unique
$$y = -\sqrt[3]{2pa^2}.$$
La courbe a donc deux branches paraboliques asymptotes à la parabole $x = \frac{y^2}{2p} - \frac{a^2y}{4p} + \frac{a^4}{6p}$; on l'obtient en effectuant la division du numérateur de x par le dénominateur et supprimant les termes en $\frac{1}{y}$.

La droite $x = 2p$ rencontre la courbe en trois points dont les coordonnées sont
$$\overbrace{y = -2p \quad y = 0 \quad y = +2p}^{x = 2p}$$
Les deux points $x = 2p$, $y = \pm 2p$ sont les points d'intersection de la courbe avec la parabole donnée.

Si on coupe par $y = x$, on a
$$\begin{cases} \quad = 2p \\ x = 2p \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm a \\ x = \pm a \end{cases}$$
1° Supposons $a > 2p$, alors on a
$$a^2 > 4p^2$$
$$16p^4 < a^4$$
$$2pa^2 < \frac{a^6}{8p^3}$$
$$-2pa^2 > -\frac{a^6}{8p^3};$$
d'où enfin $$-\sqrt[3]{2pa^2} > -\frac{a^2}{2p};$$
donc on aura $-\sqrt{2pa^2} < -2p$ cos $a > 2p$

y	$-\infty$	$-\frac{a^2}{2p}$	$-\sqrt[3]{2pa^2}$	$-2p$	0	$2p$ $+\infty$
x	$+\infty$	$+\infty$ $-\infty$	0	$+2p$ *max*	$+2p$ *min*	$2p$ $+\infty$

Il y a un maximum pour x entre les deux valeurs de y, $-2p$ et o et un minimum de x entre o et $2p$. La courbe passant par le point K et par son symétrique par rapport à



l'origine, K', on a la forme donnée (*fig. 2*) $oP = 2p = PM = PM'$, $oQ = -\sqrt[3]{2pa^2}$, $oK = a$, $oK' = a$, $oR = -\frac{a^2}{2p}$

2° Supposons $a < 2p$, on a alors

$$-\sqrt[3]{2pa^2} > -2p \qquad -\frac{a^2}{2p} > -2p$$

$$-\sqrt[3]{2pa^2} < -\frac{a^2}{2p}.$$

Donc

y	$-\infty$	$-2p$	$-\sqrt[3]{2pa^2}$	$-\frac{a^2}{2p}$	o	$2p$	$+$
x	$-\infty$	$+2p$	$-$ o	$-\infty$ / $+\infty$	$+2p$	$2p$	$+\infty$

Donc on aura la forme *fig. 2 bis*.

3° $a = 2p$. C'est le cas de transition entre les deux formes précédentes. Dans ce cas, la courbe se décompose entre une conique et une droite.

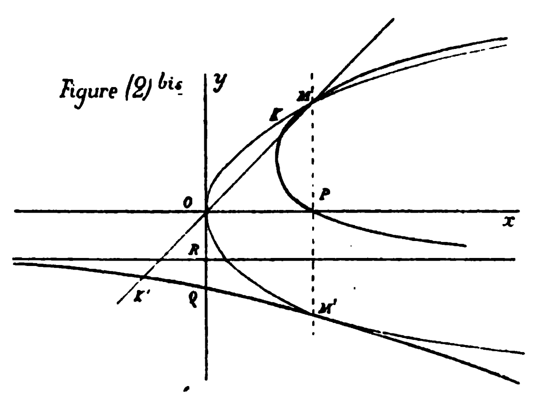
$$x = \frac{y^2 + 8p^2}{2p(y + 2p)}$$

ou bien $\qquad y + 2p = o$

$$x = \frac{(y - 2p)^2}{2p},$$

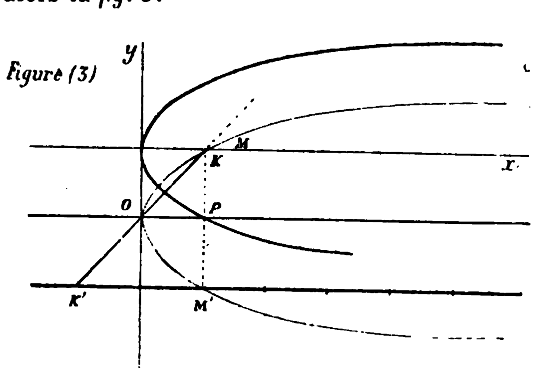
c'est-à-dire $\qquad (y - 2p)^2 - 2px = 0.$

Ce qui est la parabole donnée que l'on aurait déplacée



dans le plan parallèlement à oy d'une longueur égale à $2p$.

On a alors la *fig.* 3.



Il est à remarquer que dans ce cas la courbe ne passe pas par le point K: car pour $y = x$ on a pour points d'intersection avec la parabole $\quad y^2 - 6py + 4p^2 = 0.$

NOTA : Ont résolu la même question : MM. Coignard, au lycée Saint-Louis; Lestoquoy, à Saint-Quentin; Hugot, à Lyon; Leffuber, à Rennes; et *en partie seulement*, M. Escabeyrous, étudiant en mathématiques.

ÉCOLE CENTRALE

SECONDE SESSION DE 1880

Géométrie analytique.

Écrire l'équation générale des paraboles passant par deux points donnés A et B, et dont les diamètres ont une direction donnée.

— Donner l'expression des coordonnées du sommet et du foyer de chacune de ces paraboles.

— On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite AB; trouver le lieu des points de contact, et construire ce lieu.

Géométrie descriptive.

Par un point (ω, ω') situé dans le premier dièdre, à 100 millimètres de chacun des plans de projection, et au milieu de la feuille, on conduit une parallèle à la ligne de terre et une verticale.

La parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un tore dont le cercle méridien, tangent à cet axe en (ω, ω'), a 45 millimètres de rayon.

La verticale est l'axe d'un autre tore concentrique au premier, dont le rayon du cercle méridien, égal à celui de son collier, vaut 30 millimètres.

On demande de construire les deux projections de l'intervention des surfaces ainsi définie.

Dans la mise à l'encre on représentera le corps constitué par l'ensemble des deux tores, et on indiquera les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection, avec la tangente en ce point.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

276. — Par un des sommets d'un triangle quelconque, mener une droite telle que la somme des projections des côtés du triangle aboutissant à ce sommet, sur cette droite, soit égale à une quantité donnée.

277. — Deux circonférences roulent sur une ligne droite AB; une troisième circonférence de même rayon que les deux autres leur est constamment tangente; pour quelle position des trois circonférences l'aire du pentagone ayant pour sommets les trois centres et les deux points de contact sera-t-elle maxima?

278. — Soient ABC, $\alpha\beta\gamma$ deux triangles homothétiques dont le centre d'homothétie est l'un quelconque des centres des cercles inscrits ou ex-inscrits au triangle ABC ; soient αD, βE, γF des perpendiculaires respectives à Aα, Bβ, Cγ. Démontrer que les points de concours des droites AB et γF, CA et βE, CB et αD sont en ligne droite.

279. — On donne un demi-cercle ACB et une tangente AD à l'extrémité A du diamètre AB. On propose de mener par l'extrémité B une droite BCD, qui coupe la circonférence en C et la tangente en D, de telle sorte que, si l'on fait tourner la figure autour de AB, la surface du cercle engendré par AD soit égale à la zone engendrée par l'arc BC.

280. — On joint un point quelconque de l'axe radical de deux cercles aux points de contact d'une tangente commune ; des points d'intersection de ces lignes prolongées avec une droite quelconque partant du centre de similitude, on mène des tangentes en A et B aux cercles ; on demande : 1° de trouver le lieu de leur point de concours M ; 2° de prouver que la droite AB passe par un point fixe.

281. — Résoudre le système d'équation

$$\frac{1}{ax-by-1} + \frac{1}{by-ax-1} = \frac{1}{ax-by-1}$$
$$bx + ay = m.$$

Mathématiques spéciales.

282. — Résoudre un triangle dont on donne un élément linéaire (côté, bissectrice, etc.), sachant en outre :

1° Que le rapport du carré de chacune des hauteurs au rectangle des segments qu'elle détermine sur la base correspondante est exprimé par un nombre entier ;

2° Que le produit des trois hauteurs est un multiple du produit de trois segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés opposés. *(Geoffroy.)*

283. — Étant donnés une parabole P et deux points A et B de cette courbe situés sur une même corde principale (c'est-à-dire sur une même perpendiculaire à l'axe), on fait passer par les deux points A et B une hyperbole équilatère de forme

constante, c'est-à-dire dont l'axe est invariable en grandeur. On demande de trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes à la parabole fixe et à l'hyperbole variable, lorsque celle-ci change de position en passant toujours par les points fixes A et B.

AVIS

La rédaction n'a pas reçu de solution des questions suivantes: 132, 186, 218, 227, 228, 234, 235, 236, 246, 247, 254, 255, 256, 257, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 269.

Toutes les autres questions ont paru, ou paraîtront prochainement.

Quelques solutions sont parvenues sans nom, et ont dû par suite être écartées sans examen.

Nous rappelons aux lecteurs que toute solution doit remplir les conditions suivantes:

1° Chaque question doit être mise à part, avec son numéro bien en évidence, *et l'énoncé complet*.

2° Les figures doivent être faites à part et rattachées à la question correspondante; elles doivent être faites avec soin.

3° Chaque question doit porter *en tête* le nom de celui qui l'a résolue et le nom de l'établissement auquel il appartient.

4° Nous engageons fortement les élèves à écrire très nettement, surtout les calculs algébriques, et à éviter toute abréviation non admise d'une manière absolument générale.

ERRATA

N° 11, page 510, ligne 11: au lieu de A, A', A'', B, B', B'', lire: A, A', A''. BB'B''.

Lignes 12 et 13: au lieu de $aa'a''$, $bb'b''$, lire: a, a', a'', b, b', b''.

Ligne 15: au lieu de: $d = (a - \lambda A)\Delta$, lire: $a = (a - \lambda A)\Delta$.

$$A'A'' - B^2 = (a - \lambda A)\Delta.$$

Partout a au lieu de d.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 22984-0.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 22981-0.


3 2044 102 935